АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXI 1975 Вып. 4

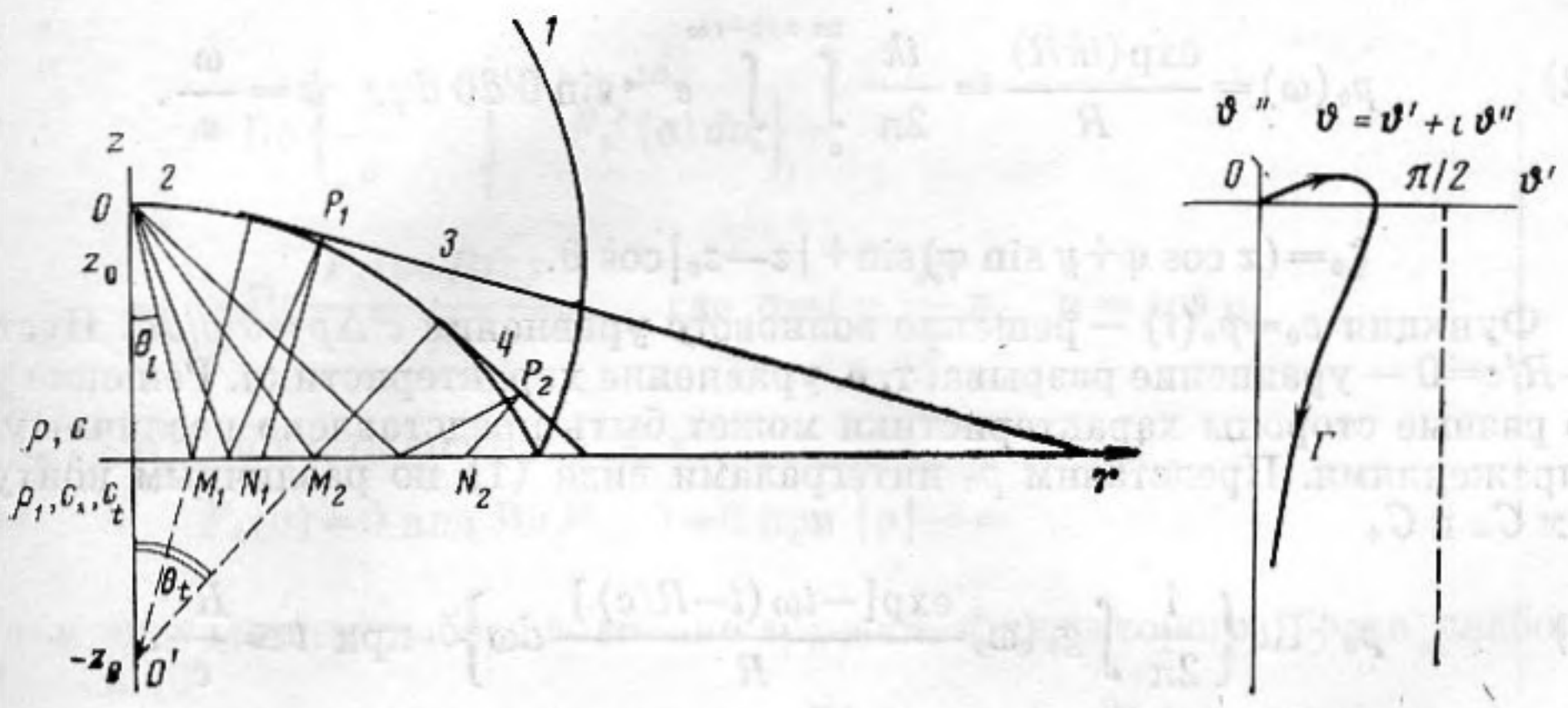
УДК 534.24

ОТРАЖЕНИЕ ЕДИНИЧНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА ОТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОЙ И ТВЕРДОЙ СРЕД

И. Д. Иванов

Задача об отражении сферического импульса от границы раздела жидкой и твердой сред решена методом разложения сферического импульса по плоским импульсам. Получено представление отраженного импульса произвольной формы контурным интегралом. В случае единичного импульса контурный интеграл приводится к интегралам по вещественной оси с конечными пределами. При отражении единичного импульса боковые волны возбуждаются при углах отражения, превышающих критические углы, как и в случае стационарного излучения, но при любых расстояниях от мнимого источника.

Сферическая волна звукового давления произвольной формы может быть представлена в виде суперпозиции волн, описываемых более простыми функциями, например гармонических волн или единичных импульсов. При разложении падающего импульса по сферическим гармоническим волнам можно использовать для отраженной гармонической волны выражение



Фиг. 1 Фиг. 2

Фиг. 1. Фронты импульсов: *1* – падающего, *2* – отраженного, *3* – боковой волны p_l, *4* – боковой волны p_t; $L_{0l}=OM_1$, $L_{1l}=M_1N_1$, $L_l=N_1P_1$; $L_{0t}=OM_2$, $L_{1t}=M_2N_2$, $L_t=N_2P_2$

Фиг. 2. Контур интегрирования в комплексной плоскости $\vartheta=\vartheta'+i\vartheta''$

в конечном виде, полученное методом, развитым Бреховских [1] при достаточно высоких частотах. Если спектральная функция падающего импульса имеет полюс в области достаточно высоких частот, где справедливо выражение в конечном виде для отраженных гармонических волн, отраженный от границы раздела сред импульс можно найти, представив его контурным интегралом Фурье. В случае, когда полюс спектральной функции лежит в области достаточно низких частот, мы не можем применить этот довольно

простой способ решения задачи об отражении импульса. Тогда можно использовать разложение сферического импульса по плоским импульсам. Вычисление отраженного импульса упрощается, если падающий сферический импульс произвольной формы представить как суперпозицию единичных импульсов, используя интеграл Дюамеля, и единичный сферический импульс разложить по плоским импульсам. Ниже получено решение задачи об отражении сферического импульса от границы раздела жидкой и твердой сред методом разложения сферического импульса по плоским импульсам.

Пусть $z=0$ — граница раздела жидкой и твердой сред (фиг. 1), ρ и c — плотность и скорость звука в жидкой среде $(z>0)$, ρ_1, c_l, c_t — плотность и скорость распространения продольной и поперечной волн в твердой среде $(z<0)$, $m=\rho_1/\rho$, $n_l=c/c_l$, $n_t=c/c_t$, причем $n_l<n_t<1$, $r=0$, $z=z_0$ — координаты излучателя, $p_0=p_0(t)$ — излучаемый сферический импульс, описываемый вещественной функцией $F(\tau)$. Представим $F(\tau)$ полусуммой $F(\tau)=[F_1(\tau)+F_2(\tau)]/2$, $F(\tau)=\mathrm{Re}\,F_1(\tau)=\mathrm{Re}\,F_2(\tau)$, причем $F_1(\tau)$ может быть аналитически продолжена в верхнюю полуплоскость и $F_2(\tau)$ в нижнюю полуплоскость комплексного переменного $\sigma=\tau+i\nu$. Пусть $g_2(\omega)$ — преобразование Фурье функции $F_2(\tau)$ и функция $g_2(\omega)$ имеет полюсы только в правой полуплоскости. Тогда для p_0 мы получаем выражение

$$(1)\qquad p_0=\frac{F(t-R/c)}{R}=\mathrm{Re}\,\frac{F_2(t-R/c)}{R}=$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_2(\omega)\,p_0(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega\right\},\quad R=\sqrt{r^2+(z-z_0)^2},$$

где

$$(2)\qquad p_0(\omega)=\frac{\exp(ikR)}{R}=\frac{ik}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2-i\infty}e^{ik\zeta_0}\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi,\quad k=\frac{\omega}{c}.$$

$$\zeta_0=(x\cos\varphi+y\sin\varphi)\sin+|z-z_0|\cos\vartheta.$$

Функция $p_0=p_0(t)$ — решение волнового уравнения $c^2\Delta p=\partial^2p/\partial t^2$. Пусть $t-R/c=0$ — уравнение разрыва, т. е. уравнение характеристики. Решение p_0 по разные стороны характеристики может быть представлено различными выражениями. Представим p_0 интегралами вида (1) по различным контурам C_- и C_+

$$(3)\qquad p_0+\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_\mp}g_2(\omega)\frac{\exp[-i\omega(t-R/c)]}{R}\,d\omega\right\}\quad\text{при}\quad t\lessgtr\frac{R}{c}.$$

Контуры C_- и C_+ расположены в первом и четвертом квадрантах соответственно. В качестве C_- и C_+ можно выбрать замкнутые контуры, охватывающие полюсы функции $g_2(\omega)$. Случай, когда полюс расположен на мнимой оси, следует рассматривать как предельный случай, устремляя вещественную часть полюса к нулю.

Задача состоит в том, чтобы найти отраженный импульс $p=p(t)$, представляющий собой решение волнового уравнения, которое удовлетворяет граничным условиям и начальным данным. Если $F(\tau)=0$ при $\tau\leqslant0$, то искомое решение должно удовлетворять нулевым начальным данным при $t=z_0/c$.

Падающий сферический импульс можно представить интегралом по плоским импульсам, описываемым функцией $F_2'(\sigma)$, где штрих означает

дифференцирование по аргументу

$$(4)\qquad p_0 = \operatorname{Re}\frac{F_2(t-R/c)}{R} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{2\pi c}\int_0^{2\pi}\int_0^{\vartheta'-i\infty} F_2'(\sigma)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\right\},\quad \sigma = t-\frac{\zeta_0}{c}.$$

Равенство (4) можно получить, используя метод Фурье. Подставив выражение (2) в формулу (3) и изменив порядок интегрирования, получаем выражение (4), где $F_2'(t-\zeta/c)$ определяется интегралом

$$(5)\qquad F_2'(t-\zeta_0/c) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_\mp}(-i\omega)\, g_2(\omega)\, e^{-i\omega(t-\zeta_0/c)}d\omega.$$

Заметим, что подстановка выражения (2) в формулу (1) приводит к интегралу вида (5) по вещественной оси, который расходится на отрицательной полуоси в случае неоднородных волн, поскольку под знак интеграла входит $\exp(-\omega|z-z_0|\operatorname{sh}\vartheta''/c)$.

Равенство (4) получил Поритский [2] методом Вейля: вместо системы координат ϑ, φ с полярной осью, совпадающей с осью z, вводится система координат η, ψ, своя для каждой точки (x, y, z) с полярной осью, проходящей через излучатель и эту точку. В новой системе координат интеграл (4) вычисляется непосредственно

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{2\pi c}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\eta'-i\infty} F_2'(\sigma)\sin\eta\, d\eta\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{c}\int_1^{\infty\exp(i\eta')} F_2'(\sigma)\, du\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\frac{F_2(t-R/c)}{R},\qquad \text{где } \sigma = t-\frac{R}{c}u,\quad u=\cos\eta,$$

если $F_2(\sigma)$ удовлетворяет условию

$$(6)\qquad F_2(\sigma)=0 \text{ или } \operatorname{Re}F_2(\sigma)=0 \text{ при } |\sigma|\to\infty$$

и при подходящем выборе значения η'; достаточно второго, более слабого условия (6).

В случае стационарного излучения $F(\tau)=\cos\omega\tau$, $F_2(\sigma)=\exp(-i\omega\sigma)$ выполняется первое условие (6) при $0<\eta'<\pi/2$ и при $\vartheta'=\pi/2$ и для стационарной сферической волны получается разложение Вейля (2).

В случае излучения единичного импульса $F(\tau)=h(\tau)$ аналитическим продолжением единичной функции в нижней полуплоскости является функция

$$(7)\qquad F_2(\sigma) = 1+(\pi i)^{-1}\ln\sigma.$$

Первое условие (6) для функции (7) не выполняется: $|\ln\sigma|\to\infty$ при $|\sigma|\to\infty$. Второе условие (6) выполняется при $\eta'\to 0$. При фиксированном направлении полярной оси проинтегрируем вначале в (4) выражение (7) по переменной φ и затем по переменной ϑ; контур интегрирования Γ в плоскости комплексного переменного ϑ устремим в бесконечность $\vartheta\to -i\infty$, $\vartheta'\to 0$ (фиг. 2). Подставляя выражение (7) в формулу (4), вводя сфериче-

ские координаты R, θ, φ_1 и полагая $x=R\sin\theta\cos\varphi_1$, $y=R\sin\theta\sin\varphi_1$, $z=R\,\mathrm{sos}\,\theta$, получаем выражение для единичного сферического импульса

$$(8)\qquad p_0=\frac{h(t-R/c)}{R}=$$

$$=\mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{2\pi^2 iR}\int_0^{2\pi}\int_\Gamma\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi}{ct-\cos\theta\cos\vartheta-\sin\theta\sin\vartheta\cos(\varphi-\varphi_1)}\right\}.$$

Интегрируя по φ и вводя вместо ϑ новую переменную интегрирования $u=\cos\vartheta$, получаем из формулы (8) выражение

$$(9)\qquad p_0=\frac{h(t-R/c)}{R}=\frac{1}{\pi R}\mathrm{Re}\left\{-i\int_L\frac{du}{w_0(u)}\right\}=\frac{1}{\pi R}\mathrm{Im}\int_L\frac{du}{w_0(u)}$$

где L — контур интегрирования в плоскости комплексного переменного $u=u'+iu''$

$$w_0(u)=\sqrt{\left(u-\frac{ct}{R}\cos\theta\right)^2-\sin^2\theta\left[1-\left(\frac{ct}{R}\right)^2\right]}.$$

Функция $w_0(u)$ имеет точки ветвления $u_+=u_+(\theta,t)$ и $u_-=u_-(\theta,t)$

$$(10)\qquad u_\pm=\frac{ct}{R}\cos\theta\pm\sqrt{1-\left(\frac{ct}{R}\right)^2}\sin\theta\quad\text{при}\quad t<\frac{R}{c},$$

$$u_\pm=\frac{ct}{R}\cos\theta\pm i\sqrt{\left(\frac{ct}{R}\right)^2-1}\sin\theta\quad\text{при}\quad t>\frac{R}{c}$$

Разрезы из точек ветвления u_+ и u_- проведем так, как показано на фиг. 3, полагая $\arg w_0=0$ на нижнем берегу разреза, проведенного из вещественной точки u_+. Контур L проходит из точки $u=1$ по нижнему берегу разреза, обходит точку ветвления u_+ и удаляется в бесконечность, приближаясь к вещественной положительной полуоси.

Равенство (9) можно проверить, вычислив интеграл по контуру L. Совмещая контур L с вещественной полуосью $u>u_+$ при $ct<R$, получаем $p=0$, поскольку интеграл становится вещественным. При $ct>R$ заменим интеграл по L суммой интегралов по дуге полуокружности L_0 и по прямой L_1, совпадающей с вещественной полуосью $u<1$. Интеграл по L_0 дает πi, интеграл по L_1 есть вещественная величина. Таким образом, $p_0=R^{-1}$ при $ct>R$. Интегралы по вещественным полуосям расходятся, поскольку $|\ln\sigma|\to\infty$ при $|\sigma|\to\infty$. Однако достаточно знать, что они вещественны и выполняется второе условие (6).

Отраженный импульс можно представить как суперпозицию отраженных плоских импульсов. Из формулы (5) следует, что отраженные плоские импульсы описываются функцией

$$VF_2'(t-\zeta/c)=\frac{1}{2\pi}V\int_{C_\mp}(-i\omega)g_2(\omega)e^{i\omega(t-\zeta/c)}d\omega,$$

$$\zeta=(x\cos\varphi+y\sin\varphi)\sin\vartheta+(z+z_0)\cos\vartheta,$$

где $V=V(\vartheta)$ — коэффициент отражения плоской монохроматической волны. Таким образом, мы получаем для отраженного импульса интегральное

представление

$$(11)\qquad p=\operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{2\pi c}\int_0^{2\pi}\int_0^{\vartheta'-i\infty} V(\vartheta)F_2'(\sigma)\sin\vartheta d\vartheta d\varphi\right\},\quad \sigma=t-\frac{\zeta}{c}.$$

Для коэффициента отражения мы получаем из граничных условий выражение

$$(12)\qquad V=\frac{m\cos\vartheta R(\vartheta)-n_t^4\gamma_1}{m\cos\vartheta R(\vartheta)+n_t^4\gamma_1},$$

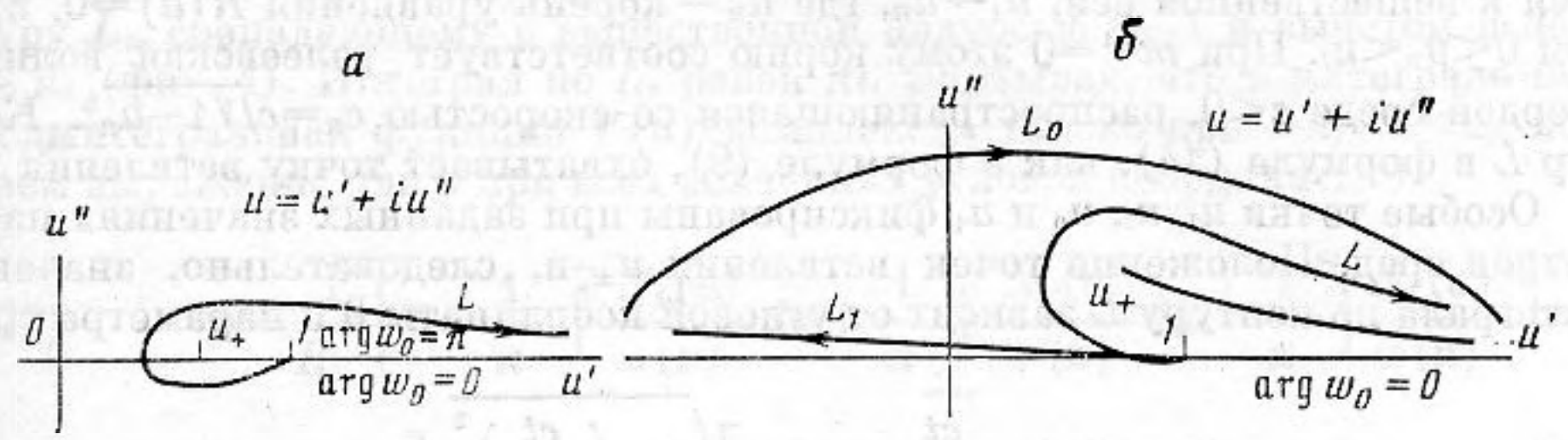
где

$$R(\vartheta)=(2\sin^2\vartheta-n_t^2)^2+4\sin^2\vartheta\gamma_1\gamma_2,\quad \gamma_1=\sqrt{n_l^2-\sin^2\vartheta},\quad \gamma_2=\sqrt{n_t^2-\sin^2\vartheta},$$

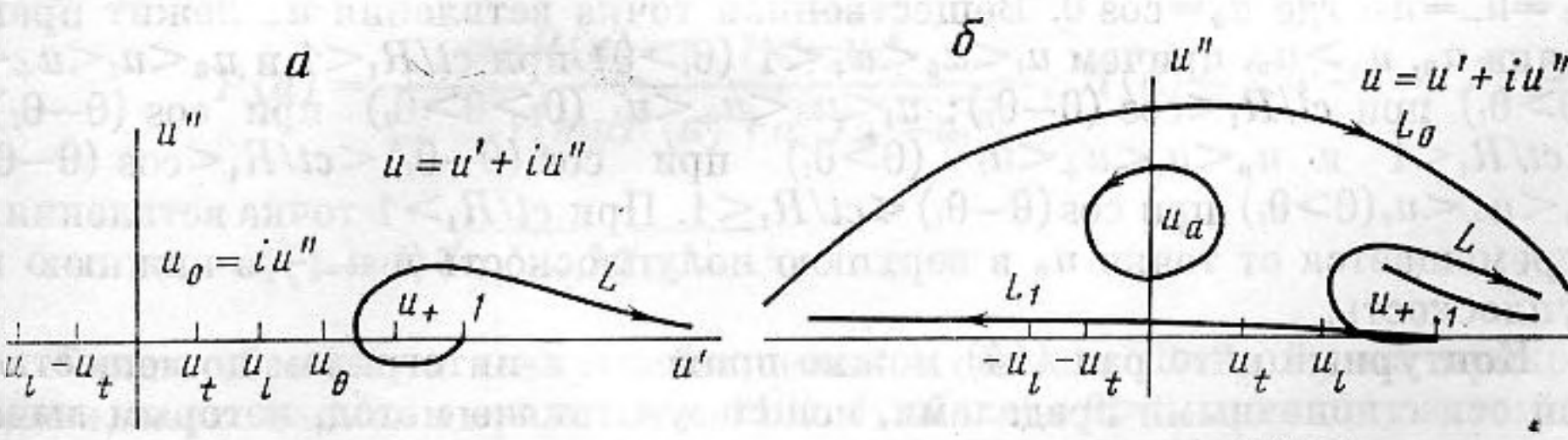
причем ветви двузначных функций $\gamma_1=\gamma_1(\vartheta)$ и $\gamma_2=\gamma_2(\vartheta)$ определяются условием

$$(13)\qquad 0\leqslant\arg\gamma_j<\pi,\quad j=1,2.$$

При таком выборе $\arg\gamma_j$ решения уравнений Гельмгольца для потенциалов в твердой среде $(z<0)$, содержащие множители $\exp(-ikz\gamma_1)$ и $\exp(-ikz\gamma_2)$,



Фиг. 3. Контур интегрирования в комплексной плоскости $u=\cos\vartheta=u'+iu''$ в интегральном представлении падающего импульса: *а* – $t<R/c$, *б* – $t>R/c$



Фиг. 4. Контур интегрирования в комплексной плоскости $u=u'+iu''$ в интегральном представлении отраженного импульса: *а* – $t<R_1/c$, *б* – $t>R_1/c$

удовлетворяют условия на бесконечности при $z\to-\infty$. Отраженная плоская волна удовлетворяет условию на бесконечности при $z\to\infty$, если $0\leqslant\arg\cos\vartheta<\pi$.

Используя равенство (11), справедливое при произвольной форме падающего импульса, найдем выражение для единичного отраженного импульса. Подставляя выражение (7) в формулу (11), вводя сферические координаты R_1, θ, φ_1, где $R_1=\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}$, интегрируя по φ и полагая $u=\cos\vartheta$, получаем интегральное представление для отраженного единичного импульса

$$(14)\qquad p=\frac{1}{\pi R_1}\operatorname{Im}\int_L V(u)\frac{du}{w(u)},$$

где

$$w(u)=\sqrt{\left(u-\frac{ct}{R_1}\cos\theta\right)^2-\sin^2\theta\left[1-\left(\frac{ct}{R_1}\right)^2\right]}.$$

Выражение для $V(u)$ находится из формулы (12), где $u=\cos\vartheta$, $\gamma_1=\sqrt{u^2-u_1^2}$, $\gamma_2=\sqrt{u^2-u_2^2}$, $u_1=u_l=\sqrt{1-n_l^2}=\cos\theta_l$, $u_2=u_t=\sqrt{1-n_t^2}=\cos\theta_t$.

Подынтегральная функция в формуле (14) имеет точки ветвления $\pm u_l$, $\pm u_t$, u_+ и u_-, где u_+ и u_- находятся из (10), если заменить R на R_1. Разрезы из точек u_l и u_t проведем вправо по вещественной оси, а из точек $-u_l$ и $-u_t$ — влево по вещественной оси. Ветви двузначных функций $\gamma_j(u)$ фиксированы условием (13). Ветвь двузначной функции $w(u)$ выбрана так же, как ветвь двузначной функции $w_0(u)$ в формуле (9). Подынтегральная функция $V(u)$ имеет полюсы, которые являются корнями уравнения

$$muR(u)+n_t^4\gamma_1=0. \tag{15}$$

Уравнение (15) имеет мнимый корень $u_0=iu''$ при $\arg\gamma_j=\pi/2$ и комплексный корень $u_1=u'-i\delta$. При $\rho\to 0$ $(m^{-1}\to 0)$ комплексный корень приближается к вещественной оси, $u_1\to u_R$, где u_R — корень уравнения $R(u)=0$, причем $0<u_R<u_t$. При $m^{-1}=0$ этому корню соответствует рэлеевская волна в твердой среде $z<0$, распространяющаяся со скоростью $c_R=c/\sqrt{1-u_R^2}$. Контур L в формуле (14), как в формуле (9), охватывает точку ветвления u_+.

Особые точки u_l, u_t, u_0 и u_1 фиксированы при заданных значениях параметров сред. Положение точек ветвления $u_\pm$ и, следовательно, значение интеграла по контуру L зависит от угловой координаты θ и параметра ct/R_1.

$$u_\pm=u_\pm(\theta, ct/R_1)=\frac{ct}{R_1}\cos\theta\pm\sqrt{1-\left(\frac{ct}{R_1}\right)^2}\sin\theta. \tag{16}$$

Отсюда следует, что при $ct/R_1=1$ точки ветвления совпадают одна с другой, $u_+=u_-=u_\theta$, где $u_\theta=\cos\theta$. Вещественная точка ветвления u_+ лежит правее точки u_θ, $u_+>u_\theta$, причем $u_l<u_\theta<u_+<1$ $(\theta_l>\theta)$ при $ct/R_1<1$ и $u_\theta<u_l<u_+<1$ $(\theta>\theta_l)$ при $ct/R_1<\cos(\theta-\theta_l)$; $u_l<u_\theta<u_+<u_t$ $(\theta_t>\theta>\theta_l)$ при $\cos(\theta-\theta_t)<ct/R_1<1$ и $u_\theta<u_l<u_+<u_t$ $(\theta>\theta_t)$ при $\cos(\theta-\theta_t)<ct/R_1<\cos(\theta-\theta_l)$; $u_\theta<u_+<u_t(\theta>\theta_t)$ при $\cos(\theta-\theta_t)<ct/R_1<1$. При $ct/R_1>1$ точка ветвления u_+ перемещается от точки u_θ в верхнюю полуплоскость и u_- — в нижнюю полуплоскость.

Контурный интеграл (14) можно привести к интегралам по вещественной оси с конечными пределами, используя тот же метод, которым вычисляется интеграл (9). При вещественном значении u_+ контур интегрирования в формуле (9) можно провести от $u=1$ до точки ветвления u_+ по нижнему берегу разреза $(\arg w=0)$ и от u_+ до ∞ по верхнему берегу разреза $(\arg w=\pi)$. Если точка ветвления лежит в интервале $u_l<u_+<1$, подынтегральная функция $V(u)$ вещественна и правая часть формулы (14) равна нулю

$$p=0 \text{ при } \begin{cases} t<R_1/c \text{ в области } \theta<\theta_l. \\ t<\check{L}_l/c \text{ в области } \theta>\theta_l, \text{ где } \check{L}_l=(R_1/c)\cos(\theta-\theta_l). \end{cases} \tag{17}$$

При $u_l<u_+<u_t$ коэффициент отражения имеет комплексное значение

$$V(u)=M_1(u)-iN_1(u)=V_1\exp(-i\chi_1).$$

Учитывая, что интегралы от u_+ до u_l по нижнему берегу разреза и по верхнему берегу разреза имеют одинаковые мнимые части, получаем для p вы-

ражение

$$(18)\qquad p=\frac{2}{\pi R_1}\int\limits_{u_+}^{u_l}\frac{N_1(u)}{w(u)}du$$

$$\text{при}\begin{cases}\check{L}_l/c<t<R_1/c \text{ в области } \theta_l<\theta<\theta_t\\ \check{L}_t/c<t<\check{L}_l/c \text{ в области } \theta>\theta_t, \text{ где } \check{L}_t=(R_1/c)\cos(\theta-\theta_t).\end{cases}$$

При $u_+<u_t$ коэффициент отражения имеет комплексное значение $V(u)=$ $=M_2(u)-iN_2(u)=V_2\exp(-i\chi_2)$.

Интегралы от u_+ до u_t по нижнему берегу разреза и по верхнему берегу разреза имеют одинаковые мнимые части, и для p получаем выражение (19)

$$p=\frac{2}{\pi R_1}\left[\int\limits_{u_+}^{u_t}\frac{N_2(u)}{w(u)}du+\int\limits_{u_t}^{u_l}\frac{N_1(u)}{w(u)}du\right]\text{ при } \check{L}_l/c<t<R_1/c \text{ в области } \theta>\theta_t.$$

Явный вид мнимой части комплексной величины $V(u)$ не приводим.

При комплексном значении u_+ заменим интеграл по контуру L суммой интегралов по дуге полуокружности L_0 в верхней полуплоскости и по контуру L_1, совпадающему с вещественной полуосью $u<1$ и вычетом в полюсе u_0 (фиг. 4). Интеграл по L_0 равен πi. Учитывая, что в интеграле по L_1 подынтегральная функция $V(u)$ комплексна только при $-u_l<u<u_l$, получаем выражение для p при всех значениях угловой координаты θ

$$(20)\qquad p=\frac{1}{R_1}\left[1+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-u_l}^{-u_t}\frac{N_1(u)}{w(u)}du+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-u_t}\frac{N_2(u)}{w(u)}du+\frac{1}{\pi}\int\limits_{u_t}^{u_l}\frac{N_1(u)}{w(u)}du+\right.$$

$$\left.+2P(u_0)\right]\text{ при } t>R_1/c,$$

где

$$P(u)=\frac{muR(u)-n_t^4\sqrt{u^2-u_t^2}}{(d/du)\left[muR(u)+n_t^4\sqrt{u^2-u_t^2}\right]},\quad R(u)=(2u^2-1-u_+^2)^2-$$

$$-4(1-u^2)\sqrt{u_l^2-u^2}\sqrt{u_t^2-u^2}.$$

Таким образом, в точку наблюдения в области $\theta>\theta_l$ первой приходит волна, описываемая выражением (18). В области $\theta>\theta_t$ приходит затем вторая волна, описываемая выражением (19). Время вступления этих волн $t=\check{L}_l/c$ и $t=\check{L}_t/c$, где $\check{L}_{0l}=L_l+n_lL_{1l}+\check{L}_l$ — длина оптического пути волны, распространяющейся вдоль отрезков L_{0l} и L_l в жидкой среде и вдоль отрезка L_{1l}, по которому волна распространяется со скоростью c_l (фиг. 1), $\check{L}_t=$ $=L_{0t}+n_tL_{1t}+L_t$ — длина оптического пути волны, распространяющейся вдоль отрезков L_{0t}, L_{1t} и L_t, причем вдоль отрезка L_{1t} волна распространяется со скоростью c_t. Волны, распространяющиеся вдоль путей $\check{L}_l$ и $\check{L}_t$, представляют собой боковые волны. В случае отражения единичного импульса боковые волны возбуждаются при любых значениях R_1. При всех значениях θ в момент $t=R_1/c$ вступает отраженная волна, описываемая выражением (20). Последнее слагаемое в (20) представляет собой вычет в полюсе u_0. При гармоническом излучении этому полюсу соответствует поверхностная волна. Комплексный полюс $u_1=u'-i\delta$ не охватывается контуром интегрирования. Однако значение подынтегральной функции $N_2(u)$ резко возрастает при $\delta\to0$. При гармоническом излучении этому полюсу соответ-

ствует вытекающая волна, которая при достаточно большом значении δ экспоненциально затухает с увеличением расстояния от излучателя.

В настоящей и в работе [3] рассмотрены методы решения задачи об отражении сферического импульса от границы раздела двух сред, дополняющие друг друга. Представление импульса произвольной формы в виде суперпозиции единичных импульсов и разложение падающего единичного сферического импульса по плоским импульсам можно использовать при любой форме излучаемого импульса. Однако применение этого метода целесообразно в случае достаточно короткого импульса, аналитическое описание которого затруднительно, а также в случае, когда излучаемый импульс описывается известной функцией, например отрезком косинусоиды, но частота заполнения ω_0 такова, что не выполняется условие $\omega_0 R/c \gg 1$ и нельзя воспользоваться решением для гармонической волны при $\omega=\omega_0$. Если излучаемый импульс описывается отрезком косинусоиды или убывающей экспонентой $\exp(-\lambda t)$ при $t>0$ и выполняются условия $\omega_0 R/c \gg 1$ и $\lambda R/c \gg 1$, выражения в конечном виде для отраженного импульса легко находятся методом, изложенным в предыдущей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. М. Бреховских.* Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
2. *H. Poritsky.* Extension of Weyl's integral for harmonic spherical waves to arbitrary wave shapes. Commun. a. Appl. Math., 1951, *11*, 33.
3. *И. Д. Иванов.* Об отражении сферического импульса от границы раздела жидкой и твердой сред. Акуст. ж., 1975, *21*, 3, 415–420.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
13 марта 1974 г.