АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXI 1975 Вып. 4

УДК 534.121

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИКИ ВИБРАЦИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СТРУКТУР

*Б. А. Канлев, Г. С. Любашевский, Б. Д. Тартаковский*

Экспериментально исследован закон распределения амплитуд и квадратов амплитуд колебательной скорости, измеренных в различных точках поверхности оболочек при точечном возбуждении гармонической силой в звуковом диапазоне частот. Исследовались однородные и вибродемпфированные стальные оболочки двух конфигураций. Установлено, что распределение амплитуд и квадратов амплитуд имеет характерную устойчивую форму и удовлетворительно аппроксимируется гамма-распределением. В связи с этим гамммa-распределение используется для построения доверительных интервалов средних по структуре характеристик вибрации.

Сложность формы и неоднородность подавляющего большинства механических конструкций и оболочек затрудняет использование точных аналитических методов для описания их вибраций. Рассмотрение идеализированных моделей позволяет во многих случаях качественно оценить вибрации структуры, однако, не всегда приемлемо для количественной оценки вибраций конкретных реальных структур. Указанные трудности обусловливают необходимость использования и развития экспериментальных методов исследования и, в частности, изучения статистики характеристик вибраций, измеренных в различных точках структуры.

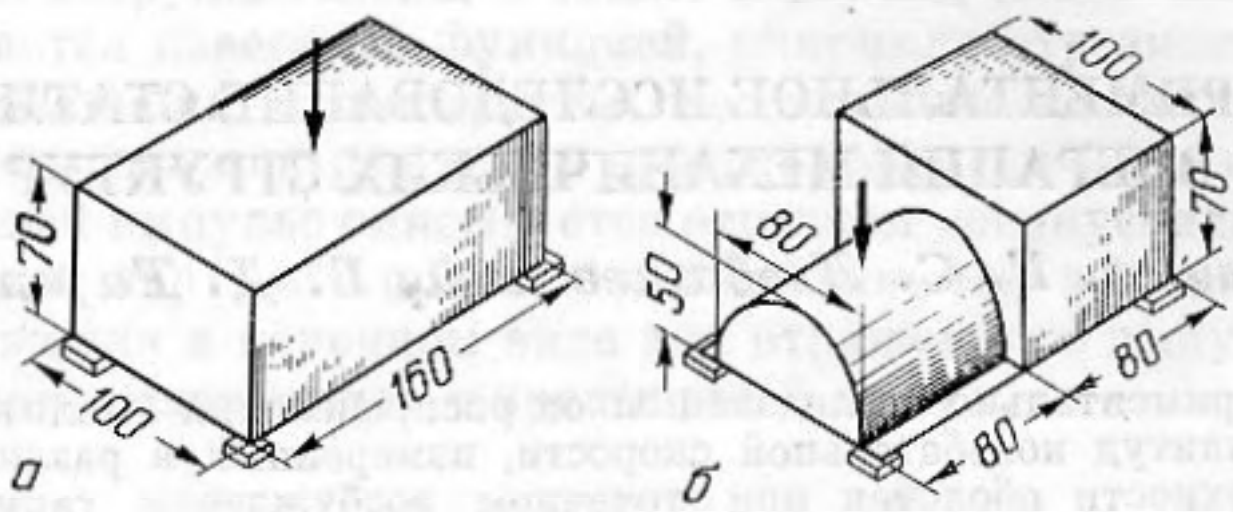
Наиболее неблагоприятным для статистического подхода является режим гармонического возбуждения. Однако в связи с тем, что исследование поведения структуры при гармоническом возбуждении во многих случаях представляет практический интерес (определение резонансов, исследование поведения структуры на характерных для данной задачи частотах и т. п.), целесообразно оценить возможность использования статистических методов при возбуждении структуры именно гармоническим сигналом.

Отметим, что статистический подход к изучению отклика системы при гармоническом возбуждении успешно используется и развивается в акустике помещений [1, 2]. Лайен [3], использовав статистический подход для теоретического исследования как звукового поля помещения, так и вибраций пластины, получил оценки среднего и дисперсии квадрата звукового давления в помещении и квадрата колебательной скорости пластины при возбуждении гармоническим сигналом и полосой белого шума.

В настоящей работе экспериментально исследовалось распределение совокупности амплитуд и квадратов амплитуд колебательной скорости, измеренных в различных точках структуры при точечном возбуждении ее гармонической силой в звуковом диапазоне частот. Знание закона распределения позволяет производить вероятностно-статистическую оценку средней по структуре амплитуды и энергии вибраций, а также дает возможность определить зависимость достоверности результата от числа измерений. Это необходимо, в частности, для оценки эффективности снижения уровня вибрации структур при нанесении на них вибропоглощающих по-

крытий или при использовании других методов снижения вибраций и обусловленного вибрациями шума.

При исследовании использовались стальные оболочки толщиной 8 *мм* двух конфигураций: прямоугольной (фиг. 1, *а*) и комбинированной (*б*). Для оценки влияния внутренних потерь на характер распределения амплитуд и квадратов амплитуд исследовались такие же вибродемпфированные оболочки, коэффициент потерь которых был на порядок больше. Прямоугольные оболочки возбуждались гармонической силой в диапазоне частот 130—16000 *гц*, комбинированные — в диапазоне 130—6000 *гц*. Указанным




Фиг. 1. Исследуемые оболочки. Стрелкой обозначено место приложения возбуждающей силы. Размеры указаны в *см*

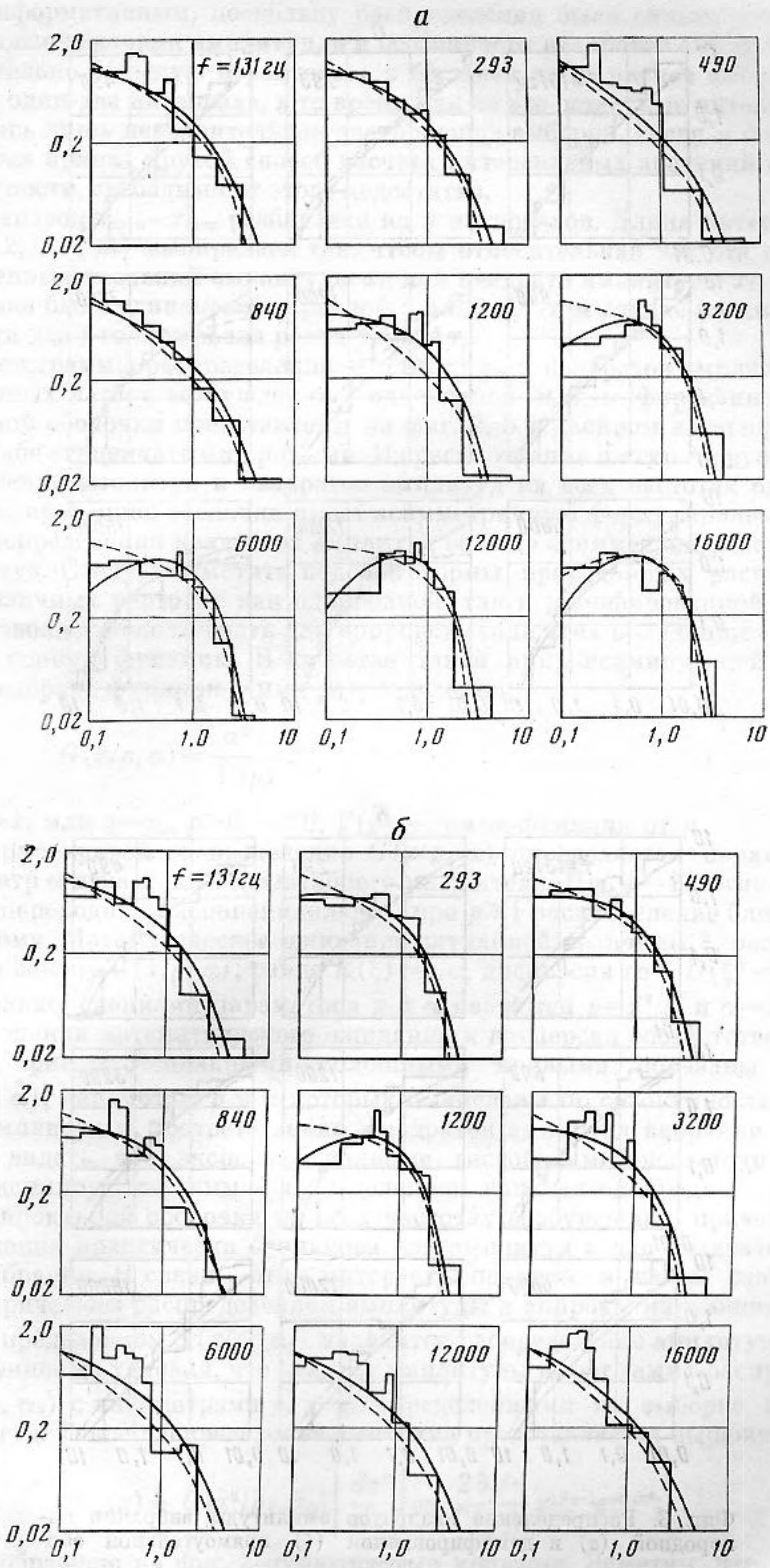
диапазонам соответствуют следующие волновые размеры оболочек: $kL=18-210$ для прямоугольной и $kL=16-117$ для комбинированной оболочки, где $k$ — волновое число изгибной волны, $L=\sqrt{S}$, $S$ — площадь поверхности оболочек. При значениях $kL<70$ для однородной и $kL<40$ для демпфированной оболочки вибрации имеют резонансный характер; при более высоких значениях $kL$ в однородных оболочках поле стоячих волн переходит в диффузное поле, а в демпфированных оболочках — в поле бегущей волны, затухающее в направлении от источника к границе оболочки.

Измерения проводились во множестве точек, равномерно распределенных по поверхности оболочки. На прямоугольных оболочках число точек измерения $n$ было выбрано равным 350, на комбинированных оболочках — 280. В таблице приведены значения отношения длины изгибной волны $\lambda$ в оболочках к среднему расстоянию между точками измерения $l$ для различных частот возбуждения $f$.

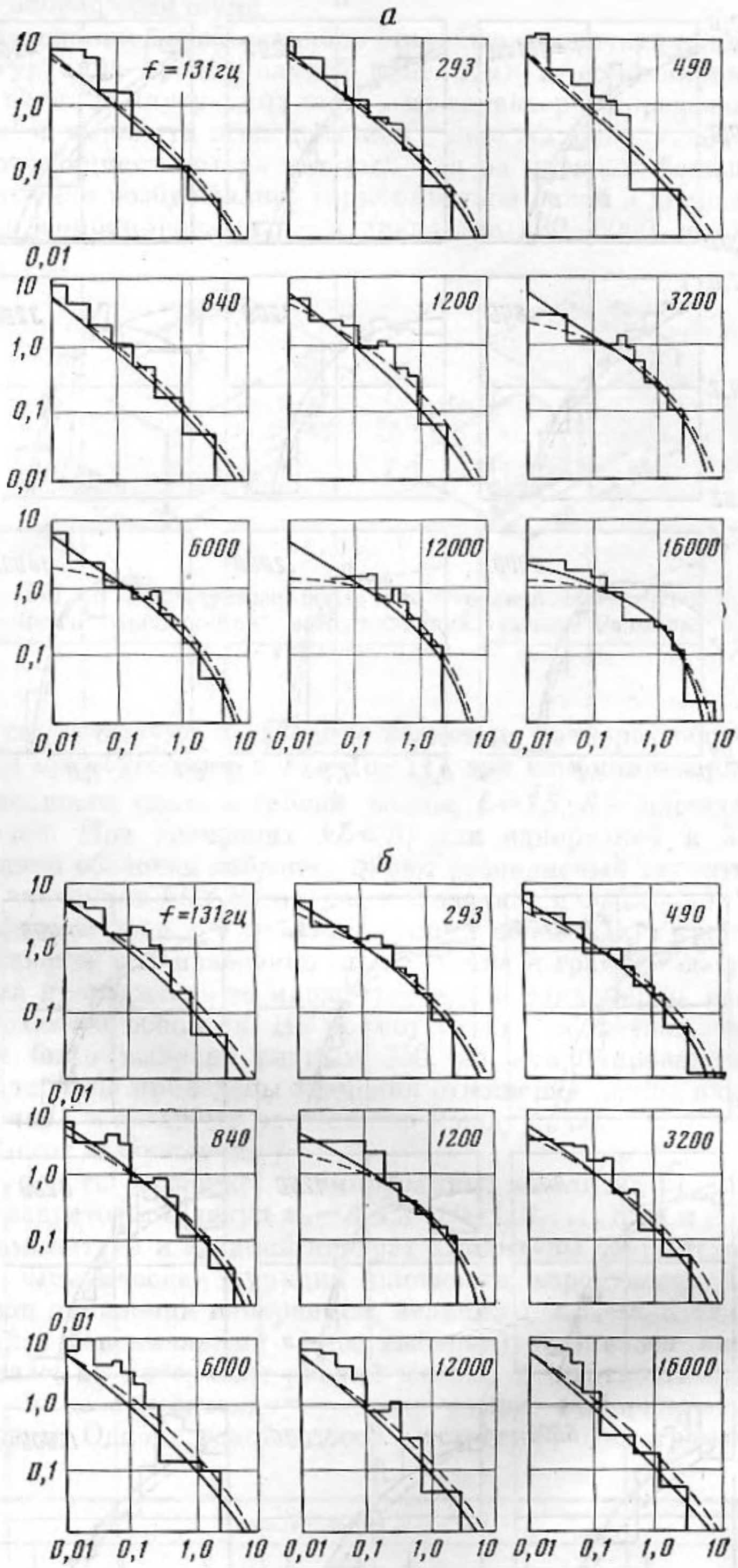
По совокупности (выборке) нормированных амплитуд $x_{1i}=A_i/\bar{A}$ и соответственно квадратов амплитуд $x_{2i}=A_i^2/\bar{A}^2$ ($i=1, 2, \ldots, n$, $\bar{A}$ и $\bar{A}^2$ — средняя по выборке амплитуда и средний квадрат амплитуды соответственно) рассчитывались эмпирические функции плотности вероятности (гистограммы). Диапазон изменения измеряемой величины $x_{\min}-x_{\max}$ ($x_{\min}$ и $x_{\max}$ — минимальный и максимальный члены выборки) разбивался вначале, как обычно принято, на интервалы равной длины, и плотности вероятности рассчитывались по относительному числу членов выборки, попадающих в эти интервалы. Однако такой способ построения гистограмм оказался

| Прямоугольная оболочка | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$, *гц* | 131 | 293 | 490 | 840 | 1200 | 3200 | 6000 | 12000 | 16000 |
| $\lambda/l$ | 9,1 | 6,0 | 5,1 | 3,6 | 3,0 | 1,9 | 1,3 | 0,93 | 0,81 |

| Комбинированная оболочка | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$, *гц* | 130 | 164 | 240 | 490 | 1200 | 6000 |
| $\lambda/l$ | 6,3 | 5,6 | 4,7 | 3,2 | 2,1 | 0,89 |




Фиг. 2. Распределение амплитуд вибрации однородной (*а*) и демпфированной (*б*) прямоугольной оболочки для различных частот возбуждения




Фиг. 3. Распределение квадратов амплитуды вибрации однородной (*а*) и демпфированной (*б*) прямоугольной оболочки

малоинформативным, поскольку распределения были сильно асимметричны: малые значения амплитуд, и в особенности квадратов амплитуд, имели значительно бóльшую вероятность и бóльшая часть членов выборки попадала в один-два интервала, в то время как на все остальные интервалы приходилась лишь незначительная часть членов выборки. В связи с этим в работе был принят другой способ расчета интервальных значений плотности вероятности, свободный от этого недостатка.

Диапазон $x_{\min}-x_{\max}$ разбивался на $n$ интервалов. Длина интервалов $\Delta x_j$ ($j=1, 2, \ldots, m$) выбиралась так, чтобы относительная частота попадания измеренных значений амплитуды $x_{1i}$ или квадрата амплитуды $x_{2i}$ в каждый интервал была одинаковой и равной $q=1/m$. В этом случае плотность вероятности для $j$-го интервала равна $p_j=q/\Delta x_j$.

Гистограммы распределения амплитуд $x_{1i}$ и квадратов амплитуд $x_{2i}$ для различных частот возбуждения $f$ однородной и демпфированной прямоугольной оболочки представлены на фиг. 2, 3 в двойном логарифмическом масштабе ступенчатыми кривыми. Из рассмотрения фигур следует, что распределение амплитуд и квадратов амплитуд на всех частотах однородной и демпфированной оболочки имеет асимметричную форму, причем асимметрия распределения квадратов амплитуд больше асимметрии распределения амплитуд. Следует отметить подобие формы приведенных распределений на различных частотах как однородной, так и демпфированной оболочки, что позволяет использовать для аппроксимации всех полученных распределений единую функцию. В качестве такой аппроксимирующей функции была выбрана функция гамма-распределения:

$$G(x/p, \alpha)=\frac{\alpha^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-\alpha x},$$

где $x=x_1$ или $x=x_2$, $p>0$, $\alpha>0$, $\Gamma(p)$ — гамма-функция от $p$.

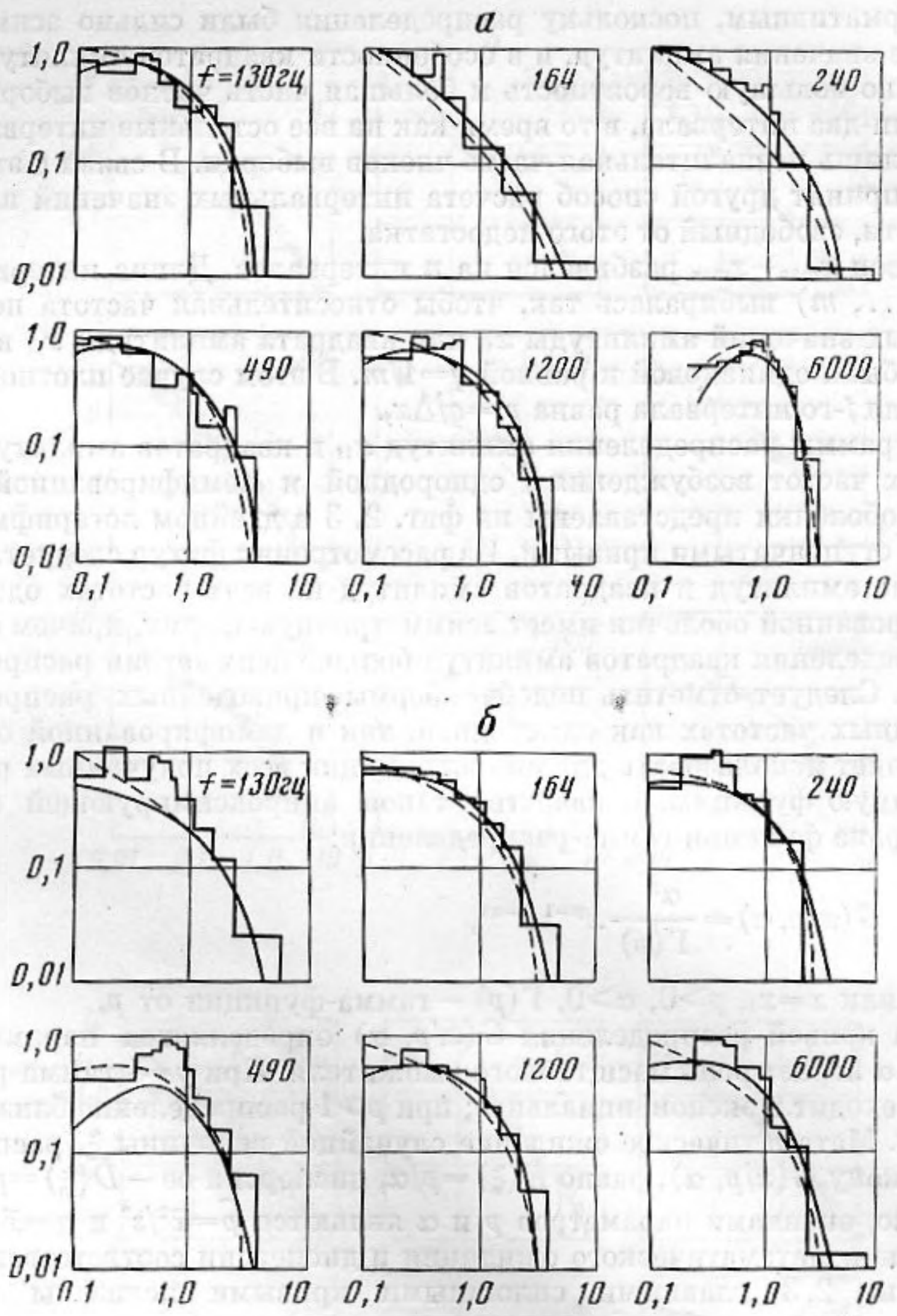
Форма кривой распределения $G(x/p, \alpha)$ определяется параметром $p$; параметр $\alpha$ играет роль масштабного множителя. При $p=1$ гамма-распределение переходит в экспоненциальное; при $p\gg1$ распределение близко к нормальному. Математическое ожидание случайной величины $\xi$, распределенной по закону $G(x/p, \alpha)$, равно $E(\xi)=p/\alpha$, дисперсия ее — $D(\xi)=p/\alpha^2$. Следовательно, оценками параметров $p$ и $\alpha$ являются $\hat{p}=\bar{x}^2/s^2$ и $\hat{\alpha}=\bar{x}/s^2$, где $\bar{x}$ и $s^2$ — оценки математического ожидания и дисперсии соответственно.

На фиг. 2, 3 плавными сплошными кривыми показаны функции $G(x/\hat{p}, \hat{\alpha})$, параметры $\hat{p}$ и $\hat{\alpha}$ которых вычислены по совокупности измеренных амплитуд и, соответственно, квадратов амплитуд вибрации оболочек. Легко видеть, что экспериментальные гистограммы достаточно хорошо аппроксимируются гамма-распределением как для однородной, так и для демпфированной оболочки на всех частотах возбуждения, причем степень совпадения практически одинакова для амплитуд и для квадратов амплитуд вибрации. В связи с этим интересно оценить, в каком соответствии с эмпирическим распределением амплитуды и аппроксимирующим его гамма-распределением $G(x/\hat{p}_1, \hat{\alpha}_1)$ находится распределение амплитуды $W_1(x)$, полученное из условия, что квадрат амплитуды имеет гамма-распределение $G(x/\hat{p}_2, \hat{\alpha}_2)$ с параметрами $\hat{p}_2$ и $\hat{\alpha}_2$, определенными по выборке квадратов амплитуд. Такое распределение амплитуд представляется выражением

$$W_1(x)=G(x^2/\hat{p}_2, \hat{\alpha}_2)\left|\frac{dx^2}{dx}\right|=\frac{2\hat{\alpha}_2^{\hat{p}_2}}{\Gamma(\hat{p}_2)}x^{2\hat{p}_2-1}e^{-\hat{\alpha}_2x^2};$$

оно изображено на фиг. 2 пунктирными кривыми. Заметим, что при $\hat{p}_2=1$ и $\hat{\alpha}_2=1$ распределение $W_1(x)$ является распределением Релея.

Из сравнения сплошных и пунктирных кривых на фиг. 2 видно, что в большинстве представленных случаев распределение $W_1(x)$ мало отличается от $G(x/\hat{p}_1, \hat{\alpha}_1)$; наибольшее расхождение наблюдается при малых



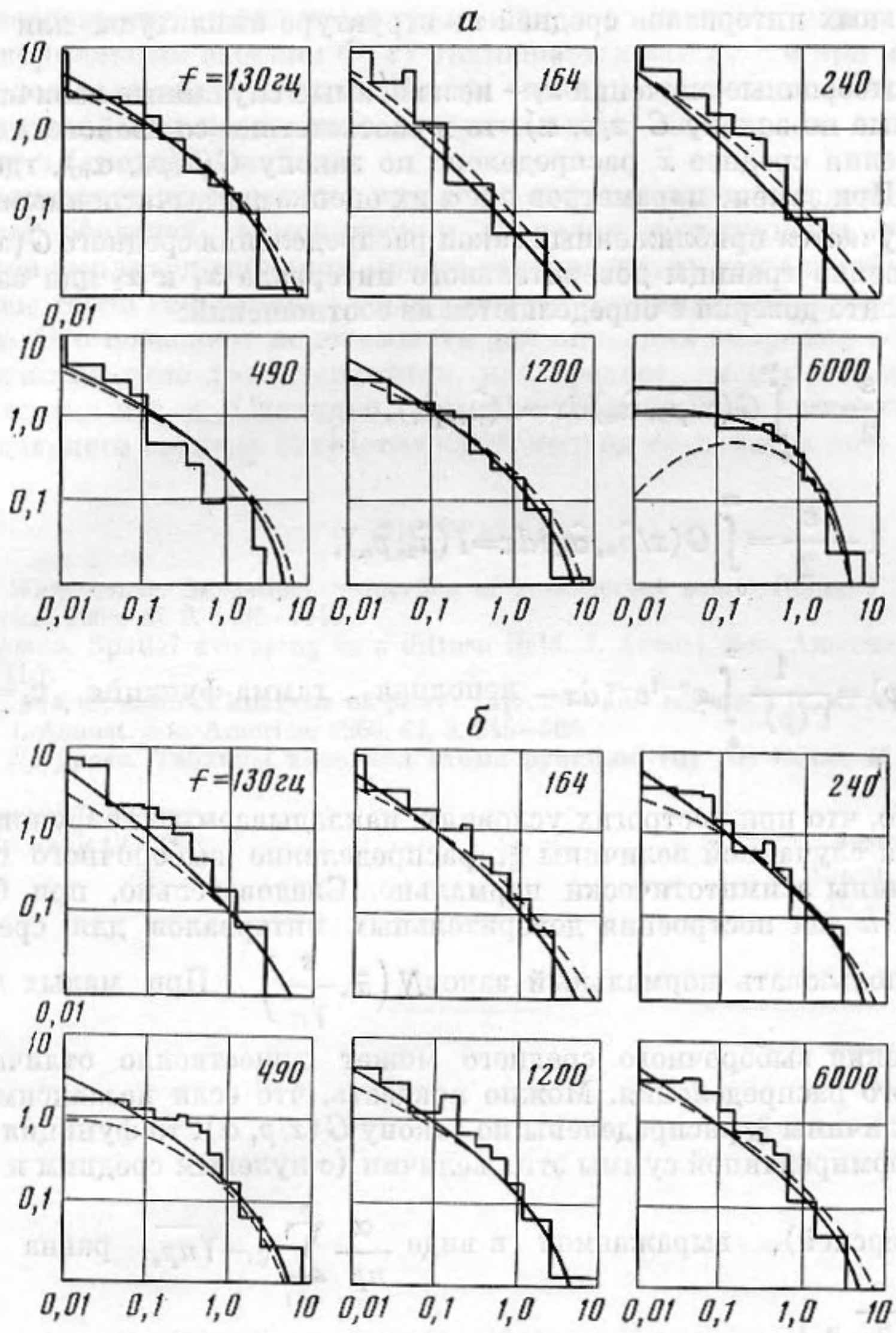

Фиг. 4. Распределение амплитуд вибрации однородной (*а*) и демпфированной (*б*) комбинированной оболочки

значениях амплитуды и на тех частотах, для которых эмпирическое распределение имеет сравнительно меньшую асимметрию, т. е. $f=3200$, 6000 и 12 000 *гц* для однородной и $f=1200$ *гц* для демпфированной оболочки. Можно отметить также несколько лучшее (хотя в небольшой степени и не во всех случаях) соответствие экспериментальным данным гамма-распределения $G(x/\hat{p}_1, \hat{\alpha}_1)$ по сравнению с распределением $W_1(x)$.

Таким же образом, в предположении, что амплитуды распределены по закону $G(x/\hat{p}_1, \hat{\alpha}_1)$, где параметры $\hat{p}_1$ и $\hat{\alpha}_1$ определены по выборке амплитуд, получено распределение квадратов амплитуд, выражаемое функцией

$$W_2(x) = G(\sqrt{x}/\hat{p}_1, \hat{\alpha}_1)\left|\frac{d\sqrt{x}}{dx}\right| = \frac{\hat{\alpha}_1^{\hat{p}_1}}{2\Gamma(\hat{p}_1)}\, x^{\frac{\hat{p}_1}{2}-1} e^{-\hat{\alpha}_1\sqrt{x}},$$

представленной пунктирными кривыми на фиг. 3. Легко видеть, что в случае квадратов амплитуд гамма-распределение и распределение $W_2(x)$ практически совпадают на всех частотах однородной и демпфированной оболочки.




**Фиг. 5. Распределение квадратов амплитуды вибрации однородной (*а*) и демпфированной (*б*) комбинированной оболочки**

Чтобы оценить влияние формы структуры на характер распределения амплитуд и квадратов амплитуд, аналогичные измерения были проведены на оболочках комбинированного типа (фиг. 1, *б*). Эмпирическое распределение и аппроксимирующие функции $G(x/\hat{p}, \hat{\alpha})$, $W_1(x)$ и $W_2(x)$ представлены в тех же обозначениях, что и на фиг. 2 и 3, на фиг. 4, 5. Рассмотрение фигур 4 и 5 показывает, что форма эмпирического распределения, а также степень соответствия ему аппроксимирующих функций для комбинированных оболочек те же, что и для прямоугольных оболочек.

Таким образом, во всем исследованном диапазоне частот независимо от типа оболочки и внутренних потерь эмпирическое распределение амплитуд и квадратов амплитуд имеет характерную форму и удовлетворительно аппроксимируется гамма-распределением, а также распределениями $W_1(x)$ и $W_2(x)$. Поскольку, однако, гамма-распределение изучено в большей степени и, кроме того, обладает рядом свойств, делающих его удобным для оценки характеристик распределения, целесообразно использовать именно его для оценки вибрационного поля оболочки и, в частности, для расчета

доверительных интервалов средней по структуре амплитуды или энергии вибрации.

Если выборочные значения $x_i$ — независимые случайные величины, распределенные по закону $G(x/p, \alpha)$, то в соответствии со свойствами гамма-распределения среднее $\bar{x}$ распределено по закону $G(x/p_n, \alpha_n)$, где $p_n=np$ и $\alpha_n=n\alpha$. При замене параметров $p$ и $\alpha$ их оценками, вычисленными по выборке, получается приближенный закон распределения среднего $G(x/\hat{p}_n, \hat{\alpha}_n)$. Соответственно границы доверительного интервала $x_1$ и $x_2$ для заданного коэффициента доверия $\varepsilon$ определяются из соотношений:

$$\frac{\varepsilon}{2}=\int_0^{x_1} G(x/\hat{p}_n, \hat{\alpha}_n)\,dx=I(\hat{u}_1, \hat{p}_n),$$

$$1-\frac{\varepsilon}{2}=\int_0^{x_2} G(x/\hat{p}_n, \hat{\alpha}_n)\,dx=I(\hat{u}_2, \hat{p}_n),$$

где $I(u, p)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^u x^{p-1}e^{-x}\,dx$ — неполная гамма-функция, $\hat{u}_1=\hat{\alpha}_n x_1$ и $u_2=\hat{\alpha}_n x_2$.

Известно, что при нестрогих условиях, накладываемых на функцию распределения случайной величины $\xi$, распределение выборочного среднего этой величины асимптотически нормально. Следовательно, при больших значениях $n$ для построения доверительных интервалов для среднего $\bar{x}$ можно использовать нормальный закон $N\left(\bar{x}, \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$. При малых $n$ закон распределения выборочного среднего может существенно отличаться от нормального распределения. Можно показать, что если независимые случайные величины $\xi_i$ распределены по закону $G(x/p, \alpha)$, то функция распределения нормированной суммы этих величин (с нулевым средним и единичной дисперсией), выражаемой в виде $\frac{\alpha}{np}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\sqrt{np}$, равна $F(x)=$ $=I(p_n+x\sqrt{p_n}, p_n)$.

Функцию $I(p_n+x\sqrt{p_n}, p_n)$ можно разложить в ряд по полиномам Чебышева — Эрмита [4] $H_k(x)$, где

$$H_k(x)=(-1)^k e^{x^2/2}\frac{d^k}{dx^k}e^{-x^2/2}, \quad k=1, 2, 3\ \ldots;$$

при этом получится выражение

$$I(p_n+x\sqrt{p_n}, p_n)=\Phi(x)-\frac{1}{3\sqrt{p_n}}\Phi^{(3)}(x)+\frac{1}{2p_n}\left\{\frac{1}{2}\Phi^{(4)}(x)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{9}\Phi^{(6)}(x)\right\}-\frac{1}{p_n\sqrt{p_n}}\left\{\frac{1}{5}\Phi^{(5)}(x)+\frac{1}{12}\Phi^{(7)}(x)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{162}\Phi^{(9)}(x)\right\}+R(x, p_n),$$

где

$$\Phi^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{2\pi}}H_{k-1}(x)e^{-x^2/2}, R(x, p_n)=0\left(\frac{1}{p_n^2}\right).$$

Из разложения видно, что с увеличением $p_n$ разность между функцией $F(x)$ и нормальным законом $\Phi(x)$ уменьшается как $p_n^{-1/2}$ и при малых $n$ и $p$ может оказаться значительной. В этом случае использование нормального распределения для построения доверительных интервалов для $\bar{x}$ может привести к заметной ошибке.

В результате проведенных исследований показано, что даже при возбуждении оболочек гармоническим сигналом совокупность амплитуд и квадратов амплитуд вибрации можно рассматривать как случайную выборку из некоторой генеральной совокупности, подчиняющейся гамма-распределению. Это позволяет использовать для описания вибрации оболочек такие статистические характеристики, как среднее, дисперсия, доверительный интервал и т. д. Очевидно, что при расширении частотной полосы возбуждающего сигнала статистический подход становится еще более применим.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *R. V. Waterhouse.* Statistical properties of reverberant sound fields. J. Acoust. Soc. America, 1968, *43*, 6, 1436–1444.
2. *D. Lubman.* Spatial averaging in a diffuse field. J. Acoust. Soc. America, 1969, *46*, 3, 532 (L).
3. *R. H. Lyon.* Statistical analysis of power injection and responce in structures and rooms. J. Acoust. Soc. America, 1969, *45*, 3, 545–565.
4. *В. И. Пагурова.* Таблицы неполной гамма-функции. ВЦ АН СССР, М., 1963.



Акустический институт
Академии наук СССР



Поступила
7 октября 1972 г.
После переработки
16 января 1975 г.