АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXI 1975 Вып. 5

УДК 533.6.013.42

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛОЙ УПРУГОЙ СФЕРЕ

Н. Д. Векслер

На полую пустую упругую сферу набегает плоский звуковой импульс давления конечной длительности с произвольным законом изменения интенсивности. Рассмотрена задача об отыскании поля давления в дифрагированной волне при использовании интегрального преобразования Лапласа по времени и метода разделения переменных по угловой и радиальной координатам. Дано точное решение задачи в пространстве преобразования Лапласа в виде бесконечного ряда. Приведена формула для давления в дифрагированной волне непосредственно за ее фронтом, показывающая, что закон изменения давления в дифрагированной волне совпадает с законом изменения давления в падающей волне.

Пусть на полую пустую упругую сферу набегает плоский импульс давления конечной длительности

$$p_1(t, \xi) = p_0[g(t_1)H(t_1) - g(t_2)H(t_2)], \tag{1.1}$$

$$t_1 = t - \xi,\ t_2 = t_1 - t_0,\ t = \frac{cT}{R_1},\ \xi = \frac{Z}{R_1} \tag{1.2}$$

$$r = \frac{R}{R_1},\ t_0 = \frac{cT_0}{R_1},\ r_2 = \frac{R_2}{R_1},$$

причем p_1 — давление в падающей волне, p_0 — постоянная, имеющая размерность давления, g — произвольная функция, определяющая закон изменения давления в падающем импульсе, H — единичная функция Хевисайда, T — время, Z — осевая координата вдоль направления распространения падающего импульса, R — радиальная координата, θ — полярный угол, c — скорость звука в среде, T_0 — длительность падающего импульса, R_1, R_2 — наружный и внутренний радиусы полой сферы.

Время отсчитывается от момента соприкосновения падающего импульса с наружной поверхностью сферы, происходящего в точке с координатами $r=1$, $\theta=0$.

Ставится задача об отыскании давления в дифрагированной волне p_2, вызванного p_1 и удовлетворяющего уравнению

$$\left(\nabla_0^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p_2 = 0; \quad \nabla_0^2 = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right] \tag{1.3}$$

в области

$$t \geqslant 0,\ r \geqslant 1,\ \pi \geqslant \theta \geqslant 0 \tag{1.4}$$

при следующих условиях:

1. Начальные условия

$$\text{при } t=0 \quad p_2 = \frac{\partial p_2}{\partial t} = \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{1.5}$$

2. Краевые условия

при $r=1$ (на наружной поверхности сферы)

(1.6) $$p_1+p_2+\sigma_{rr}=0,$$

(1.7) $$\sigma_{r\theta}=0,$$

(1.8) $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(w_1+w_2-u_r)=0$$

при $r=r_2$ (на внутренней поверхности сферы)

(1.9) $$\sigma_{rr}=0,$$

(1.10) $$\sigma_{r\theta}=0.$$

3. Условие затухания:

(1.11) $$\text{при } r\to\infty, \quad p_2\to 0.$$

4. Условие ограниченности решения: давление p_2 ограничено в области, где оно определено. В формулах (1.5) — (1.10) использованы обозначения

(1.12) $$\varphi=\frac{\Phi}{R_1^2}, \quad \psi=\frac{\Psi}{R_1^2}, \quad u_r=\frac{W}{R_1}, \quad w_j=\frac{W_j}{R_1} \quad (j=1,2),$$

где Φ — скалярный потенциал, Ψ — единственная ненулевая компонента векторного потенциала линейной теории упругости, σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$ — нормальная и касательная компоненты тензора напряжения, W — радикальная компонента вектора перемещения точки упругой сферы, W_j — перемещение в среде, вызываемое давлением p_j $(j=1, 2)$.

Функции φ и ψ удовлетворяют уравнениям

(1.13) $$\left(\nabla_0^2-\frac{1}{\beta_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=0; \quad \beta_1=\frac{c_1}{c},$$

(1.14) $$\left(\nabla_0^2-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}-\frac{1}{\beta_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi=0; \quad \beta_2=\frac{c_2}{c}.$$

Компоненты тензора напряжения σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$ и вектора перемещения связаны с φ и ψ зависимостями

(1.15) $$\sigma_{rr}=\frac{E}{1+\nu}\left[\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\nabla_0^2+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\varphi+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}\left(\frac{\psi\sin\theta}{r}\right)\right],$$

(1.16) $$\sigma_{r\theta}=\frac{E}{2(1+\nu)r}\left\{2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\right)\varphi+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\psi\sin\theta)\right]+\frac{2}{r}\psi-r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right\},$$

(1.17) $$u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\operatorname{ctg}\theta\right)\psi,$$

(1.18) $$u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\psi.$$

В формулах (1.13) — (1.18) используются стандартные обозначения: c_1, c_2 — скорости распространения фронтов волн в линейной теории упругости, E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Входящие в формулу (1.8) ускорения $\frac{\partial^2}{\partial t^2}w_j$ $(j=1, 2)$ связаны с дав-

лениями зависимостями

$$(1.19)\qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_j = -\frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial}{\partial r} p_j \quad (j=1, 2),$$

где ρ — плотность среды.

Ниже показано построение решения сформулированной задачи при падающей волне, определенной первым членом в формуле (1.1). Второй член в этой формуле вызывает давление p_2, которое находится аналогично. Полное давление определяется путем суперпозиции, поскольку задача линейна.

Применим к выражению (1.1), уравнениям (1,3), (1.13), (1.14), условиям (1.5) – (1.11) и соотношениям (1.15) — (1.19) интегральное преобразование Лапласа по времени t. Изображение падающей волны (индекс L, параметр преобразования — s) имеет вид

$$(2.1)\qquad p_1^L(s, \xi) = p_0 g^L(s) e^{-s\xi}.$$

Используя соотношение

$$(2.2)\qquad \xi = 1 - r\cos\theta$$

и разложение Сонина

$$(2.3)\qquad e^{sr\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} i_m(sr)\,(2m+1) P_m(\cos\theta),$$

получаем из формулы (2.1)

$$(2.4)\qquad p_1^L(r, \theta, s) = p_0 g^L(s) e^{-s} \sum_{m=0}^{\infty} i_m(sr)\,(2m+1) P_m(\cos\theta).$$

Применив метод разделения переменных, мы получаем следующие изображения решений уравнений (1.13), (1.14), (1.3)

$$(2.5)\qquad \varphi^L = g^L(s) e^{-s} \sum_{m=0}^{\infty} [a_m i_m(s_1 r) + b_m k_m(s_1 r)]\,(2m+1) P_m(\cos\theta);$$

$$s_1 = \frac{s}{\beta_1}$$

$$(2.6)\qquad \psi^L = g^L(s) e^{-s} \sum_{m=0}^{\infty} [c_m i_m(s_2 r) + d_m k_m(s_2 r)]\,(2m+1) \frac{\partial P_m(\cos\theta)}{\partial\theta}.$$

$$s_2 = \frac{s}{\beta_2}$$

$$(2.7)\qquad p_2^L = p_0 g^L(s) e^{-s} \sum_{m=0}^{\infty} e_m k_m(sr)\,(2m+1) P_m(\cos\theta),$$

где i_m, k_m — сферические функции Бесселя мнимого аргумента, P_m — полином Лежандра и a_m, b_m, c_m, d_m, e_m — неизвестные коэффициенты. Полученные изображения решений ограничены, а p_2^L, кроме того, удовлетворяет изображению условия затухания.

Неизвестные коэффициенты найдем, подставляя изображения решений в изображения краевых условий, что приводит к следующей алгебраиче-

ской системе уравнений для каждого члена ряда ($m=0, 1, 2, \ldots$)

$$
\begin{aligned}
&a_{11}a_m+a_{12}b_m+a_{13}c_m+a_{14}d_m+a_{15}e_m=a_{10}\\
&a_{21}a_m+a_{22}b_m+a_{23}c_m+a_{24}d_m=0\\
&a_{31}a_m+a_{32}b_m+a_{33}c_m+a_{34}d_m+a_{35}e_m=a_{30}\\
&a_{41}a_m+a_{42}b_m+a_{43}c_m+a_{44}d_m=0\\
&a_{51}a_m+a_{52}b_m+a_{53}c_m+a_{54}d_m=0
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&a_{11}=-s_1^2\left[\frac{\nu}{1-2\nu}i_m(s_1)+i_m''(s_1)\right],\quad a_{13}=m(m+1)\left[i_m(s_2)-s_2i_m'(s_2)\right],\\
&a_{21}=2\left[i_m(s_1)-s_1i_m'(s_1)\right],\quad a_{23}=-\left[(m^2+m-2)i_m(s_2)+s_2^2i_m''(s_2)\right],\\
&a_{31}=s_1i_m'(s_1),\qquad a_{33}=m(m+1)i_m(s_2),\\
&a_{41}=-(s_1r_2)^2\left[\frac{\nu}{1-2\nu}i_m(s_1r_2)+i_m''(s_1r_2)\right],\\
&a_{43}=m(m+1)\left[i_m(s_2r_2)-s_2r_2i_m'(s_2r_2)\right],\\
&a_{51}=2\left[i_m(s_1r_2)-s_1r_2i_m'(s_1r_2)\right],\\
&a_{53}=-\left[(m^2+m-2)i_m(s_2r_2)+(s_2r_2)^2i_m''(s_2r_2)\right],\\
&a_{15}=\frac{p_0}{E}(1+\nu)k_m(s),\qquad a_{10}=-\frac{p_0}{E}(1+\nu)i_m(s),\\
&a_{35}=-\frac{p_0}{s\rho c^2}k_m'(s),\qquad a_{30}=\frac{p_0}{s\rho c^2}i_m'(s).
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

В формулах (2.9) штрих означает производную по аргументу. Коэффициенты a_{j2}, a_{j4} ($j=1, 2, 3, 4, 5$) получаются из коэффициентов a_{j1}, a_{j3} заменой в последних i_m на k_m.

Используя формулу Крамера, получаем

$$
e_m=\frac{D_1}{D_2},
\tag{2.10}
$$

где

$$
D_1=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{10}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{30}\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0\\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0
\end{vmatrix},\quad
D_2=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0\\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0
\end{vmatrix}.
\tag{2.11}
$$

Поскольку обращение выражения (2.7) с учетом (2.10) в общем виде затруднительно, проведем асимптотический анализ изображения при $s\to\infty$.

Раскрыв детерминанты (2.11), имеем

$$
D_1=-a_{10}D_3+a_{30}D_4;\quad D_2=-a_{15}D_3+a_{35}D_4,
\tag{3.1}
$$

где

$$
D_3=\begin{vmatrix}
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54}
\end{vmatrix},\quad
D_4=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54}
\end{vmatrix}.
\tag{3.2}
$$

В свою очередь D_3 и D_4 представим в виде

$$
\begin{aligned}
&D_3=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}+a_{34}A_{34},\\
&D_4=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Здесь A_{ij} — адъюнкты элементов детерминантов a_{ij}.

Подставляя выражения (3.1) — (3.3) в формулу (2.10), получим

$$(3.4)\qquad e_m=\frac{a_{30}}{a_{35}}\left[1-\frac{\dfrac{a_{15}}{a_{35}}-\dfrac{a_{10}}{a_{30}}}{\dfrac{a_{15}}{a_{35}}\left(1-\dfrac{a_{35}}{a_{15}}\dfrac{D_4}{D_3}\right)}\right].$$

Отношение D_4/D_3 напишем так:

$$(3.5)\qquad \frac{D_4}{D_3}=\frac{a_{11}}{a_{31}}\eta,\qquad \eta=\frac{1+x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3}{1+y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3},$$

где

$$(3.6)\qquad x_1=\frac{a_{12}}{a_{11}},\quad x_2=\frac{a_{13}}{a_{11}},\quad x_3=\frac{a_{14}}{a_{11}},\quad y_1=\frac{a_{32}}{a_{31}},$$

$$y_2=\frac{a_{33}}{a_{31}},\quad y_3=\frac{a_{34}}{a_{31}},$$

$$z_1=\frac{A_{32}}{A_{31}},\quad z_2=\frac{A_{33}}{A_{31}},\quad z_3=\frac{A_{34}}{A_{31}}.$$

Используя формулы

$$i_m'(z)=i_{m+1}(z)+\frac{m}{z}i_m(z),$$

$$i_m''(z)=i_{m+2}(z)+\frac{m+2}{z}i_{m+1}(z)+\frac{m(m-1)}{z^2}i_m(z),$$

$$(3.7)\qquad k_m'(z)=-k_{m+1}(z)+\frac{m}{z}k_m(z),$$

$$k_m''(z)=k_{m+2}(z)-\frac{m+2}{z}k_{m+1}(z)+\frac{m(m-1)}{z^2}k_m(z),$$

определитель Вронского

$$(3.8)\qquad i_m(z)k_m'(z)-i_m'(z)k_m(z)=-\frac{1}{z^2}$$

и асимптотические представления при $z\to\infty$

$$(3.9)\qquad i_m(z)\sim\frac{e^z}{2z},\qquad k_m(z)\sim\frac{e^{-z}}{z},$$

нетрудно получить при $s\to\infty$

$$(3.10)\qquad \eta\sim1,\qquad e_m\sim-\frac{i_m'(s)}{k_m'(s)}\left(1-\frac{2}{1+\zeta}\right),\qquad \zeta=\frac{\rho_1c_1}{\rho c},$$

где ξ — относительное волновое сопротивление, а ρ_1 — плотность материала сферы.

Подставляя выражения (3.10) в формулу (2.7) и используя формулы (3.7) и (3.9), имеем при $s\to\infty$

$$(3.11)\qquad \underset{s\to\infty}{P_2^L}\sim\frac{p_0}{r}\frac{\zeta-1}{\zeta+1}g^L(s)e^{-sr}\sum_{m=0}^{\infty}i_m'(s)(2m+1)P_m(\cos\theta).$$

Заметим, что если поставить задачу о дифракции плоской волны на сплошной упругой сфере, то, проведя соответствующие выкладки, нетрудно убедиться в том, что в этом случае для e_m вместо формулы (3.4) полу-

чится формула

$$(3.12)\qquad \bar{e}_m=\frac{a_{30}}{a_{35}}\left[1-\frac{\dfrac{a_{15}}{a_{35}}-\dfrac{a_{10}}{a_{30}}}{\dfrac{a_{15}}{a_{35}}\left(1-\dfrac{a_{11}}{a_{31}}\dfrac{a_{35}}{a_{15}}\bar{\eta}\right)}\right];\qquad \bar{\eta}=\frac{1-\dfrac{a_{13}a_{21}}{a_{11}a_{23}}}{1-\dfrac{a_{21}a_{33}}{a_{23}a_{31}}}.$$

При $s\to\infty$ величина $\bar{\eta}\to 1$, а $e_m\to e_m$.

Для выполнения обратного преобразования воспользуемся разложением Сонина (2.3). Дифференцируя левую и правую части этого равенства по r, а затем фиксируя $r=1$, находим

$$(4.1)\qquad \sum_{m=0}^{\infty} i_m'(s)\,(2m+1)P_m(\cos\theta)=\cos\theta\, e^{s\cos\theta}.$$

Подставив это выражение в формулу (3.11), получаем

$$(4.2)\qquad \underset{s\to\infty}{p_2^L}\sim\frac{p_0}{r}\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\cos\theta\, g^L(s)\,e^{-s(r\cos\theta)}.$$

Обращение этого выражения тотчас дает

$$(4.3)\qquad \underset{\tau\to 0}{p_2}\sim\frac{p_0}{r}\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\cos\theta g(\tau)H(\tau),$$

где

$$(4.4)\qquad \tau=[t-(1-\cos\theta)]-(r-1)\equiv t-r+\cos\theta.$$

Обсудим полученные результаты. Формула (4.3) определяет давление в дифрагированной волне непосредственно за ее фронтом. В ней явным образом выражена зависимость давления в дифрагированной волне от радиальной координаты r, полярного угла θ, времени t и относительного волнового сопротивления ζ. Мы видим, что закон изменения давления в дифрагированной волне $g(\tau)$ такой же, как и в падающей; амплитуда давления убывает пропорционально радиусу r; по углу θ амплитуда давления изменяется как $\cos\theta$; амплитуда давления зависит от относительного волнового сопротивления ζ как $(\zeta-1)/(\zeta+1)$.

Формула (4.3) соответствует двум классическим результатам: принципу Гюйгенса о распространении фронтов волн и формулам Френеля для коэффициентов отражения и прохождения звука на границе двух плоских сред.

При достаточно малой толщине полую упругую сферу часто описывают согласно линейной теории тонких упругих оболочек. Используя модель линейной теории оболочек типа Тимошенко, вместо формулы (4.3) получим

$$(5.1)\qquad \underset{\tau\to 0}{p_2}\sim\frac{p_0}{r}\cos\theta\left[g(\tau)-\alpha\int_0^{\tau} g(\tau)\,d\tau\right]H(\tau),$$

где

$$(5.2)\qquad \alpha=\frac{\beta}{1+\varepsilon^2},\quad \beta=\frac{R_1\rho_1}{h\rho},\quad 2h=R_1-R_2,\quad \varepsilon^2=\frac{h^2}{3R_1^2}.$$

В формуле (5.1) отсутствует сомножитель $(\zeta-1)/(\zeta+1)$, а следовательно, не учитывается тот факт, что падающая волна сразу проникает в глубь объекта. Такая же погрешность имеет место и при моделировании полой упругой сферы по классической или безмоментной теориям оболочек. Причина этой погрешности состоит в том, что теория оболочек в принципе не приспособлена к описанию подобного рода эффектов.

В настоящей статье изучалась дифракция звуковой волны на упругом объекте сферической формы. По-видимому, для гладких замкнутых упругих объектов давление в дифракционной волне непосредственно за ее фронтом также описывается формулами типа (4.3).

Так, при нормальном падении плоской звуковой волны на полый пустой круговой цилиндр давление в дифракционной волне непосредственно за ее фронтом определяется формулой

$$p_2 \underset{\tau\to 0}{\sim} \frac{p_0}{\sqrt{r}} \frac{\zeta-1}{\zeta+1} \cos\theta g(\tau) H(\tau). \tag{5.3}$$

Институт кибернетики
Академии наук ЭССР

Поступила
4 февраля 1974 г.