АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXI 1975 Вып. 6

УДК 534.28

# ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ АКТИВНОГО ГАШЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ ПО МЕТОДУ МАЛЮЖИНЦА

*М. П. Завадская, А. В. Попов, Б. Л. Эгельский*

Дано приближенное решение задачи активного гашения поля, рассеянного непрозрачным препятствием. Рассматривается двумерная задача рассеяния на круговом цилиндре. Компенсирующая система представляет собой решетку линейных излучателей, расположенных на поверхности большего радиуса, амплитуды которых пропорциональны значениям полного поля и его нормальной производной на поверхности цилиндра. Коэффициенты связи не зависят от вида падающей волны и граничного условия и являются аппроксимацией формул Малюжинца, дающих точное решение задачи компенсации. Получено аналитическое выражение для результирующего звукового поля с учетом обратной связи между излучателями и приемниками. Показано, что при достаточно большом числе излучателей обратная связь может быть устранена, а рассеянное поле сделано сколь угодно малым. Проведены численные расчеты для случая плоской падающей волны, рассеивающейся на жестком цилиндре.

В работе авторов [1] рассматривались некоторые вопросы, связанные с дискретной аппроксимацией точного решения задачи активной компенсации звуковых полей, данного Малюжинцем [2, 3]. Была получена оценка числа излучателей, необходимого для достижения удовлетворительной компенсации.

Не исследованными в работе [1] остались характерные для дискретных систем эффекты акустической обратной связи между компенсирующими излучателями и управляющими их работой приемниками. В случае точного решения, предполагающего непрерывное распределение излучателей на замкнутой поверхности, эта проблема не возникала, так как компенсирующее поле строго равнялось нулю на приемной поверхности. Для случая дискретной системы компенсирующее поле неизбежно отлично от нуля на приемной поверхности. Возникающая обратная связь может привести к значительному увеличению ошибки компенсации, а при определенных условиях даже к самовозбуждению системы. Ниже показывается, что при надлежащей обработке показаний приемников обратная связь может быть устранена. Предлагаемый способ заключается в следующем. Полное поле, измеряемое на приемной поверхности, разлагается в ряд Фурье, и для управления излучателями используется лишь конечное число коэффициентов Фурье полного поля и его нормальной производной. При этом, если число излучателей достаточно велико, можно выбрать коэффициенты связи так, чтобы компенсирующее поле не давало вклада в управляющие гармоники. Как и в точном решении [2], цепь обратной связи оказывается тогда разомкнутой и уровень компенсации лимитируется только погрешностями дискретной аппроксимации [1].

Рассмотрим конкретный пример компенсации рассеянного поля кругового цилиндра, для которого нетрудно построить точное решение задачи дифракции в присутствии активной компенсирующей системы. Пусть на

цилиндр радиуса $a$ с однородным граничным условием, не зависящим от $\varphi$, падает звуковая волна $u_0(r, \varphi)$, разлагающаяся при $r<r_0$ $(r_0>a)$ в ряд Фурье

$$(1) \qquad u_0(r, \varphi)=\sum_{-\infty}^{\infty} C_m J_m(kr)\, e^{im\varphi}.$$

При дифракции волны $u_0$ на цилиндре возникает рассеянная волна вида

$$(2) \qquad u_s(r, \varphi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m K_m H_m(kr)\, e^{im\varphi}.$$

Здесь $(r, \varphi)$ — полярные координаты, $H_m(z)$ — функция Ханкеля I рода, $J_m(z)$ — функция Бесселя. Парциальные коэффициенты отражения $K_m$ находятся из граничного условия. Мы покажем, что рассеянное поле (2) может быть скомпенсировано с любой степенью точности с помощью дискретной системы излучателей, амплитуды которых являются линейными функционалами поля, измеряемого на поверхности цилиндра, и дадим оценку числа излучателей и приемников, необходимых для обеспечения заданного уровня компенсации.

Пусть измерения на поверхности цилиндра $r=a$ позволяют найти первые $2M+1$ коэффициентов Фурье полного звукового поля, создаваемого падающей волной и системой излучателей, и его нормальной производной

$$(3) \qquad A_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\psi} u(a, \psi)\, d\psi,$$

$$A_m'=\frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} e^{-im\psi}\frac{\partial u}{\partial a}(a, \psi)\, d\psi,$$

$$-M\leqslant m\leqslant M.$$

Пусть на цилиндрической поверхности радиуса $b\,(a<b<r_0)$ в точках $\left(b, \frac{2\pi}{N} n\right)$ расположены попарно излучатели дипольного и монопольного типов, амплитуды которых $W_n$ и $W_n'$ линейно зависят от величин $A_m$ и $A_m'$. При дифракции волны (1) на системе, состоящей из цилиндрического препятствия и решетки излучателей, в дополнение к рассеянному полю возникает поле дискретной системы излучателей

$$(4) \qquad v(r, \varphi)=\frac{i}{4}\sum_{n=1}^{N}\left[W_n\frac{\partial}{\partial b}H_0(kR_n)-W_n' H_0(kR_n)\right],$$

$$R_n=\sqrt{r^2-2rb\cos\left(\varphi-\frac{2\pi}{N}n\right)+b^2},$$

которое в свою очередь будет рассеиваться на цилиндре, порождая волну $v_s(r, \varphi)$. Наша задача — выбрать такую связь между амплитудами $W_n$ и $W_n'$ и коэффициентами $A_m$, $A_m'$, чтобы для любой волны вида (1) поле $v(r, \varphi)$ было при $r>b$ близко к величине $-u_s$, а при $r<b$ — к нулю. Тогда полное поле

$$(5) \qquad u(r, \varphi)=u_0+u_s+v+v_s$$

при $r>b$ будет близко к падающей волне $u_0$ (величина вторичного рассеянного поля $v_s$ будет, очевидно, мала в силу малости $v$ при $r<b$). Зададим

амплитуды $W_n$, $W_n'$ в виде тригонометрических сумм

$$W_n=\frac{2\pi b}{N}\sum_{m=-M}^{M}B_m e^{i\frac{2\pi}{N}mn}, \tag{6}$$

$$W_n'=\frac{2\pi kb}{N}\sum_{m=-M}^{M}B_m' e^{i\frac{2\pi}{N}mn},$$

коэффициенты которых выбираем пропорциональными коэффициентам Фурье поля на поверхности $r=a$

$$B_m=q_m^{00}A_m+q_m^{01}A_m', \tag{7}$$

$$B_m'=q_m^{10}A_m+q_m^{11}A_m'.$$

Подставляя выражения (6) в формулу (4) и разлагая полученное выражение в ряд Фурье, получим при $r<b$

$$v(r,\varphi)=\frac{i\pi kb}{2}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-M}^{M}[B_m H'_{m+Ns}(kb)- \tag{8}$$

$$-B_m' H_{m+Ns}(kb)]J_{m+Ns}(kr)e^{i(m+Ns)\varphi}$$

и при $r>b$

(9)

$$v(r,\varphi)=\frac{i\pi kb}{2}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-M}^{M}[B_m J'_{m+Ns}(kb)-B_m' J_{m+Ns}(kb)]H_{m+Ns}(kr)e^{i(m+Ns)\varphi}.$$

Поскольку сумма $u_0+u_s$ удовлетворяет граничным условиям на поверхности цилиндра $r=a$, этому же условию должна удовлетворять сумма $v+v_s$. Это приводит к следующему выражению для вторично рассеянной волны:

$$v_s(r,\varphi)=\frac{i\pi kb}{2}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-M}^{M}K_{m+Ns}[B_m H'_{m+Ns}(kb)- \tag{10}$$

$$-B_m' H_{m+Ns}(kb)]H_{m+Ns}(kr)e^{i(m+Ns)\varphi}.$$

Подставляя выражения (1), (2), (8)–(10) в формулу (5), убеждаемся, что функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца, граничному условию и условию излучения и, следовательно, является строгим решением задачи дифракции на цилиндре в присутствии активной решетки. Однако, поскольку в (8)–(10) входят неизвестные пока коэффициенты $A_m$, $A_m'$, эти последние должны быть определены из уравнений, получающихся подстановкой в выражение для полного звукового поля (5) и его нормальной производной в равенства (3). Эти уравнения имеют вид линейной системы,

$$\frac{A_m}{J_m(ka)+K_m H_m(ka)}=C_m+\frac{i\pi kb}{2}\sum_{s=-\left[\frac{M-m}{N}\right]}^{\left[\frac{M+m}{N}\right]}\{[q_{m-Ns}^{00}H_m'(kb)- \tag{11}$$

$$-q_{m-Ns}^{10}H_m(kb)]A_{m-Ns}+[q_{m-Ns}^{01}H_m'(kb)-q_{m-Ns}^{11}H_m(kb)]A'_{m-Ns}\},$$

$$\frac{A_m'}{J_m'(ka)+K_mH_m'(ka)}=C_m+\frac{i\pi kb}{2}\sum_{s=-\left[\frac{M-m}{N}\right]}^{\left[\frac{M+m}{N}\right]}\{[q_{m-Ns}^{00}H_m'(kb)-$$

$$-q_{m-Ns}^{10}H_m(kb)]A_{m-Ns}+[q_{m-Ns}^{01}H_m'(kb)-q_{m-Ns}^{11}H_m(kb)]A_{m-Ns}'\},$$

$$|m|\leqslant M$$

которая описывает акустическую обратную связь между излучателями и приемниками. В частности, при обращении в нуль определителя системы существует ненулевое решение однородных уравнений, что соответствует резонансному возбуждению компенсирующей системы. Не исследуя решение уравнений (11) в общем случае, заметим, что при условиях $N>2M$

$$q_m^{00}H_m'(kb)-q_m^{10}H_m(kb)=0,\qquad q_m^{01}H_m'(kb)-q_m^{11}H_m(kb)=0 \tag{12}$$

суммы в правых частях исчезают и решение приобретает простой вид

$$A_m=C_m[J_m(ka)+K_mH_m(ka)],\qquad A_m'=C_m[J_m'(ka)+K_mH_m'(ka)]. \tag{13}$$

Физически это означает, что поле, создаваемое решеткой излучателей, не вносит вклада в первые $(2M+1)$ коэффициентов $A_m$, $A_m'$, которые определяются лишь падающей и рассеянной волнами. Таким образом, при выполнении условий (12) обратная связь исчезает и гарантируется отсутствие самовозбуждения. Формулы (13) полностью определяют решение задачи дифракции для случая, когда коэффициенты связи $q_m^{\alpha\beta}$ подчиняются уравнениям (12). Остающийся произвол в выборе $q_m^{\alpha\beta}$ может быть использован для обеспечения компенсации первых $2M+1$ гармоник рассеянного поля $u_s$ при $r>b$. Это требование приводит к соотношению (см. формулы (2), (9)

$$\frac{i\pi kb}{2}[B_mJ_m'(kb)-B_m'J_m(kb)]=-C_mK_m, \tag{14}$$

откуда

$$J_m(ka)[q_m^{00}J_m'(kb)-q_m^{10}J_m(kb)]+$$
$$+J_m'(ka)[q_m^{11}J_m'(kb)-q_m^{11}J_m(kb)]=0, \tag{15}$$
$$H_m(ka)[q_m^{00}J_m'(kb)-q_m^{10}J_m(kb)]+$$
$$+H_m'(ka)[q_m^{01}J_m'(kb)-q_m^{11}J_m(kb)]=-\frac{2}{i\pi kb}.$$

Из уравнений (12) и (15) однозначно определяются коэффициенты связи $q_m^{\alpha\beta}$

$$q_m^{00}=\frac{i\pi ka}{2}J_m'(ka)H_m(kb),\quad q_m^{01}=-\frac{i\pi ka}{2}J_m(ka)H_m(kb), \tag{16}$$
$$q_m^{10}=\frac{i\pi ka}{2}J_m'(ka)H_m'(kb),\quad q_m^{11}=-\frac{i\pi ka}{2}J_m(ka)H_m'(kb).$$

Теперь мы можем написать окончательное выражение для полного звукового поля (5). Представим его в виде $u=u_0+u_s$, тогда «остаточное» рассеянное поле

$$\tilde{u}_s=u_s+v+v_s \tag{17}$$

будет иметь вид

$$(18)\qquad \tilde{u}_s(r,\varphi)=\sum_{|m|>M} C_m K_m H_m(kr)e^{im\varphi}-$$

$$-\frac{i\pi kb}{2}\sum_{s=-\infty}^{\infty}{}^{0}\sum_{m=-M}^{M} C_m K_m\{[H_m(kb)J'_{m+Ns}(kb)-$$

$$-H_m'(kb)J_{m+Ns}(kb)]+K_{m+Ns}[H_m(kb)H'_{m+Ns}(kb)-$$
$$-H_m'(kb)H_{m+Ns}(kb)]\}H_{m+Ns}(kr)e^{i(m+Ns)\varphi}.$$

Символ (0) при знаке суммы означает, что в ней отсутствует член $s=0$. Это выражение имеет простой физический смысл. Из него видно, что рассматриваемая компенсирующая система полностью подавляет первые $2M+1$ гармоник рассеянной волны $u_s$. Первое слагаемое в (13) представляет «остаток» рассеянной волны, а второе — паразитное поле, обусловленное дискретностью системы излучателей и не содержащее гармоник с номерами $|m|<M$. Можно показать, что при $M\to\infty$, $N>2M$ величина $\tilde{u}_s$ быстро стремится к нулю, начиная с $M\sim ka$.

Рассмотрим конкретный пример дифракции плоской волны на жестком цилиндре. В этом случае

$$(19)\qquad C_m=e^{-i\frac{\pi}{2}m},\quad A_m'=0,\quad K_m=-\frac{J_m'(ka)}{H_m'(ka)},$$

и в дальней зоне выражение (18) принимает вид

$$(20)\qquad \tilde{u}_s(r,\varphi)\sim e^{i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,\tilde{F}(\varphi),$$

где

$$(21)\qquad \tilde{F}(\varphi)=-\sum_{|m|<M}\frac{J_m'(ka)}{H_m'(ka)}e^{im(\varphi-\pi)}+\frac{i\pi kb}{2}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-M}^{M}\frac{J_m'(ka)}{H_m'(ka)}\times$$

$$\times\Big\{[H_m(kb)J_{m+Ns}(kb)-H_m'(kb)J_{m+Ns}(kb)]-\frac{J'_{m+Ns}(ka)}{H'_{m+Ns}(ka)}\times$$

$$\times[H_m(kb)H'_{m+Ns}(kb)-H_m'(kb)H_{m+Ns}(kb)]\Big\}e^{i(m+Ns)(\varphi-\pi)+\frac{i\pi}{2}Ns}$$

Характеристика направленности волны $u_s$ определяется известным выражением [4]

$$(22)\qquad F(\varphi)=-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{J_m'(ka)}{H_m'(ka)}e^{im(\varphi-\pi)}$$

Соответствующие коэффициенты рассеяния $\tilde{\sigma}$ и $\sigma$ находятся из выражений (21) и (22) по формуле [4]

$$\sigma=\frac{1}{\pi ka}\int_0^{2\pi}|F(\varphi)|^2d\varphi.$$

Ряды (21), (22) позволяют в достаточно широком диапазоне значений $ka$ и $kb$ вычислить на ЭВМ коэффициенты $\sigma$ и $\tilde{\sigma}$ при заданных $M$ и $N$ и найти уровень компенсации рассеянного поля

$$\varepsilon=\tilde{\sigma}/\sigma.$$

В таблице представлены некоторые результаты численного решения обратной задачи — определения минимального числа подавляемых гармоник и количества излучателей, необходимого для достижения заданного уровня компенсации.

Таблица дает простую качественную оценку параметров, обеспечивающих эффективную компенсацию рассеянной волны: $M<ka$, $N>2kb$. Вводя расстояние между излучателями $h=2\pi b/N$ и длину волны $\lambda=2\pi/k$, полу-

| $\varepsilon$ | $ka=1$ | | $ka=4$ | | $ka=16$ | | $ka=64$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 2 | 5 | 5 | 11 | 17 | 35 | 59 | 129 |
| 0,01 | 3 | 7 | 6 | 13 | 18 | 38 | 66 | 138 |
| 0,001 | 3 | 7 | 7 | 15 | 19 | 40 | 68 | 142 |
| | $M$ | $N$ | $M$ | $N$ | $M$ | $N$ | $M$ | $N$ |

Примечание. Здесь $b=1{,}1\,a$.

чаем физически очевидный результат: $h<\lambda/2$. Учитывая, что для нахождения $2M+1$ коэффициентов Фурье $A_m$ требуется число приемников порядка $2M$, видим, что приемники, как и излучатели, должны располагаться не реже, чем через полволны. Таблица показывает также, что эти оценки слабо зависят от $\varepsilon$, т. е. небольшое увеличение $M$ и $N$ сверх указанной величины приводит к резкому улучшению компенсации.

Рассмотренное на примере кругового цилиндра приближенное решение задачи Малюжинца обеспечивает при надлежащем выборе параметров компенсацию рассеянного поля с любой степенью точности. Сравнение с результатами работ [2, 3] в применении к данному случаю показывает, что формулы (6) с учетом (7), (13), (16) представляют собой дискретную аппроксимацию плотности непрерывно распределенных на поверхности $r=b$ источников, дающую точное решение задачи.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *М. П. Завадская, А. В. Попов, Б. Л. Эгельский.* Об аппроксимации волновых потенциалов в задачах активного гашения звуковых полей по методу Малюжинца. Акуст. ж., 1975, *21*, 5, 732–738.
2. *Г. Д. Малюжинец.* Нестационарные задачи дифракции для волнового уравнения с финитной правой частью. Труды Акуст. ин-та АН СССР, 1971, вып. 15, стр. 124–139.
3. *М. В. Федорюк.* О работах Г. Д. Малюжинца по теории волновых потенциалов. Труды Акуст. ин-та АН СССР, 1971, вып. 15, 169–179.
4. *Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль.* Теория дифракции. М., «Мир», 1964.



Акустический институт
Академии наук СССР



Поступила
14 января 1974 г.