АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXI 1975 Вып. 6

УДК 534.26

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ НЕОДНОРОДНОГО ТВЕРДОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ЖИДКОСТИ

Г. П. Коваленко

Для твердого неоднородного полупространства, параметры Ламе и плотность которого изменяются с глубиной согласно степенной зависимости, решается задача определения коэффициентов отражения и преломления звуковой волны, падающей из жидкости, покрывающей твердое полупространство, на границу раздела двух сред. Задача решается для двух значений коэффициента Пуассона для случаев квадратичной и кубической зависимости параметров среды от глубины. В первом случае решение дано в элементарных функциях, во втором — в функциях Ханкеля индекса $^1/_3$. Проведено сравнение с результатами, полученными для однородных сред.

В работе [1] найден коэффициент отражения звуковой волны на границе жидкости и однородного твердого полупространства. Для неоднородной твердой среды, когда параметры Ламе и плотность среды зависят от глубины z, задача сильно усложняется, так как уравнения, описывающие движение среды, становятся связанными и имеют переменные коэффициенты. Однако для некоторых частных случаев зависимости параметров Ламе и плотности среды от глубины эти уравнения, как показано в работе [2], удается расщепить.

Ниже находятся коэффициенты отражения и преломления звуковой волны на границе жидкости и полупространства для двух случаев неоднородности последнего. В первом случае модуль сдвига подчиняется квадратичной зависимости от глубины z. Во втором случае эта зависимость кубическая.

Рассмотрим неоднородное твердое полупространство, параметры Ламе которого изменяются в функции глубины

$$\lambda=\lambda_0(az+1)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}},\quad \mu=\mu_0(az+1)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, \tag{1}$$

а плотность определяется как

$$\rho=\rho_0(az+1)^{\frac{4}{\gamma-1}},\quad \gamma=\frac{\lambda+2\mu}{\mu}=\text{const}.$$

Тогда, как следует из работы [2], плоское движение твердой среды описывается уравнениями

$$\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{v_n^2\partial t^2}\right)\psi_n=0\qquad n=1,2, \tag{2}$$

где

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad v_n^2=v_{n0}^2(az+1)^{\frac{\gamma-3}{\gamma-1}},$$

v_{n0} — скорости распространения волн деформаций при $z=0$.

Рассмотрим два частных случая, когда уравнения (2) интегрируются в замкнутом виде. Если $\gamma=3$, то скорости распространения волн деформаций будут постоянными, а зависимость параметров Ламе и плотности среды от глубины становится квадратичной

$$\lambda=\mu=\mu_0(az+1)^2, \quad \rho=\rho_0(az+1)^2. \tag{3}$$

Пусть из жидкости, покрывающей полупространство со свойствами (3), падает звуковая волна, заданная потенциалом

$$\varphi_п=Ae^{ik(x\sin v+z\cos v)}, \tag{4}$$

где v — угол падения, A — амплитуда волны. Здесь и далее временной множитель опущен. Отраженную волну напишем в виде

$$\varphi_0=AVe^{ik(x\sin v+z\cos v)}. \tag{5}$$

В полупространстве возникают продольные и поперечные волны; мы представим их в виде

$$\begin{aligned} &\psi_1=AWe^{ik_1(x\sin\theta-z\cos\theta)},\\ &\psi_2=APe^{i\varkappa(x\sin\beta-z\cos\beta)},\\ &k=\omega c^{-1}, \quad k_1=\omega v_1^{-1}, \quad \varkappa=\omega v_2^{-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

где c — скорость звуковой волны в жидкости, ω — частота, θ, β — углы, составляемые соответственно нормалями к фронтам продольной и поперечной волны с осью $0z$. Смещения $\bar{u}=\bar{u}_1+\bar{u}_2=\bar{u}_x i_x+\bar{u}_z i_z$ связаны с потенциальными функциями соотношениями

$$\bar{u}_1 f_1=\nabla(\psi_1), \quad \bar{u}_2 f_2=\nabla x\left(i_y\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right), \tag{7}$$

где f_n — весовые функции, зависящие только от z. Для данной среды и значения $\gamma=3$ они имеют вид $f_1=f_2=az+1$.

На границе раздела требуется выполнение условий непрерывности нормальных напряжений

$$\rho_1 c^2\nabla^2\varphi=\mu\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2}{\partial z^2}-3a\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi_1+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2\frac{\partial}{\partial z}-3a\right)\psi_2\right\}, \quad z=0,$$

равенства нулю касательных напряжений

$$\left(2\frac{\partial}{\partial z}-a\right)\psi_1+\left(\nabla^2-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+a\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi_2=0$$

и непрерывности нормальных смещений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}$$

где ρ_1 — плотность жидкости, $\varphi=A(e^{-ikz\cos v}+Ve^{ikz\cos v})\cdot e^{ikx\sin v}$. Граничные условия приводят к следующим уравнениям для определения трех постоянных V, W, P:

$$(1-V)ik\cos v=Wik_1\cos\theta+P\varkappa^2\sin^2\beta,$$

$$P\left(\varkappa^3 i\sin\beta\cos 2\beta+\frac{1}{2}\alpha\varkappa^2\sin 2\beta\right)=W(aik_1\sin\theta-k_1^2\sin 2\theta),$$

$$\rho_1 c^2\varkappa^2(1+V)=W[-k_1^2(1+2\cos^2\theta)+3aik_1\cos\theta]+$$
$$+P(3a+2i\varkappa\cos\beta)\varkappa^2\sin^2\beta; \quad k\sin v=k_1\sin\theta=\varkappa\sin\beta.$$

Отсюда

$$(8)\qquad V=\frac{Z_2\cos^2 2\beta+Z_3\sin^2 2\beta-Z_1-bv_2\left[(3Z_3+Z_2)\cos\beta-Z_1\dfrac{\cos(\theta-\beta)}{\cos\theta}\right]i-N}{Z_2\cos^2 2\beta+Z_3\sin^2 2\beta+Z_1-bv_2\left[(3Z_3+Z_2)\cos\beta+Z_1\dfrac{\cos(\theta-\beta)}{\cos\theta}\right]i-N},$$

где

$$Z_1=\frac{\rho_1 c}{\cos v},\quad Z_2=\frac{\rho v_1}{\cos\theta},\quad Z_3=\frac{\rho v_2}{\cos\beta},$$

$$N=3bv_2^2 Z_3\frac{\cos\beta}{\cos\theta}\cos(\theta-\beta).$$

При $b=0$ выражение (8) совпадает с соответственным выражением работы [1].

Отметим некоторые особенности коэффициента отражения. Если скорость распространения волн в жидкости $c<v_2<v_1$, то при $c<\sin v<c/v_1$ углы θ и β будут вещественными, ибо $\sin\theta=v_1c^{-1}\sin v$, но коэффициент отражения будет комплексной величиной, по модулю <1. Это значит, что при отражении изменяется не только амплитуда, но и фаза волны. Для однородной среды мы имеем действительный коэффициент отражения и соответственно изменяется только амплитуда. При $cv_2^{-1}<\sin v$ оба угла θ и β комплексные, т. е. продольные и поперечные волны становятся неоднородными волнами. Z_2 и Z_3 будут чисто мнимыми положительными, а $\cos\beta$, $\cos\theta$ — чисто мнимыми отрицательными, что вытекает из условия ограниченности выражений (6) при $z\to\infty$. При этих условиях числитель выражения (8) будет комплексно сопряжен знаменателю и коэффициент отражения по модулю будет равен единице, т. е. имеет место полное отражение.

Коэффициент преломления продольной волны определяется выражением

$$(9)\qquad W=\frac{2(Z_2\cos 2\beta-bv_2 i\cos\beta)}{Z_2\cos^2 2\beta+Z_3\sin^2 2\beta+Z_1-bv_2\left[(3Z_3+Z_2)\cos\beta+Z_1\dfrac{\cos(\theta-\beta)}{\cos\theta}\right]i-N}.$$

Определим угол, при котором продольная волна в твердом полупространстве не возбуждается. Приравнивая нулю числитель выражения для коэффициента преломления и используя зависимость между углами преломления, мы приходим к уравнению для определения угла β: $(4\rho v_1+3b^2v_2^2)Y-$
$-2Y(2\rho v_1+b^2v_2^2)+\rho v_1=0$,
где $Y=\cos^2\beta$.

Из уравнения находим

$$(10)\qquad \cos^2\beta=\frac{2\rho v_1+b^2v_2^2\pm bv_2(\rho v_1+b^2v_2^2)^{1/2}}{4\rho v_1+3b^2v_2^2}.$$

Легко видеть, что если твердая среда однородна ($b=0$), то угол $\beta=45°$, что совпадает с результатом работы [1]. Из формулы (10) мы находим два угла, один из которых меньше 45°, второй — больше. При этих углах продольная волна в твердом полупространстве отсутствует.

Аналогично может быть рассмотрен случай отражения продольной или поперечной волны, падающей из твердого тела на границу раздела жидкости и твердого полупространства. Если падает продольная волна, то звуковая волна в жидкости будет

$$(11)\qquad \varphi=De^{ik(x\sin v+z\cos v)},$$

падающая и отраженная продольные волны в твердой среде —

$$(12)\qquad \psi_1=Ae^{ik_1(x\sin\theta+z\cos\theta)}+Be^{ik_1(x\sin\theta-z\cos\theta)}$$

и отраженная поперечная волна

(13) $$\psi_2 = Ce^{i\varkappa(x\sin\beta - z\cos\beta)}.$$

Временные множители exp $(i\omega t)$ в выражениях (11) — (13) опущены. Используя граничные условия и эти выражения, можно определить неизвестные B/A, D/A, C/A. Напишем здесь только выражение для коэффициента отражения продольной волны $B/A = V_1$

(14)
$$V_1 = \frac{Z_3\sin^2 2\beta + Z_1 - Z_2\cos^2 2\beta - bv_2\left[(3Z_3 - Z_2)\cos\beta + Z_1\dfrac{\cos(\theta-\beta)}{\cos\theta}\right]i - N}{Z_3\sin^2 2\beta + Z_1 + Z_2\cos^2 2\beta - bv_2\left[(3Z_3 + Z_2)\cos\beta + Z_1\dfrac{\cos(\theta+\beta)}{\cos\theta}\right]i - N}.$$

Из выражения знаменателя формулы (14) можно получить уравнение для определения скорости распространения волны Стонели (при наличии жидкой среды) и волны Рэлея (когда жидкое полупространство отсутствует). Сначала допустим, что жидкости нет ($Z_1 = 0$) и, учитывая, что фазовая скорость волны вдоль границы будет $v_R = v_2\sin^{-1}\beta$, положим

(15) $$\sin^2\beta = l^{-2}.$$

Приравняв нулю знаменатель формулы (14) при $Z_1 = 0$ и используя формулу (15), мы приходим к уравнению

(16) $$(l^2-2)^2 - 4\eta\delta - bl^2(3\delta+\eta) + 3b^2(\delta\eta - 1) = 0,$$

где $\delta = \left(1 - \dfrac{l^2}{3}\right)^{1/2}$, $\eta = (1-l^2)^{1/2}$. Это есть уравнение Рэлея среды со свойствами (3). Оно получено в работе [3] другим путем. Там же исследованы его корни. Скорость волны Рэлея зависит от параметра $b = a/\omega$ и изменяется в узком интервале от значения скорости в однородной среде до величины скорости волны сдвига.

Рэлеевская часть смещения в твердой среде выражается так:

$$U_x = -\frac{Gq^2}{\varepsilon(2q\eta + a)}\{[(2-l^2)q - a\delta]e^{-\delta z} + \delta(2q\eta + a)e^{-\eta z}\}\sin q(x - v_R t),$$

$$U_z = \frac{Gq^2}{\varepsilon(2q\eta + a)}\{[(2-l^2)q - a\delta]\eta e^{-\delta z} + (2q\eta + a)e^{-\eta z}\}\cos q(x - v_R t),$$

где q — волновое число, G — некоторая постоянная, $\varepsilon = az + 1$. Исключая время t как параметр, получим траекторию частиц, участвующих в распространении поверхностной волны. Это будет эллипс, как и в случае однородной среды, но с другими осями.

Если учесть наличие жидкости, то уравнение (16) заменяется следующим:

(17)
$$(l^2-2)^2 - 4\delta\eta - bl^2(3\delta+\eta) + 3b^2(\delta\eta - 1) = -\frac{\rho_1 l^2}{\rho\sqrt{1 - r^2 l^2}}[l^2\delta + b(1 - \eta\delta)],$$

$$r = \frac{v_2}{c}.$$

Можно показать, что уравнение (17) имеет кроме релеевского корня, который в этом случае будет комплексным, еще один корень, определяющий скорость распространения волны Стонели.

Рассмотрим теперь случай, когда коэффициент Пуассона твердой среды со свойствами (3) равен нулю, т. е. $\gamma = 2$. Тогда уравнения движения среды

будут

$$(18)\qquad \left(\nabla^2+\frac{\varepsilon}{2v_2^2}\omega^2\right)\psi_1=0,\quad \left(\nabla^2+\frac{\varepsilon}{v_2^2}\omega^2\right)\psi_2=0,$$

$$\varepsilon=az+1.$$

Представив решения этих уравнений в виде

$$\psi_1=Ae^{ikx\sin\theta}T_1,$$

$$\psi_2=Be^{i\varkappa x\sin\beta}T_2,\quad \varkappa=\sqrt{2}k,$$

мы получим два уравнения для определения функции T_1, T_2:

$$(19)\qquad \frac{d^2T_1}{d\chi^2}+\left(\frac{k}{a}\right)^2\chi T_1=0;$$

$$\frac{d^2T_2}{d\zeta^2}+\left(\frac{\varkappa}{a}\right)^2\zeta T_2=0,$$

где $\zeta=az+\cos^2\beta$, $\chi=az+\cos 2\beta$. Их решения, ограниченные при χ, $\zeta\to\infty$, имеют вид

$$T_1=g^{1/3}H^{(1)}_{1/3}(g),\ T_2=w^{1/3}H^{(1)}_{1/3}(w),\ g=\frac{2k}{3a}\chi^{3/2},\ w=\frac{2\varkappa}{3a}\zeta^{3/2},$$

где $H_{1/3}(g)$ — функции Ханкеля. Поставив задачу аналогично предыдущему, находим коэффициенты отражения и преломления V, A, B:

$$(20)\qquad \begin{aligned} &V=[v_{02}^2(a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12})+\rho_1c^2\mu^{-1}(a_{22}a_{31}-a_{32}a_{21})\cdot ik\cos v]\Omega^{-1},\\ &A=-2a_{22}ik\cos v\Omega^{-1},\quad B=2a_{21}ik\cos\Omega^{-1},\\ &\Omega=-v_{02}^2(a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12})+\rho_1\rho^2\mu^{-1}\cdot(a_{22}a_{31}-a_{21}a_{32})ik\cos v.\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$a_{11}=g_0^{2/3}H^{(1)}_{2/3}(g_0)\varkappa^{2/3}\left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)^{1/3}\quad a_{12}=\varkappa^1\sin^2\beta w_0^{1/3}H^{(1)}_{1/3}(\omega_0),$$

$$a_{21}=4a(a_{11}-g_0^{1/3}H^{(1)}_{1/3}(g_0)),\quad m=w_0^{2/3}H^{(1)}_{-2/3}(w_0)\varkappa^{2/3}\left(\frac{3a}{2}\right)^{1/3},$$

$$a_{22}=2am+w_0H^{(1)}_{1/3}(w_0)\varkappa^{4/3}\left(\frac{3a}{2}\right)^{2/3},\quad a_{31}=-4a_{11}-$$

$$-\varkappa^{4/3}\left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)^{2/3}g_0H^{(1)}_{1/3}(g_0),\quad a_{32}=-\varkappa^2\sin^2\beta(m-2aa_{12}),$$

$$g_0=g_{z=0},\quad w_0=w_{z=0}.$$

Для приближенного исследования полученных выражений при больших значениях аргумента воспользуемся разложением

$$(21)\qquad H^{(1)}_{1/3}(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi w}}\exp\left[i\left(w-\frac{5}{12}\pi\right)\right][1+5(72iw)^{-1}+\ldots],$$

$$H^{(1)}_{-2/3}(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi w}}\exp\left[i\left(w+\frac{\pi}{12}\right)\right][1-7(72iw)^{-1}+\ldots].$$

Найдем, при каких значениях угла падения v в твердом теле не возбуждаются продольные волны. Рассмотрение проведем при высокой частоте падающей волны, когда можно применить разложения (21) с сохранением одного члена в каждом ряде. Сразу замечаем, что при $v=\frac{\pi}{2}$, т. е. при скользящем падении, коэффициенты A и B равны нулю, а $V=-1$. Это сви-

детельствует об изменении фазы волны при отражении на 180°. При угле падения $0<v<\frac{\pi}{2}$ приравняем нулю числитель первого выражения (20) и получим уравнение

$$2\varkappa\cos^2\beta+2ai\cos\beta-\varkappa=0.$$

Отсюда

$$\beta=\arccos\frac{-ai\pm\sqrt{2\varkappa^2}}{2\varkappa}. \tag{22}$$

Из соотношения $\sin\beta=v_2C^{-1}\sin v$ вытекает, что при скорости звуковой волны $c<v_2$ угол β будет комплексным, если $\sin v>c/v_2$. Формула (22) в случае однородной среды ($a=0$) дает тот же результат, что и формула (10). Однако для неоднородных сред они приводят к существенно различным значениям для углов, при которых не возбуждается продольная волна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. М. Бреховских.* Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
2. *Joseph F. Hook.* Separation of the vector wave equation of elasticity for certain types of inhomogeneaus isotropic media. J. Acoust. Soc. America, 1961, *33*, 302–313.
3. *Г. П. Коваленко, А. П. Филиппов.* О колебаниях упругого полупространства с квадратичной зависимостью параметров Ламе от глубины. Механика твердого тела, 1970, 6, 90–96.

Харьковский политехнический институт
им. В. И. Ленина
Сумский филиал

Поступила
26 февраля 1973 г.
После переработки
24 июня 1975 г.