2. *Л. А. Давидович, М. Г. Халиулин, П. К. Хабибуллаев.* Исследование акустических свойств некоторых жидкостей на частотах 0,3–5 *МГц*. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. н., 1972, 4, 69–70.
3. *Л. А. Давидович, С. Махкамов, Л. Пулатова, П. К. Хабибуллаев, М. Г. Халиулин.* Исследование акустических свойств некоторых органических жидкостей на частотах 0,3–3 *ГГц*. Акуст. ж., 1972, *18*, 2, 318–320.
4. *М. И. Шахпаронов, Ю. Г. Шорошев, С. С. Алиев, М. Г. Халиулин, П. К. Хабибуллаев.* Исследование акустических свойств растворов с критической точкой расслаивания. Ж. физ. химии, 1969, *43*, 10, 2543.
5. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Статистическая физика. М., «Наука», 1964.

Ташкентский государственный
педагогический институт
им. Низами

Поступила
17 февраля 1975 г.

УДК 534.222

ОТРАЖЕНИЕ В РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

В. И. Гельфгат

В работе [1] была рассмотрена задача об отражении монохроматической волны в случайно неоднородной среде от плоского абсолютно отражающего бесконечного зеркала. С помощью довольно сложных методов континуального интегрирования и функционального дифференцирования была найдена связь среднего отраженного поля со статистическими характеристиками падающей волны. Ниже показывается, что та же задача может быть легко решена элементарными методами.

Пусть на плоскопараллельный случайно неоднородный слой, простирающийся от x_0 до x_1, падает слева монохроматическая волна, имеющая на входе в слой распределение комплексной амплитуды $A_+^0(\mathbf{r})$. Процесс распространения волны будем описывать в приближении параболического уравнения

$$2ik\frac{\partial}{\partial x}A_+ + \Delta A_+ + k^2\varepsilon A_+ = 0, \qquad A_+|_{x=x_0} = A_+^0(\mathbf{r}), \tag{1}$$

где k – волновое число в однородной среде, $\varepsilon(x, \mathbf{r})$ – флуктуация показателя преломления.

Пусть далее выходная граница слоя представляет собой зеркало, процесс отражения на котором будем описывать линейным оператором

$$A_-^0(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}'\, V(r, \mathbf{r}')A_+(x_1, \mathbf{r}'), \tag{2}$$

где $A_-^0(\mathbf{r})$ – начальная амплитуда отраженной волны, изменение которой в процессе распространения через неоднородный слой описывается также параболическим уравнением

$$-2ik\frac{\partial}{\partial x}A_- + \Delta A_- + k^2\varepsilon A_- = 0, \qquad A_-|_{x=x_1} = A_-^0(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Как отмечено в работе [1], статистические характеристики отраженной волны не могут быть непосредственно найдены теми методами, которые в настоящее время широко применяются для нахождения аналогичных характеристик прямой волны (локальный метод [2] или эквивалентный ему метод диффузионного случайного процесса [3]). Кажущаяся сложность задачи состоит в том, что начальные данные для отраженной волны функционально зависят от неоднородностей во всем слое. Однако эта трудность может быть легко преодолена использованием аппарата теоремы взаимности. В самом деле, введем функции Грина G_+ и G_- параболических уравнений (1) и (3)

$$A_+(x, \mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}'\, G_+(x, \mathbf{r}|x_0, \mathbf{r}')A_+^0(\mathbf{r}'),$$

$$A_-(x, \mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}'\, G_-(x, \mathbf{r}|x_1, \mathbf{r}')A_-^0(\mathbf{r}').$$

Поскольку уравнения (1) и (3) сопряжены, функции Грина удовлетворяют соотношению взаимности

$$G_+(x', \mathbf{r}'|x'', \mathbf{r}'') = G_-(x'', \mathbf{r}''|x', \mathbf{r}'). \tag{4}$$

С физической точки зрения это обычное соотношение взаимности для параксиальных пучков, процесс распространения которых приближенно описывается параболическим уравнением.

С учетом уравнений (2) и (4), выражение для амплитуды отраженной волны принимает вид

$$A_-(x, \mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_1'\, d\mathbf{r}_0\, G_+(x_1, \mathbf{r}_1 | x, \mathbf{r})\, V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1')\, G_+(x_1, \mathbf{r}_1' | x_0, \mathbf{r}_0)\, A_+^0(\mathbf{r}_0), \tag{5}$$

Полученное динамическое соотношение дает связь отраженного поля с полем прямой волны. Фактически в работе [1] была получена формула (5) для $x=x_0$ и $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ (т. е. для абсолютно отражающего зеркала), причем вместо функции Грина G_+ было подставлено ее «явное» выражение в виде континуального интеграла.

Переходя к расчету средних характеристик отраженной волны, мы будем предполагать статистическую независимость входного распределения амплитуды с флуктуациями параметров среды и с характеристиками зеркала, которые также могут быть случайными. Усредняя выражение (5), получим выражение для средней амплитуды отраженного поля

$$\langle A_-(x, \mathbf{r})\rangle = \int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_1'\, d\mathbf{r}_0 \langle V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1')\rangle \langle G_+(x_1, \mathbf{r}_1 | x, \mathbf{r})\, G_+(x_1, \mathbf{r}' | x_0, \mathbf{r}_0)\rangle \langle A_+^0(\mathbf{r}_0)\rangle. \tag{6}$$

Отметим, что на входе в неоднородный слой, т. е. при $x=x_0$ средняя амплитуда отраженной волны выражается через взаимную поперечную корреляционную функцию прямых полей.

Если среда, зеркало и падающая волна статистически однородны в поперечном направлении, то на входе в неоднородный слой средняя амплитуда отраженной волны может быть написана в виде

$$\langle A_-(x_0, \mathbf{r})\rangle = \langle A_+^0(\mathbf{r})\rangle \int d\mathbf{r}'\, V_c(\mathbf{r}')\, \Gamma_{2,0}(x_1, \mathbf{r}'),$$

где функция $V_c(\mathbf{r})$ характеризует средний коэффициент отражения зеркала $\langle V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rangle = V_c(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, а функция $\Gamma_{2,0}(x_1, \mathbf{r})$ представляет собой поперечную корреляционную функцию на зеркале поля прямой плоской волны единичной амплитуды. Частный случай зеркала с постоянным в среднем коэффициентом отражения $V_c(\mathbf{r}) = V_0\delta(\mathbf{r})$ и падающей единичной плоской волны приводит к особенно простой форме выражения для средней амплитуды отраженного поля

$$\langle A_-(x_0, \mathbf{r})\rangle = V_0 \langle A_+^2(x_1, \mathbf{r})\rangle.$$

Отметим, что последняя формула была получена в работе [1] в приближении диффузионного случайного процесса, однако она справедлива и без этого предположения. В самом деле, приближение диффузионного случайного процесса либо иное часто делаемое предположение о марковском характере процесса распространения волны нужно лишь для расчета входящих в формулы типа (6) корреляционных функций полей прямых волн и не требуется для установления связи характеристик отраженной волны на входе в слой с характеристиками прямой волны.

Умножая равенство (5) почленно на комплексно сопряженное и усредняя, получим выражение для среднего квадрата модуля амплитуды отраженного поля. В частности, для однородного в поперечном направлении процесса имеем

$$\langle |A_-(x_0, \mathbf{r})|^2\rangle = \int d\mathbf{r}'\, W(\mathbf{r}') \langle A_+(x_1, \mathbf{r}')\, A_+^*(x_1, 0)\rangle, \tag{7}$$

где функция $W(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \langle V(\mathbf{r}', \mathbf{r}'' + \mathbf{r})\, V^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')\rangle$ имеет смысл фурье-преобразования индикатриссы рассеяния зеркала. В частном случае зеркала с постоянным коэффициентом отражения получаем закон отражения по энергии

$$\langle |A_-(x_0, \mathbf{r})|^2\rangle = |V_0|^2 \langle |A_+(x_0, \mathbf{r})|^2\rangle.$$

Отметим, что при выводе соотношения (7) было использовано соотношение ортогональности для функций Грина G_+ и G_-, вытекающее из определяющих эти функции уравнений (1) и (3):

$$\int d\mathbf{r}'\, G_+(x, \mathbf{r} | x', \mathbf{r}')\, G_-^*(x', \mathbf{r}' | x, \mathbf{r}_1) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1).$$

В заключение подчеркнем, что полученное выше динамическое соотношение (5) позволяет свести задачу нахождения любых статистических моментов отраженной волны к аналогичной уже известной задаче расчета моментов падающей волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Кляцкин.* К статистической теории отражения света в случайно неоднородной среде. ЖЭТФ, 1973, *65*, 1 (7), 54–60.
2. *Л. А. Чернов.* Локальный метод расчета сильных флуктуаций поля в задаче о распространении волн в среде со случайными неоднородностями. VI Всес. акуст. конф., Реферат А III, М., 1968.
3. *В. И. Кляцкин, В. И. Татарский.* Статистическая теория распространения света в турбулентной среде. Изв. вузов. Радиофизика, 1972, *15*, 9, 1433–1437.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
4 апреля 1975 г.