УДК 534.222.2

О ЧИСЛЕННОМ РАСЧЕТЕ НЕОДНОМЕРНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

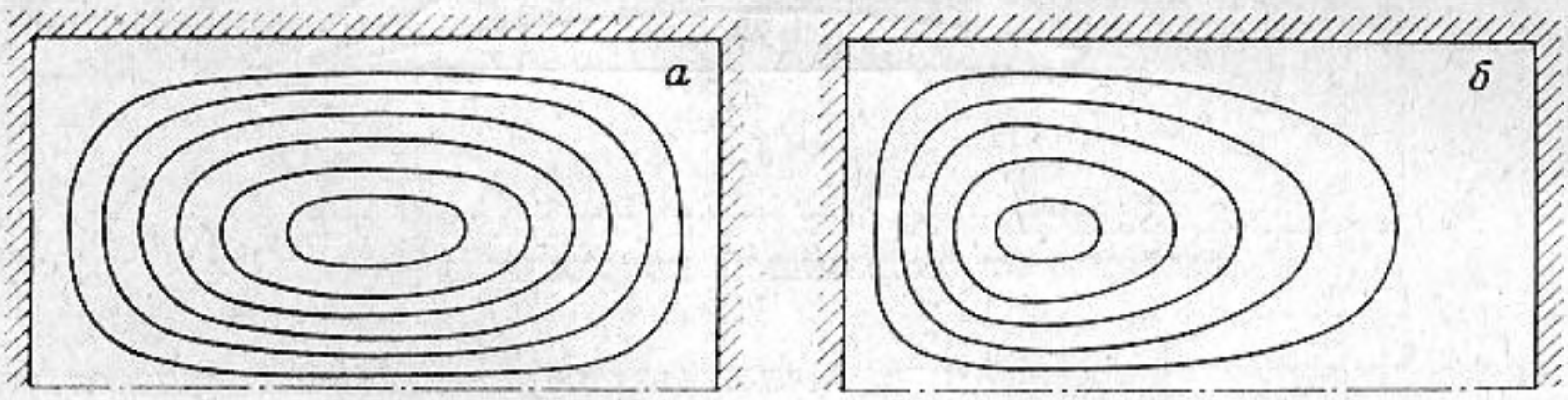
А. Б. Кукаркин, О. В. Руденко

Исследование акустических потоков в замкнутых объемах проводилось как экспериментально, так и теоретически [1, 2]. Однако теоретическое рассмотрение ограничивалось одномерным (эккартовским) случаем даже для медленных течений, когда нелинейными по потоку членами в уравнениях гидродинамики можно пренебречь. Вместе с тем, неодномерный характер явления связан с рядом особенностей и используется, например, для измерения некоторых констант вещества [3]. Цель настоящего сообщения — показать, что эти задачи можно эффективно решать численно, не налагая существенных ограничений на форму и размеры звукового пучка и кюветы, а также на прочие акустические параметры, определяющие поведение потока.

Как известно, система уравнений, описывающих медленные течения вязкой несжимаемой жидкости в поле внешних сил, в стационарном случае сводится к бигармоническому уравнению для функции тока ψ:

$$\nu\Delta\Delta\psi=\frac{\partial F_x}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial x}. \tag{1}$$

Здесь ν — кинематическая вязкость, $\mathbf{F}=\{F_x,\ F_y\}$ — сила, вызывающая течение. Компоненты скорости потока по известной ψ определяются как $U_x=-\partial\psi/\partial y$, $U_y=\partial\psi/\partial x$.



Фиг. 1. Картина линий тока для слабого (*а*) и сильного (*б*) поглощения звука на длине кюветы

Пусть двумерное течение возникает в сосуде прямоугольной формы, один торец которого заглушен, т. е. реализуется режим бегущей вдоль оси x волны; граничные условия для скорости потока $U_x=U_y=0$ на всех четырех стенках. В безразмерных переменных $\psi_1=\psi/\psi_0$, $x_1=x/L$, $y_1=y/L$, $\partial F_x/\partial y=\alpha v_0^2 f(\alpha x,\ y/a)$, где L — характерный масштаб течения, α — коэффициент поглощения звука, v_0 — амплитуда колебательной скорости, a — ширина звукового пучка, $\psi_0=\alpha v_0^2L^3/\nu$, уравнение (1) примет вид

$$\Delta_1\Delta_1\psi_1=f. \tag{2}$$

Для определения ψ_1 решим (2) в области $0\leqslant x_1\leqslant 1$, $-0{,}5\leqslant y_1\leqslant 0{,}5$ с условиями $\partial\psi_1/\partial x_1=\partial\psi_1/\partial y_1=0$ на границах

$$\begin{matrix}(x;\ -0{,}5), & (x;\ 0{,}5),\\ (0;\quad y), & (1;\quad y).\end{matrix} \tag{3}$$

Подобные задачи решались численно в гидродинамике [4] для $f=0$. Случай ненулевой функции f придает задаче иное физическое содержание, но в смысле расчета не отличается существенно от случая $f=0$. Поэтому методы, применявшиеся в гидродинамике, могут быть использованы и при решении данной задачи.

Численное решение (2) и (3) было получено методом конечных разностей на сетке $x_i=(i-{}^1/_2)h$, $y_j=-0{,}5+(j-{}^1/_2)h$, $i,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ N$, $hN=1$. Для приближения бигармонического оператора применялась стандартная аппроксимация второго порядка по тринадцатиточечному шаблону [5], а условия (3) аппроксимировались разностными граничными условиями

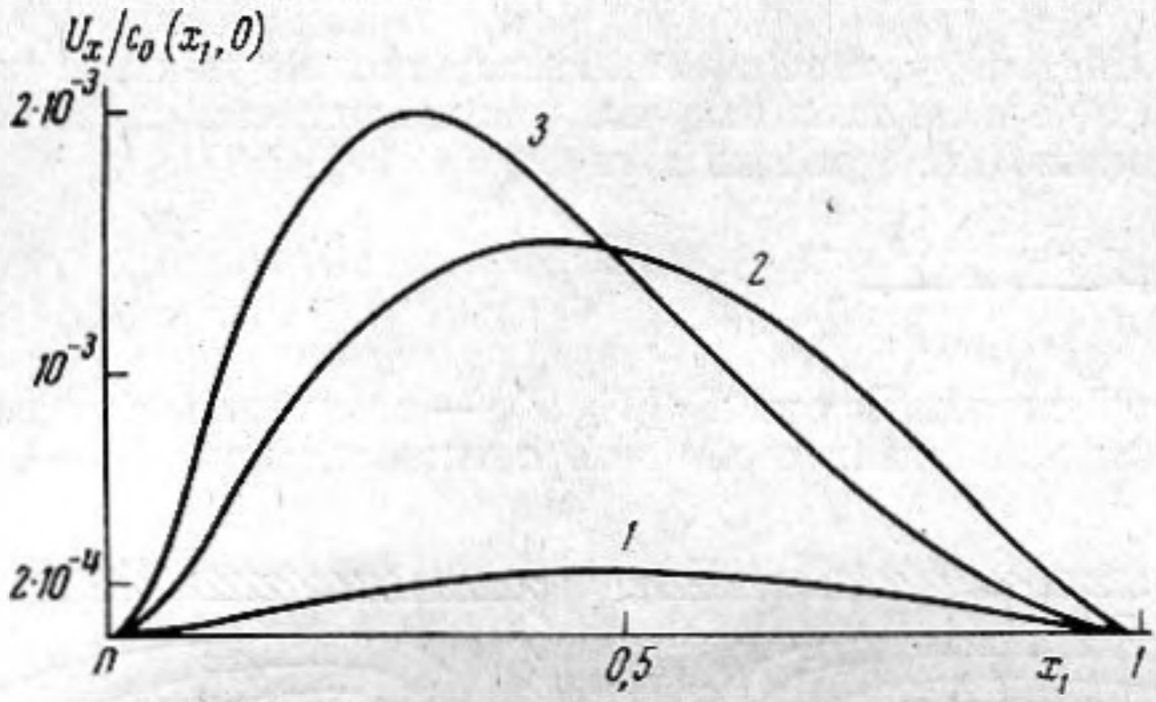
$$\psi(x_i,\ y_j)=0,\quad i=0,\ 1,\ N-1,\ N,\quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ N,$$
$$\psi(x_i,\ y_j)=0,\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ N,\ j=0,\ 1,\ N-1,\ N.$$

Полученная таким образом система линейных алгебраических уравнений решалась с помощью оптимального линейного итерационного процесса [6]. Выражение для f принято в виде $f=-20y_1\exp(-10y_1^2-\alpha Lx_1)$, что соответствует пучку с гауссовским поперечным профилем распределения.

На фиг. 1, *а*, *б* изображены линии тока для случаев слабого ($\alpha L=0$) и сильного ($\alpha L=5$) затухания звука на длине кюветы. Как нетрудно видеть, учет затухания (фиг. 1, *б*) приводит к деформации симметричной картины фиг. 1, *а*. Линии тока сгущены в области звукового поля и разрежены там, где движение происходит «по инерции». Расчет аксиальной скорости течения ($y=0$) проводился по формуле

$$\frac{U_x}{c_0}(x_1, 0) = -\frac{b}{2\eta}\left(\frac{v_0}{c_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{c_0}L\right)^2\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}\bigg|_{y_1=0} \tag{4}$$

для значений αL равных 0,1; 1; 5 (кривые *1*, *2*, *3* на фиг. 2). Масштаб по оси ординат соответствует в формуле (4) $(b/2\eta)(v_0\omega L/c_0^2)^2=1$. Возрастание скорости при увеличении αL связано с тем, что все бо́льшая доля энергии, излучаемой за единицу времени, поглощается в среде. Смещение максимума к источнику обусловлено уменьшением продольных размеров области поглощения, однако ход кривых не связан



Фиг. 2. Зависимость скорости потока на оси системы от аксиальной координаты

однозначно с характерной длиной α^{-1}, а сложным образом зависит еще от размера сосуда L и ширины пучка a.

Разнообразие условий эксперимента не позволяет привести данные, проясняющие картину в общем случае. Однако вычислительные методы позволяют изучать численные решения задач, подобных рассмотренной. Отметим, что учет нелинейных звуковых эффектов, дифракции и других явлений, приводящих к изменению зависимости $F(x, y)$, в рамках численного расчета проводится очень просто. Можно также учесть конечность гидродинамического числа Рейнольдса, когда уравнение (1) становится нелинейным. Более трудными представляются задачи об установлении акустических течений, однако возникающие здесь трудности не носят принципиального характера, а связаны с такими вопросами, как увеличение машинной памяти, большие затраты машинного времени и т. п.

Авторы благодарят Н. С. Бахвалова, Я. М. Жилейкина за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. К. Зарембо, В. В. Шкловская-Корди.* Визуализация акустического течения на границе двух несмешивающихся жидкостей. Акуст. ж., 1957, *3*, 3, 373—374.
2. Мощные ультразвуковые поля (коллективная монография под ред. Л. Д. Розенберга), М., «Наука», 1968.
3. *О. А. Капустина, Ю. Г. Статников.* Исследование реологических свойств жидких кристаллов с помощью акустических течений. ЖЭТФ, 1974, *66*, 2, 635—637.
4. *Ю. И. Браиловская, Т. В. Кускова, Л. А. Чудов.* Разностные методы решения уравнений Навье — Стокса. В кн.: Вычислительные методы и программирование. Изд-во МГУ, 1968.
5. *С. Г. Михлин, Х. Л. Смолицкий.* Приближенные решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., «Наука», 1965.
6. *Н. С. Бахвалов.* Численные методы. М., «Наука», 1973.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Физический факультет

Поступила
4 апреля 1975 г.