АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXII 1976 Вып. 1

УДК 534.113

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ АРМИРОВАННЫХ ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИХ ПОКРЫТИЙ

М. М. Мачевариани

Методами теории оптимального управления в классе кусочно-постоянных функций, для которых допустимы вариации, отыскиваются распределения модуля сдвига в упругих неоднородных слоях, обеспечивающие максимум коэффициента потерь в системе неоднородный вибропоглощающий слой — тонкая изгибно-колеблющаяся металлическая пластина. Показано, что для волны фиксированной частоты кусочно-постоянные функции, принимающие экстремальные значения, удовлетворяют необходимым условиям оптимальности, а соответственными конструкциями являются армированные вибропоглощающие покрытия.

1. В работе [1] доказано, что оптимальными распределениями параметров в жестких неоднородных вибропоглощающих слоях являются кусочно-постоянные распределения с экстремальными значениями параметров. Ниже исследована оптимальность армированных вибропоглощающих покрытий. Из применяемых на практике трех основных типов вибропоглощающих покрытий [2], так называемых жестких, мягких и армированных, последние характеризуются тем, что в их конструкциях применяются материалы с резко различными по величине модулем Юнга и коэффициентом потерь. Помимо жестких слоев в конструкциях таких покрытий используются резиноподобные материалы с малым модулем сдвига (и большими потерями). Это обстоятельство не позволяет использовать для анализа полученную в работе [1] систему линейных дифференциальных уравнений для упругостных импеданцев, не учитывающих сдвиговые колебания. Рассматривая неоднородные слои, тонкие по сравнению с длиной сдвиговой волны в материалах, используемых в этих слоях, полагая, что нормальные напряжения σ_{zz} малы в сравнении с продольными σ_{xx} и сдвиговыми σ_{xz}, а также считая малыми изменения нормальной компоненты колебательной скорости по толщине неоднородного слоя, вместо используемой в [1] системы линейных уравнений можно получить следующую систему:

$$
\begin{aligned}
&\dot{Z}_{11}=i(-uZ_{12}^2+2\sin\vartheta_0 Z_{12}-\bar{\rho}),\\
&\dot{Z}_{12}=i(uZ_{22}Z_{12}-\sin\vartheta_0 Z_{22}),\\
&\dot{Z}_{22}=i(uZ_{22}^2-\rho_*),\\
&\left(\dot{Z}_{jk}=\frac{dZ_{jk}}{d\xi}\right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $\xi=\dfrac{\omega}{c_0}z$, z — поперечная координата, $c_0=1{,}5\cdot10^5$ *см/сек* — скорость продольной волны в резиноподобном материале, ρ_0 — его плотность, ω — круговая частота, $\sin\vartheta_0=c_0/c_1$, c_1 — скорость нормальной волны в неоднородном слое, $Z_{jk}(z)$ — безразмерные упругостные импеданцы, $u(z)=\rho_0c_0^2/\rho(z)b^2(z)$ — безразмерная сдвиговая сжимаемость, $\bar{\rho}(z)=\rho(z)/\rho_0$, $\rho(z)$ — плотность материала покрытия в сечении z, $b=b(z)/c_0$ — безразмерная сдвиговая скорость, $\rho_*(z)=\bar{\rho}(z)-4\left(1-\dfrac{b^2(z)}{c^2(z)}\right)\bar{\rho}(z)\bar{b}^2(z)=\bar{\rho}(z)-$

$(D_1(z)-iD_2(z))=\bar{\rho}(z)-(E_1(z)-iE_2(z))\ /\ \rho_0 c_0(1-\sigma^2(z))$, E_1-iE_2 — модуль Юнга, а σ — коэффициент Пуассона.

В соответствии с принятыми выше предположениями система (1) подчеркивает главенствующую роль деформаций сдвига и растяжений в рассматриваемых неоднородных слоях. Если слой граничит с воздухом, то приближенно можно считать, что значения всех трех упругостных импеданцев на этой границе равны нулю. В дальнейшем будет рассматриваться именно такая нагрузка неоднородного упругого слоя. При этом характеристическое уравнение для скорости нормальной волны для системы [1] может быть написано в виде

$$D_m \sin^2\vartheta_0 \xi_m^2\left(\bar{\rho}_m - D_m\frac{\sin^4\vartheta_0}{12}\xi_m^2\right) - iZ_{22}(\xi_l)\cdot \tag{2}$$

$$\cdot\left(\bar{\rho}_m - D_m\frac{\sin^4\vartheta_0}{3}\xi_m^2\right) - D_m\sin^3\vartheta_0\xi_m^2 Z_{12}(\xi_l) + iD_m\sin^2\vartheta_0\xi_m z_{11}(\xi_l) +$$

$$+Z_{11}(\xi_l)Z_{22}(\xi_l)+Z_{12}^2(\xi_l)=0.$$

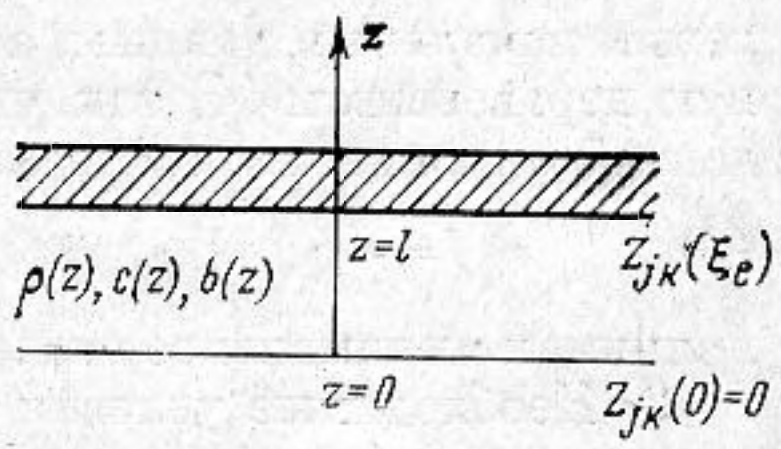
Здесь $D_m=E_m/\rho_0 c_0^2(1-\sigma_m^2)$, $\sin\theta_0=\sin\vartheta\left(1+\frac{\delta}{4}+i\frac{\eta}{4}\right)$, $\sin^4\vartheta=12\bar{\rho}_m/$ $/D_m\xi_m^2$, E_m — модуль Юнга демпфируемой металлической пластины, σ_m — коэффициент Пауссона пластины, $\xi_m=\frac{\omega}{c_0}d_m$, d_m — толщина металлической пластины, $Z_{jk}(\xi_l)$ — значения входных упругостных импеданцев неоднородного слоя на границе слой — металлическая пластина (фигура), η — коэффициент потерь в системе неоднородный слой — металлическая пластина. Считая малыми возмущения, вносимые неоднородным вибропоглощающим слоем в изгибные колебания демпфируемой пластины, из уравнения (2) мы получим следующее приближенное выражение коэффициента потерь через параметры демпфируемой пластины и значения входных упругостных импеданцев неоднородного слоя:

$$\eta=\frac{\dfrac{Z_{22}^{(1)}(\xi_l)}{4\bar{\rho}_m}-\dfrac{\sin\vartheta}{\bar{\rho}_m}Z_{12}^{(2)}(\xi_l)+\dfrac{Z_{11}^{(1)}(\xi_l)}{\bar{\rho}_m\xi_m}}{1+\dfrac{2}{3}\dfrac{Z_{22}^{(2)}(\xi_l)}{\bar{\rho}_m}+\dfrac{3}{2}\dfrac{\sin\vartheta}{\bar{\rho}_m}Z_{12}^{(1)}(\xi_l)+\dfrac{Z_{11}^{(2)}(\xi_l)}{\bar{\rho}_m\xi_m}}, \tag{3}$$

где

$$Z_{jk}^{(1)}(\xi_l)+iZ_{jk}^{(2)}(\xi_l)=\operatorname{Re}Z_{jk}(\xi_l)+i\operatorname{Im}Z_{jk}(\xi_l).$$

Задавая параметры демпфируемой пластины, частоту ω, толщину неоднородного демпфирующего покрытия ξ_l и интегрируя систему (1) для различных законов изменения $\bar{\rho}(z)$, $\bar{c}(z)$, $\bar{b}(z)$ по толщине покрытия, можно найти входные упругостные импеданцы и вычислить по формуле (3) соответствующие значения коэффициента потерь. Среди допустимых к вариациям законов изменения параметров по толщине покрытия найдутся такие, при которых коэффициент потерь η будет иметь максимальное значение. При этом области допустимых изменений параметров практически всегда ограничены минимально и максимально возможными значениями. Хотя для материалов, которые могут быть применены на практике в конструкциях вибропоглощающих покрытий, значения всех трех перечисленных выше параметров связаны между собой, ниже, для простоты, рассматривается случай,



когда плотность и скорость продольных волн в покрытиях постоянны. Кроме того, предполагается, что мнимая часть модуля сдвига не изменяется по толщине неоднородного покрытия. Правомерность сделанных допущений, по крайней мере для материалов типа пластмасс и жестких резин, не должна вызывать особых сомнений. Действительно, изменения реальной части модуля сдвига в ряду этих материалов могут быть более чем на порядок сильнее, нежели изменения значений как плотности и скорости продольных волн, так и мнимой части модуля сдвига (a). Если все же допустить возможность независимой вариации плотности и объемной сжимаемости, то из-за линейной зависимости гамильтониана от этих функций управления легко показывается, что оптимальные функции управления имеют кусочно-постоянный характер и могут принимать лишь экстремальные значения.

Ограничения на сдвиговую сжимаемость $u=u_1+iu_2=1/(\bar{\mu}_0-ia)$ можно написать в следующем виде:

$$\frac{\bar{\mu}_{0\,\max}}{\bar{\mu}^2_{0\,\max}+a^2}\leqslant u_1\leqslant\frac{\bar{\mu}_{0\,\min}}{\bar{\mu}^2_{0\,\min}+a^2},\qquad \frac{a}{\bar{\mu}^2_{0\,\max}+a^2}\leqslant u_2\leqslant\frac{a}{\bar{\mu}^2_{0\,\min}+a^2}. \tag{4}$$

При этом исходя из реально достижимых значений параметров жестких резин и пластмасс для экстремальных значений сжимаемости можно иметь: $u_{1\,\max}\simeq u_{2\,\max}\simeq 10$, $u_{1\,\min}\simeq 0{,}2$, $u_{2\,\min}\simeq 0$. Соответствующие ориентировочные значения могут быть получены и для пределов изменения функции $D(z)$: $D_{1\,\max}\simeq 10$, $D_{2\,\max}\simeq 0{,}2$, $D_{1\,\min}\simeq 0{,}2$, $D_{2\,\min}\simeq 0{,}1$.

Принимая во внимание, что упругостные импеданцы неоднородного вибропоглощающего слоя являются комплексными функциями $Z_{jk}=Z^{(1)}_{jk}+iZ^{(2)}_{jk}$ и считая для простоты, что коэффициент потерь резинопо-добных материалов (γ) существенно выше η, систему (1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
\dot{Z}^{(1)}_{11}&=u_2(Z^{(1)^2}_{12}-Z^{(2)^2}_{12})+2u_1Z^{(1)}_{12}Z^{(2)}_{12}-2\sin\vartheta Z^{(2)}_{12},\\
\dot{Z}^{(2)}_{11}&=2u_2Z^{(1)}_{12}Z^{(2)}_{12}-u_1(Z^{(1)^2}_{12}-Z^{(2)^2}_{12})+2\sin\vartheta Z^{(1)}_{12}-\bar{\rho},\\
\dot{Z}^{(1)}_{12}&=-u_2(Z^{(1)}_{22}Z^{(1)}_{12}-Z^{(2)}_{22}Z^{(2)}_{12})-u_1(Z^{(2)}_{22}Z^{(1)}_{12}+Z^{(1)}_{22}Z^{(2)}_{12})+\sin\vartheta Z^{(2)}_{22},\\
\dot{Z}^{(2)}_{12}&=-u_2(Z^{(2)}_{22}Z^{(1)}_{12}+Z^{(1)}_{22}Z^{(2)}_{12})+u_1(Z^{(1)}_{22}Z^{(1)}_{12}-Z^{(2)}_{22}Z^{(2)}_{12})-\sin\vartheta Z^{(1)}_{22},\\
\dot{Z}^{(1)}_{22}&=-u_2(Z^{(1)^2}_{22}-Z^{(2)^2}_{22})-2u_1Z^{(1)}_{22}Z^{(2)}_{22}+D_2\sin^2\vartheta,\\
\dot{Z}_{22}&=2u_2Z^{(1)}_{22}Z^{(2)}_{22}+u_1(Z^{(1)^2}_{22}-Z^{(2)^2}_{22})+D_1\sin^2\vartheta-\bar{\rho}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Оптимальную задачу сформулируем следующим образом: найти упругостные импеданцы $Z^{(1)}_{jk}(\xi)$ и $Z^{(2)}_{jk}(\xi)$, удовлетворяющие уравнениям (5) и нулевым начальным данным, а также функцию управления $\bar{\mu}_0(\xi)$, подчиненную неравенствам (4) так, чтобы при некотором заданном значении приведенной толщины неоднородного вибропоглощающего слоя функционал

$$I=-\eta \tag{6}$$

принимал минимальное значение (η соответственно максимальное).

2. Необходимые условия оптимальности получаются, как обычно [3], с использованием гамильтониана, который в данном случае имеет вид:

$$\begin{aligned}
H_\lambda=&[u_2(Z^{(1)^2}_{12}-Z^{(2)^2}_{12})+2u_1Z^{(1)}_{12}Z^{(2)}_{12}]\lambda_{z^{(1)}_{11}}+[-u_1(Z^{(1)^2}_{12}-Z^{(2)^2}_{12})+\\
&+2u_2Z^{(1)}_{12}Z^{(2)}_{12}]\lambda_{z^{(2)}_{11}}-[u_2(Z^{(1)}_{22}Z^{(1)}_{12}-Z^{(2)}_{22}Z^{(2)}_{12})+
\end{aligned} \tag{7}$$

$$+ u_1 (Z_{22}^{(2)} Z_{12}^{(1)} + Z_{22}^{(1)} Z_{12}^{(2)})] \lambda_{z_{12}^{(1)}} - [u_2 (Z_{22}^{(2)} Z_{12}^{(1)} + Z_{22}^{(1)} Z_{12}^{(2)}) +$$

$$+ u_1 (Z_{22}^{(1)} Z_{12}^{(1)} - Z_{22}^{(2)} Z_{12}^{(2)})] \lambda_{z_{12}^{(2)}} - [u_2 (Z_{22}^{(1)^2} - Z_{22}^{(2)^2}) +$$

$$+ 2u_1 Z_{22}^{(1)} Z_{22}^{(2)}] \lambda_{z_{22}^{(1)}} + [u_1 (Z_{22}^{(1)^2} - Z_{22}^{(2)^2}) + 2u_2 Z_{22}^{(1)} Z_{22}^{(2)}] \lambda_{z_{22}^{(2)}} -$$

$$- 2 \sin \vartheta \, Z_{12}^{(2)} \lambda_{z_{11}^{(1)}} + (2 \sin \vartheta Z_{12}^{(1)} - \bar{\rho}) \lambda_{z_{11}^{(2)}} + \sin \vartheta Z_{22}^{(2)} \lambda_{z_{12}^{(1)}} -$$

$$- \sin \vartheta \, Z_{22}^{(1)} \lambda_{z_{12}^{(2)}} + D_2 \sin^2 \theta \lambda_{z_{22}^{(1)}} + (D_1 \sin^2 \theta - \bar{\rho}) \lambda_{z_{22}^{(2)}}.$$

Для нахождения входящих в выражение (7) функций Лагранжа

(8) $\lambda_{z_{jk}^{(1)}}, \lambda_{z_{jk}^{(2)}}$ служат уравнения:

$$\dot{\lambda}_{z_{11}^{(1)}} = - \frac{\partial H_\lambda}{\partial z_{11}^{(1)}} = 0, \; \dot{\lambda}_{z_{11}^{(2)}} = \frac{\partial H_\lambda}{\partial z_{11}^{(2)}} = 0,$$

$$\dot{\lambda}_{z_{12}^{(1)}} = - \frac{\partial H_\lambda}{\partial z_{12}^{(1)}} = 2(u_2 Z_{12}^{(1)} + u_1 Z_{12}^{(2)}) \lambda_{z_{11}^{(1)}} - 2 (u_2 Z_{12}^{(2)} - u_1 Z_{12}^{(1)} +$$

$$+ \sin \vartheta) \lambda_{z_{11}^{(2)}} + (u_2 Z_{22}^{(1)} + u_1 Z_{22}^{(2)}) \lambda_{z_{12}^{(1)}} + (u_2 Z_{22}^{(2)} - u_1 Z_{22}^{(1)}) \lambda_{z_{12}^{(2)}},$$

$$\dot{\lambda}_{z_{12}^{(2)}} = - \frac{\partial H_\lambda}{\partial z_{12}^{(2)}} = 2 (u_2 Z_{12}^{(2)} - u_1 Z_{12}^{(1)} + \sin \vartheta) \lambda_{z_{11}^{(1)}} -$$

$$-2(u_2 Z_{12}^{(1)} + u_1 Z_{12}^{(2)}) \lambda_{z_{11}^{(2)}} - (u_2 Z_{22}^{(2)} - u_1 Z_{22}^{(1)}) \lambda_{z_{12}^{(1)}} + (u_2 Z_{22}^{(1)} + u_1 Z_{22}^{(2)}) \lambda_{z_{12}^{(2)}},$$

$$\dot{\lambda}_{z_{22}^{(1)}} = - \frac{\partial H_\lambda}{\partial z_{22}^{(1)}} = (u_2 Z_{12}^{(1)} + u_1 Z_{12}^{(2)}) \lambda_{z_{12}^{(1)}} + (u_2 Z_{12}^{(2)} - u_1 Z_{12}^{(1)} +$$

$$+ \sin \vartheta) \lambda_{z_{12}^{(2)}} + 2 (u_2 Z_{22}^{(1)} + u_1 Z_{22}^{(2)}) \cdot \lambda_{z_{22}^{(1)}} - 2 (u_2 Z_{22}^{(2)} + u_1 Z_{22}^{(1)}) \lambda_{z_{22}^{(2)}},$$

$$\dot{\lambda}_{z_{22}^{(2)}} = - \frac{\partial H_\lambda}{\partial z_{22}^{(2)}} = - (u_2 Z_{12}^{(2)} - u_1 Z_{12}^{(1)} + \sin \vartheta) \lambda_{z_{12}^{(1)}} +$$

$$+ (u_2 Z_{12}^{(1)} + u_1 Z_{12}^{(2)}) \lambda_{z_{12}^{(2)}} + 2 (- u_2 Z_{22}^{(2)} + u_1 Z_{22}^{(1)}) \lambda_{z_{22}^{(1)}} +$$

$$+ 2 (u_2 Z_{22}^{(1)} + u_1 Z_{22}^{(2)}) \lambda_{z_{22}^{(2)}}.$$

Так как правые части уравнений систем (5) и (8) не содержат явно независимую переменную ξ, то гамильтониан (7), являющийся интегралом этих систем, будет иметь постоянное значение на оптимальных траекториях. В соответствии с принципом максимума Л. С. Понтрягина при оптимальных функциях управления гамильтониан H_λ должен быть максимален. Начальными данными для системы (8) служат условия трансверсальности, записываемые на границе неоднородное покрытие — демпфируемая пластина

(9) $$\lambda_{z_{jk}^{(n)}}(\xi_l) + \frac{\partial I}{\partial z_{jk}^{(n)}(\xi_l)} = 0 \qquad (n = 1, 2).$$

Однако, как следует из выражений (3) и (6), условия (9) не определяют значения множителей Лагранжа при $\xi = \xi_l$, а лишь дают связь их со значениями входных упругостных импеданцев, не известных на этой границе (значения $z_{jk}^{(n)}$ заданы при $\xi = 0$). Таким образом, нахождение упругостных импеданцев и функций Лагранжа может быть осуществлено в результате решения двухточечной задачи для систем уравнений (5) и (8) с неизвестными концевыми значениями импеданцев (при $\xi = \xi_l$). Решение подобных

задач сопряжено с большими вычислительными трудностями. В этой связи ниже будет рассмотрен ограниченный класс допустимых к вариациям функций управления, а именно класс кусочно-постоянных функций управления. Задача будет состоять в том, чтобы показать, что подобные функции управления удовлеворяют необходимым условиям оптимальности, а отвечающими им конструкциями являются армированные вибропоглощающие покрытия типа рассматриваемых в [2, 4—6].

3. Для кусочно-постоянных функций управления на каждом подынтервале постоянства уравнения систем (5) и (8) могут быть проинтегрированы в конечном виде. Интегрируя систему (1) в попятном направлении (последовательно, начиная с третьего уравнения для Z_{22}), получим:

$$Z_{11}=Z_{11}^{\circ}+i\bar{\rho}\xi-i\frac{\sin^2\vartheta_0}{u}\xi+i\frac{\left(Z_{12}^{\circ}-\frac{\sin\vartheta_0}{u}\right)^2\sqrt{\frac{u}{\rho_*}}\operatorname{tg}(\xi\sqrt{u\rho_*})}{1+iZ_{22}^{\circ}\sqrt{\frac{u}{\rho_*}}\operatorname{tg}(\xi\sqrt{u\rho_*})}, \tag{10}$$

$$Z_{22}=\frac{Z_{22}^{\circ}+i\sqrt{\frac{\rho_*}{u}}\operatorname{tg}(\xi\sqrt{u\rho_*})}{1+iZ_{22}^{\circ}\sqrt{\frac{u}{\rho_*}}\operatorname{tg}(\xi\sqrt{u\rho_*})},$$

$$Z_{12}=\frac{\frac{\sin\vartheta_0}{u}\left[iZ_{22}^{\circ}\sqrt{\frac{u}{\rho_*}}\sin(\xi\sqrt{u\rho_*})-2\sin^2\left(\frac{\xi\sqrt{u\rho_*}}{2}\right)\right]+Z_{12}^{\circ}}{\cos(\xi\sqrt{u\rho_*})+iZ_{22}^{\circ}\sqrt{\frac{u}{\rho_*}}\sin(\xi\sqrt{u\rho_*})}.$$

Так как в формулах (10) Z°_{jk} представляют собой упругостные импеданцы нагрузки для слоя с параметрами u, ρ_* и ξ, то с помощью этих формул могут быть приближенно рассчитаны упругостные импеданцы неоднородного тонкого слоя, состоящего из произвольного числа однородных упругих слоев. Применительно к тонким слоисто-неоднородным упругим слоям из (10) получается

$$Z_{22}=\frac{Z_{22}^{\circ}+i\rho_*\xi}{1+iZ_{22}^{\circ}u\xi},\quad Z_{12}=\frac{Z_{12}^{\circ}+i\sin\vartheta_0 Z_{22}^{\circ}\xi-\sin\vartheta_0\rho_*\frac{\xi^2}{2}}{1+iZ_{22}^{\circ}u\xi}, \tag{11}$$

$$Z_{11}=Z_{11}^{\circ}+i\bar{\rho}\xi-$$

$$-i\xi\frac{iZ_{22}^{\circ}\sin^2\vartheta_0\xi+(2Z_{12}^{\circ}\sin^2\vartheta_0-Z_{12}^{\circ 2}u)\left(1+\frac{u}{3}\rho_*\xi^2\right)+\frac{\sin^2\vartheta_0}{3}\rho_*\xi^2}{1+iZ_{22}^{\circ}u\xi}.$$

Результаты расчетов по формулам (11), выполненные для различных конструкций армированных вибропоглощающих покрытий, хорошо согласуются с соответствующими данными, получаемыми с использованием известных соотношений [2, 4—5].

Интегрирование системы (8) в том же направлении, осуществляемое с помощью вспомогательной функции

$$\lambda_{z_{jk}}=\lambda_{z_{jk}^{(1)}}-i\lambda_{z_{jk}^{(2)}},$$

дает:

$$
\begin{aligned}
(12)\qquad & \lambda_{z_{11}^{(1)}} - i\lambda_{z_{11}^{(2)}} = \text{const},\\
& \lambda_{z_{12}} = [\lambda_{z_{12}^{(1)}}(\xi_0) - i\lambda_{z_{12}^{(2)}}(\xi_0)](1 - b_1\xi) + 2i\sin\vartheta_0 \times\\
& \times [\lambda_{z_{11}^{(1)}}(\xi_0) - i\lambda_{z_{11}^{(2)}}(\xi_0)]\,\xi,\\
& \lambda_{z_{22}} = [\lambda_{z_{22}^{(1)}}(\xi_0) - i\lambda_{z_{22}^{(2)}}(\xi_0)](1 - b_1\xi)^2 -\\
& - i\sin\vartheta_0\,[\lambda_{z_{12}^{(1)}}(\xi_0) - i\lambda_{z_{12}^{(2)}}(\xi_0)](1 - b_1\xi)\,\xi +\\
& + \sin^2\vartheta_0\,[\lambda_{z_{11}^{(1)}}(\xi_0) - i\lambda_{z_{11}^{(2)}}(\xi_0)]\,\xi^2.
\end{aligned}
$$

Здесь ξ_0 — начало подынтервала постоянства функции управления, а

$$b_1 = u^0[Z_{22}^{(2)}(\xi_0) + \gamma Z_{22}^{(1)}(\xi_0)] \text{ и } u^0 = \frac{\rho_0 c_0^2}{\mu_0(1+\gamma^2)}.$$

Таким образом, синтез оптимальной кусочно-постоянной функции управления в соответствии с принципом максимума схематически можно произвести следующим образом. Полагая, что значения коэффициента потерь оптимальных вибропоглощающих конструкций должны лежать в области ~0,05—0,2, для заданной частоты и параметров демпфируемой металлической пластины в соответствии с формулой (3) можно принять в качестве первого приближения следующие значения входных упругостных импедансцев

$$Z_{22}^{(1)}(\xi_l) \simeq 1, \quad Z_{22}^{(2)}(\xi_l) \simeq 1, \quad Z_{12}^{(1)}(\xi_l) \simeq 0{,}1, \quad Z_{12}^{(2)}(\xi_l) \simeq -0{,}1.$$

Удерживая в разложении (3) в ряд два первых его члена, из равенств (9) найдем выражения для концевых значений функций Лагранжа (при $\xi = \xi_l$):

$$
\begin{aligned}
(13)\qquad & \lambda_{z_{11}^{(1)}}^{(\xi_l)} = \frac{1}{\bar{\rho}_m \xi_m},\ \lambda_{z_{11}^{(2)}}(\xi_l) = -\frac{\eta_1}{\bar{\rho}_m \xi_m},\\
& \lambda_{z_{12}^{(1)}}(\xi_l) = -\frac{3}{2}\eta_1 \frac{\sin\vartheta}{\bar{\rho}_m},\ \lambda_{z_{12}^{(2)}}(\xi_l) = -\frac{\sin\vartheta}{\bar{\rho}_m},\\
& \lambda_{z_{22}^{(1)}}(\xi_l) = \frac{\sin^2\vartheta\xi_m}{4\bar{\rho}_m},\ \lambda_{z_{22}^{(2)}}(\xi_l) = -\frac{2}{3}\eta_1 \frac{\sin^2\vartheta\xi_m}{\bar{\rho}_m}\eta_1,
\end{aligned}
$$

где $\eta_1 = \dfrac{Z_{22}^{(1)}(\xi_l)}{4\bar{\rho}_m} - \dfrac{\sin\vartheta}{\bar{\rho}_m} Z_{12}^{(2)}(\xi_l) + \dfrac{Z_{11}^{(1)}(\xi_l)}{\bar{\rho}_m \xi_m}$.

Непосредственной подстановкой концевых значений упругостных импедансцев и лагранжевых множителей в выражение для гамильтониана (7) убеждаемся, что наибольший вклад в значение гамильтониана при $\xi = \xi_l$ вносит сумма

$$
\begin{aligned}
(14)\qquad & -2\sin\vartheta Z_{12}^{(2)}(\xi_l)\,\lambda_{z_{11}^{(1)}}(\xi_l) - \sin\vartheta Z_{22}^{(1)}(\xi_l)\,\lambda_{z_{12}^{(2)}}(\xi_l) +\\
& + D_1(\xi_l)\sin^2\vartheta\lambda_{z_{22}^{(2)}}(\xi_l).
\end{aligned}
$$

Так как $\lambda_{z_{(22)}^{(2)}}^{(\xi_l)}$ отрицательно, выражение (14) будет иметь максимальное значение при минимально возможной величине $D_1(\xi_l)$ (т. е. при $\bar{\mu}_0 = \bar{\mu}_{0\,\min}$). Аналогично, учитывая, что на границе неоднородного покрытия $Z_{jk}(0) = 0$, получается простое выражение для гамильтониана и при $\xi = 0$

$$(15)\qquad H_\lambda = -\bar{\rho}\lambda_{z_{11}^{(2)}}(0) + D_2\sin^2\vartheta\lambda_{z_{22}^{(1)}}(0) + [D_1(0)\sin^2\vartheta - \bar{\rho}]\,\lambda_{z_{22}^{(2)}}(0).$$

Если значения $\lambda_{z_{(22)}^{(2)}}(\xi_l)$ в соответствии с условиями трансверсальности должны были быть отрицательны, то значения $\lambda_{z_{(22)}^{(2)}}(\xi)$ при $\xi=0$ могут быть и положительными. Но тогда, как требует того принцип максимума, функция управления $D_1(\xi)$ должна быть максимальной при $\xi=0$. Подобные изменения управления с одного экстремального значения на другое не нарушают непрерывности ни упругостных импеданцев, ни функций Лагранжа, ни гамильтониана (условия Эрдмана — Вейерштрасса). Из непрерывности гамильтониана в точках изменения функции управления (в точках переключения) получается уравнение для определения соответствующих значений независимой переменной ξ_*:

$$
\begin{aligned}
(16)\qquad & H_\lambda(\bar{\mu}_{0\,\min}) - H_\lambda(\bar{\mu}_{0\,\max})]\,\frac{1}{u_{1\,\max}-u_{1\,\min}} = \\
& = [\varepsilon(Z_{12}^{(1)^2} - Z_{12}^{(2)^2}) + 2Z_{12}^{(1)}Z_{12}^{(2)}]\,\lambda_{z_{11}^{(1)}} + [-(Z_{12}^{(1)^2} - Z_{12}^{(2)^2}) + \\
& + 2\varepsilon Z_{12}^{(1)}Z_{12}^{(2)}]\,\lambda_{z_{11}^{(2)}} - [\varepsilon(Z_{22}^{(1)}Z_{12}^{(1)} - Z_{22}^{(2)}Z_{12}^{(2)}) + Z_{22}^{(1)}Z_{12}^{(2)} + \\
& + Z_{22}^{(2)}Z_{12}^{(1)}]\,\lambda_{z_{12}^{(1)}}] - [\varepsilon(Z_{22}^{(2)}Z_{12}^{(1)} + Z_{22}^{(1)}Z_{12}^{(2)}) - \\
& - (Z_{22}^{(1)}Z_{12}^{(1)} - Z_{22}^{(2)}Z_{12}^{(2)})]\,\lambda_{z_{12}^{(2)}} - [\varepsilon(Z_{22}^{(1)^2} - Z_{22}^{(2)^2}) + 2Z_{22}^{(1)}Z_{22}^{(2)}]\,\lambda_{z_{22}^{(1)}} + \\
& + [2\varepsilon Z_{22}^{(1)}Z_{22}^{(2)} + Z_{22}^{(1)^2} - Z_{22}^{(2)^2}]\,\lambda_{z_{22}^{(2)}} - \frac{D_{1\,\max}-D_{1\,\min}}{u_{1\max}-u_{1\,\min}}\sin^2\vartheta\lambda_{z_{22}^{(2)}} = 0 \\
& \left(\varepsilon = \frac{u_{2\,\max}-u_{2\,\min}}{u_{1\,\max}-u_{1\,\min}}\right).
\end{aligned}
$$

Точные значения корней уравнения (16) могут быть определены только численно. Однако, как показывают оценки, в первом приближении эти корни могут быть найдены из уравнения:

$$
\begin{aligned}
(17)\qquad & \lambda_{z_{22}^{(2)}}(\xi_*) = 0, \text{ т. е.} \\
& [(b_1^2 - b_2^2)\,\lambda_{z_{22}^{(2)}}(\xi_l) + 2b_1b_2\lambda_{z_{22}^{(1)}}(\xi_l) + \sin\vartheta\, b_2\lambda_{z_{12}^{(2)}}(\xi_l) - \\
& - \sin\vartheta b_1\lambda_{z_{12}^{(1)}}(\xi_l) + \sin^2\vartheta\lambda_{z_{11}^{(2)}}(\xi_l)]\,\xi_*^2 - [2b_1\lambda_{z_{22}^{(2)}}(\xi_l) + \\
& + 2b_2\lambda_{z_{22}^{(1)}}(\xi_l) - \sin\vartheta\lambda_{z_{12}^{(1)}}(\xi_l)]\,\xi_* + \lambda_{z_{22}^{(2)}}(\xi_l) = 0,
\end{aligned}
$$

где $b_2 = u^0\,[Z_{22}^{(1)}(\xi_l) - \gamma Z_{22}^{(2)}(\xi_l)]$.

Осуществляя небольшие вариации концевых значений упругих импеданцев (относительно значений, принятых выше в первом приближении), можно найти, что при $Z_{22}^{(1)}(\xi_l)=0{,}45$, $Z_{22}^{(2)}(\xi_l)=0{,}9$, $Z_{12}^{(1)}(\xi_l)=0{,}2$, $Z_{12}^{(2)}(\xi_l)=-0{,}1$ и $u^\circ=10$, $\omega=2\pi\ 1500$ *гц* уравнение (17) будет иметь один положительный корень ($\xi_*\simeq 0{,}04$). Иными словами, за резиноподобным слоем, непосредственно прилегающим к демпфируемой пластине, должен находиться слой пластмассы. Дальнейший анализ уравнения (16) на интервале независимой переменной, отвечающем жесткому слою, показывает, что на этом интервале уравнение (16) положительных корней не имеет. Из приближенного выражения для гамильтониана на границе неоднородное покрытие — демпфируемая пластина (14) седует, что значение гамильтониана растет с уменьшением величины $\bar{\mu}_{0\,\min}$. Иными словами, коэффициент потерь для оптимальных вибропоглощающих покрытий при заданной частоте и толщине покрытия должен быть больше, чем для жестких вибропоглощающих покрытий той же толщины. В заключение следует отметить, что при $u^0\to 0$ все приведенные выше соотношения переходят в соответствующие им равенства, полученные в работе [1] для жестких вибропоглощающих покрытий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Мачевариани.* К оптимальности кусочно-постоянных распределений параметров в жестких неоднородных вибропоглощающих слоях. Акуст. ж., 1975, *21*, 5, 771–776.
2. *А. С. Никифоров, С. В. Будрин.* Распространение и поглощение звуковых вибраций на судах. Л., «Судостроение», 1968.
3. *К. А. Лурье, М. М. Мачевариани.* Минимизация толщины неоднородного слоя при заданном коэффициенте отражения монохроматической волны. ПМТФ, 1969, 1, 44—50.
4. *E. Kerwin.* Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layers. J. Acoust. Soc. America, 1959, *31*, 7, 952—962.
5. *D. Ross, E. Ungar, E. Kerwin.* Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of Viscoelastic Laminal. Structural Damping Oxford, Pergamon Press, 1960, 49–87.
6. *В. И. Кашина, В. В. Тютекин.* Экспериментальное исследование армированных вибродемпфирующих конструкций. Акуст. ж., 1967, *13*, 3, 387—390.

Поступила
7 октября 1974 г.