АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXII 1976 Вып. 2

УДК 534.26

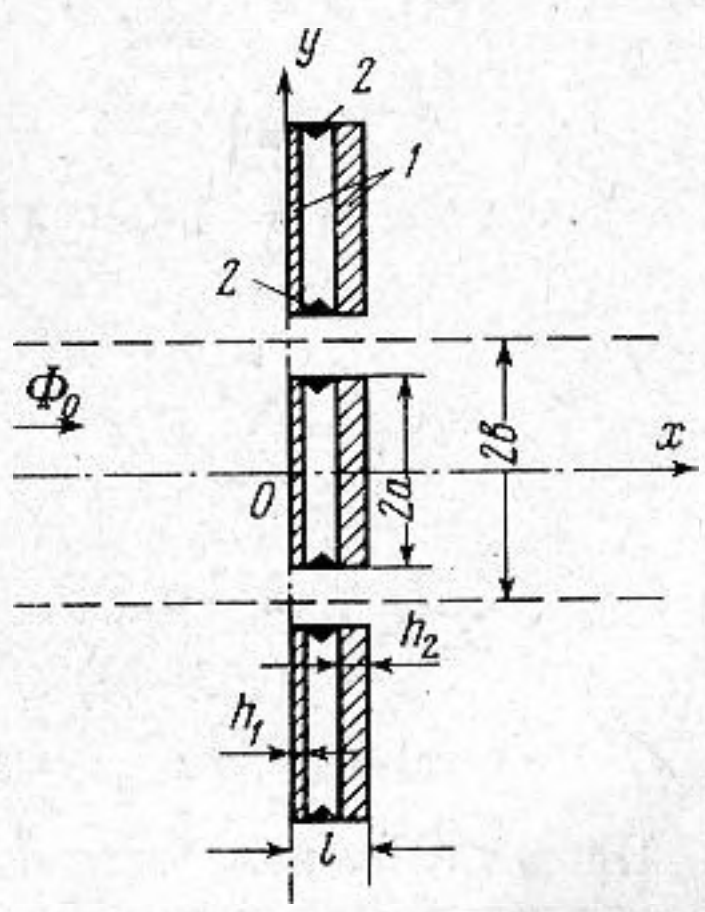
ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКОЙ РЕШЕТКЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ПОЛЫХ УПРУГИХ БРУСЬЕВ

И. В. Вовк, В. Т. Гринченко, Л. А. Кононученко

Методом частичных областей решена задача дифракции плоской звуковой волны на бесконечной решетке, состоящей из полых упругих брусьев. Проведен количественный анализ зависимости прозрачности решетки от частоты и параметров решетки и брусьев. Полученные данные сравниваются с данными для тех же случаев, когда брусья идеально жесткие и идеально мягкие.

В различных областях физики и техники, при исследовании волновых процессов, часто возникают задачи о дифракции волн на решетках из элементов различного профиля. Обширная литература [1, 2], посвященная таким задачам, содержит значительный объем количественных данных для тех случаев, когда рассеивающие элементы решетки можно считать идеальными.

Настоящая работа посвящена исследованию дифракции плоской звуковой волны на бесконечной решетке из прямоугольных брусьев с учетом упругости их стенок. Постановка такой задачи имеет целью количественно изучить эффекты взаимодействия звуковых волн с упругими элементами дифракционной решетки и, на основе полученных данных, оценить ее экранирующее действие в сравнении с таковыми для решетки, состоящей из идеальных элементов.



Фиг. 1. Решетка: *1* – пластинки, *2* – опоры

На фиг. 1 изображено сечение части рассматриваемой решетки плоскостью, нормальной к ее поверхности. Каждый элемент решетки представляет собой полый брус, образованный двумя тонкими упругими пластинками, шарнирно закрепленными на недеформируемых опорах.

Мы рассматриваем только случай нормального падения на решетку плоской звуковой волны, характеризуемой потенциалом скорости Φ_0. В связи с этим исследуемое поле может быть описано как поле в волноводе переменного сечения с идеально жесткими стенками. На фиг. 1 стенки такого волновода показаны штриховыми линиями.

Основными искомыми величинами являются потенциал скорости звукового поля $\Phi(x, y)$ и колебательные скорости упругих пластин $V_1(y)$ и $V_2(y)$ на поверхностях $x_1=0$ и $x_2=l$, $|y|\leqslant a$. Эти величины определяются

из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta\Phi+k^2\Phi=0; \\ \dfrac{d^4V_i(y)}{dy^4}-k_i^4V_i(y)=-\dfrac{\omega^2\rho}{d_i}\Phi(y,x_i); \qquad i=1,2. \end{cases}$$

Здесь приняты обозначения: ω — круговая частота, d_i — цилиндрическая жесткость пластин, ρ — плотность среды окружающей решетку, k — волновое число звуковых волн в среде, k_i — волновое число изгибных волн в пластине.

В соответствии с указанными выше предположениями о типе падающей волны и свойствах элементов решетки решение системы (1) следует подчинить следующим граничным условиям:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\partial\Phi/\partial y=0; \quad |y|=b; \quad |x|<\infty; \\ &\partial\Phi/\partial y=0; \quad |y|=a; \quad 0\leqslant x\leqslant l; \\ &-\partial\Phi/\partial x=V_i(y); \quad x=x_i; \quad |y|\leqslant a; \\ &V_i(y)=d^2V_i(y)/dy^2=0; \quad |y|=a; \quad x=0; \quad x=l. \end{aligned}$$

Эффективность решения сформулированной граничной задачи во многом определяется возможностью представить искомое звуковое поле во всей области его существования в виде полных наборов хорошо изученных функций, используемых при анализе свойств волноводов с идеальными стенками [3]. С целью фактической реализации этой возможности разделим всю область существования поля на три частичные области: I — $(x\leqslant 0)$, II — $(0\leqslant x\leqslant l)$ и III — $(x\geqslant l)$.

Для каждой из этих областей можно построить выражения для потенциалов скоростей, обладающие степенью функционального произвола, необходимой для удовлетворения соответственной части граничных условий (2) и условий сопряжения на границах раздела частичных областей. Эти выражения имеют вид:

$$(3)\qquad \Phi_{\mathrm{I}}=\Phi_0+\sum_{n=0}^{\infty}A_ne^{-jk_nx}\cos\alpha_ny,$$

$$\Phi_{\mathrm{II}}=\sum_{m=0}^{\infty}[B_m\cos k_mx+C_m\sin k_mx]\cos\alpha_m(y-a),$$

$$\Phi_{\mathrm{III}}=\sum_{n=0}^{\infty}D_ne^{jk_n(x-l)}\cos\alpha_ny,$$

$$k_n=\begin{cases}(k^2-\alpha_n^2)^{1/2}, & k\geqslant\alpha_n,\\ j(\alpha_n^2-k^2)^{1/2}, & k<\alpha_n,\end{cases}\qquad k_m=\begin{cases}(k^2-\alpha_m^2)^{1/2}, & k\geqslant\alpha_m,\\ j(\alpha_m^2-k^2)^{1/2}, & k<\alpha_m,\end{cases}$$

$$\alpha_n=n\pi/b, \quad \alpha_m=m\pi/(b-a).$$

Представим неизвестную колебательную скорость пластин в виде рядов по их собственным формам колебаний в вакууме. С учетом выражения (2) имеем:

$$(4)\qquad V_i(y)=\sum_{s=0}^{\infty}V_s^{(i)}\cos\alpha_sy, \qquad \alpha_s=(2s+1)\pi/a.$$

Содержащиеся в бесконечных рядах (3) и (4) комплексные коэффициенты A_n, B_m, C_m, D_n и $V_s^{(i)}$ должны быть определены в соответствии с требованиями граничных условий (2) и условий сопряжения на грани-

цах раздела частичных областей. Совокупность возникающих при этом функциональных уравнений легко преобразуется на основе свойств полноты и ортогональности в следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$
(5)\quad \begin{cases}
A_n jk_n N_n + \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m k_m N_{nm} - \sum\limits_{s=0}^{\infty} V_s^{(1)} N_{ns} = jk\delta_n, \\[2ex]
B_m N_m - \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n N_{nm} = \delta_m, \\[2ex]
B_m N_m \cos k_m l + C_m N_m \sin k_m l - \sum\limits_{n=0}^{\infty} D_n N_{nm} = 0, \\[2ex]
D_n jk_n N_n + \sum\limits_{m=0}^{\infty} [B_m \sin k_m l - C_m \cos k_m l] k_m N_{nm} + \sum\limits_{s=0}^{\infty} V_s^{(2)} N_{ns} = 0, \\[2ex]
V_s^{(1)} \theta_1 Z_s^{(1)} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n N_{ns} = \delta_s, \\[2ex]
V_s^{(2)} \theta_2 Z_s^{(2)} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} D_n N_{ns} = 0.
\end{cases}
$$

В системе (5) приняты следующие обозначения

$$
N_{nm} = \begin{cases}
b-a, \quad n=m=0, \\
(b-a)/2, \quad n(b-a)=mb \neq 0, \\
\dfrac{n \sin \dfrac{\pi n a}{b}}{\pi b \left[\left(\dfrac{m}{b-a} \right)^2 - \left(\dfrac{n}{b} \right)^2 \right]}, \quad n(b-a) \neq mb,
\end{cases}
$$

$$
N_n = \begin{cases} b; & n=0, \\ b/2; & n \neq 0, \end{cases}
$$

$$
N_m = \begin{cases} b-a; & m=0, \\ (b-a)/2; & m \neq 0, \end{cases}
$$

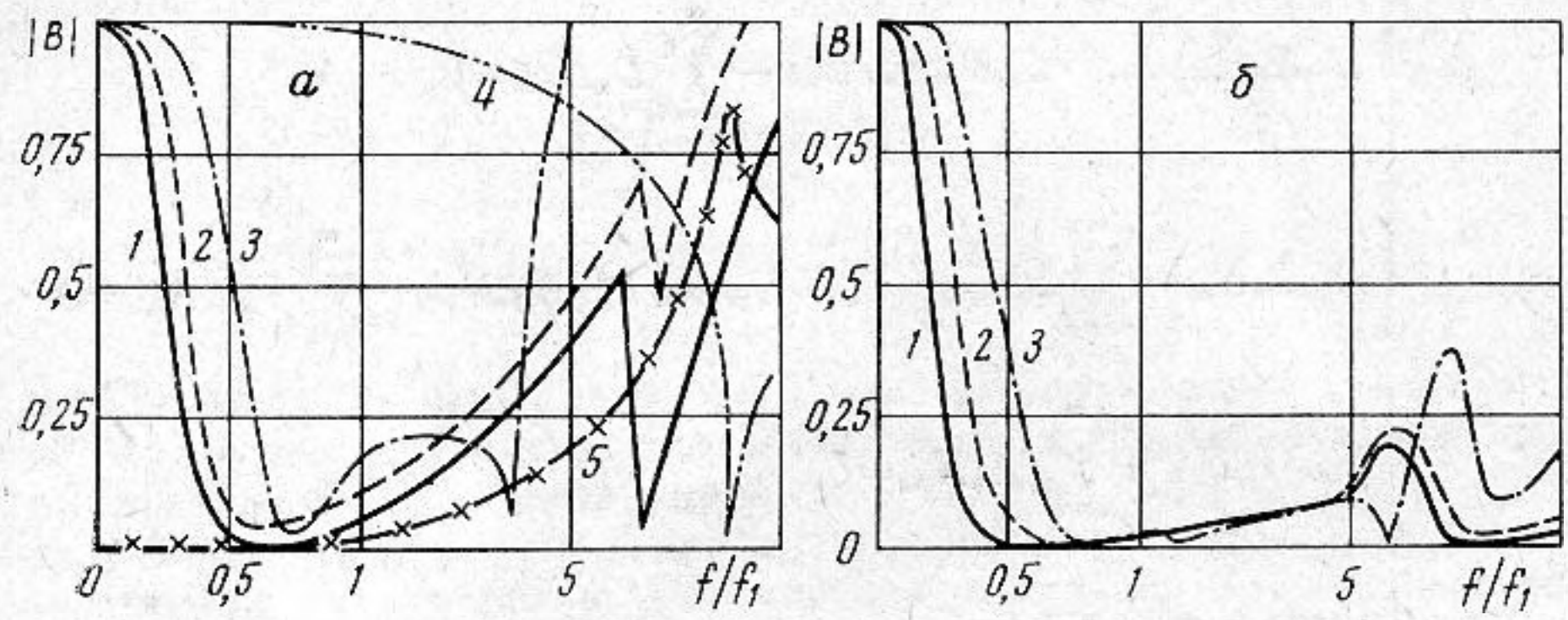
$$
\delta_n = \begin{cases} b; & n=0, \\ 0; & n \neq 0, \end{cases}
$$

$$
N_{ns} = \begin{cases}
2a(-1)^s/\pi(2s+1), \ n=0, \\
a/2, \ 2na = b(2s+1) \neq 0, \\
\dfrac{(-1)^{s+1}(2s+1)\cos \dfrac{\pi n a}{b}}{2\pi a \left\{ \left(\dfrac{n}{b} \right)^2 - \left[\dfrac{(2s+1)}{2a} \right]^2 \right\}}, \quad 2na \neq b(2s+1),
\end{cases}
$$

$$\delta_m = \begin{cases} b-a, & m=0, \\ 0 & m \neq 0, \end{cases} \qquad \delta_s = \frac{2a(-1)^s}{\pi(2s+1)},$$

$$\theta_i = a\rho_i h_i / 2\rho, \qquad Z_s = \left(\frac{f^{(i)}}{f}\right)^2 - 1,$$

$f_s^{(i)} = \frac{h_i}{2\pi}\left[\frac{\pi(2s+1)}{2a}\right]^2 \left\{\frac{E_i}{12\rho_i(1-\sigma_i^2)}\right\}^{1/2}$ — частоты собственных колебаний пластинок в вакууме, ρ_i, E_i, σ_i — плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материалов пластинок.



Фиг. 2. Зависимость коэффициента прохождения звука через решетку от частоты; кривым *1–3* соответствуют значения $2a/\lambda_1=0{,}04$; 0,06; 0,1; $l/\lambda_1=0{,}02$; *а* – $\varepsilon=0{,}5$; *б* – $\varepsilon=0{,}25$

Трудности решения бесконечной системы (5) в значительной мере определяются тем, какие характеристики звукового поля являются объектом исследования. Так, например, при попытке выяснить с помощью построенного решения тонкую структуру звукового поля в частичной области II, порядок конечной системы, соответствующей системе (5), может оказаться настолько большим, что возникнут значительные затруднения при численной реализации соответственного алгоритма. Нашей целью является исследование прозрачности решетки, характеризуемой модулем коэффициента прохождения звука $|B|$. Значение последнего (в рассматриваемой здесь области частот) полностью определяется значением неизвестного коэффициента D_0 в системе (5). Проведенные вычисления показали, что величина D_0 определяется практически точно при сохранении в системе (5) по $3 \div 5$ значений каждого неизвестного. Заметим, что вывод аналогичного характера сделан в работе [2] при исследовании дифракции плоской волны на решетке из абсолютно жестких брусьев.

Перейдем к анализу зависимости величины $|B|$ от частоты, параметров решетки и ее элементов. Все расчеты проводились для решетки, находящейся в воде ($\rho=1$ *г/см*^{3}, $c=1{,}5\cdot10^5$ *см/сек*), а обе упругие пластинки полагались одинаковыми и выполненными из титанового сплава ($\rho_1=4{,}5$ *г/см*^{3}, $E_1=1{,}16\cdot10^{12}$ *дин/см*^{2}, $\sigma_1=0{,}3$).

На фиг. 2 приведены кривые, характеризующие частотную зависимость величины $|B|$ при различных волновых размерах пластинок и коэффициентах перфорации $\varepsilon=1-a/b$; здесь $\lambda_1=c/f_1$, f_1 — первая собственная частота пластинок в вакууме. Заметим, что для наглядности участок оси абсцисс от 0 до 1 растянут в пять раз.

Как следует из представленных на фиг. 2 данных, на частотах, лежащих значительно ниже частоты f_1, рассматриваемая решетка звукопрозрачна. С ростом частоты прозрачность решетки быстро уменьшается и достигает своего минимального значения вблизи f_1, после чего, по мере

приближения ко второй собственной частоте пластинок в воде, наблюдается постепенное увеличение звукопрозрачности.

Приведенные данные позволяют оценить влияние коэффициента перфорации и волнового размера пластин на прохождение звука через решетку. Зададимся некоторой величиной $|B|$, например $|B|=0{,}15$, ниже которой решетку можно считать практически непрозрачной.

Как следует из фиг. 2, полоса частот Δf (на уровне $|B|=0{,}15$), в которой решетка непрозрачна существенным образом зависит от величины ε и $2a/\lambda_1$. При этом, как и можно было ожидать, увеличение ε приводит к уменьшению Δf. Увеличение размера пластин $2a/\lambda_1$ (при $f_1=\text{const}$) также приводит к сужению полосы Δf. Последнее обстоятельство объясняется тем, что с ростом размера пластин добротность механической системы упругая пластина — жидкость возрастает.

Приведенные выше результаты интересно сравнить с данными работы [2], относящимися к дифракции звуковых волн на решетке из акустически жестких брусьев, а также работы [1], где изучалась дифракция электромагнитных волн на решетке из идеально проводящих металлических брусьев для случая E-поляризации, который эквивалентен в акустике случаю идеально мягких брусьев. С этой целью на фиг. 2, *а* приведены кривые *4* и *5*, соответствующие случаям идеально жестких и мягких брусьев при $2a/\lambda_1=0{,}06$. Сравнение кривых *2*, *4* и *5* дает возможность установить, что на частотах значительно ниже f_1 рассматриваемая решетка ведет себя как решетка из жестких брусьев.

Совсем иначе обстоит дело на частотах, лежащих в области частоты f_1 и несколько выше. Здесь рассматриваемая решетка по своим свойствам приближается к решетке, состоящей из акустически мягких брусьев. При этом важным обстоятельством является то, что, выбирая надлежащим образом элементы решетки, можно обеспечить довольно широкую полосу частот, где экранирующее действие решетки из упругих брусьев эквивалентно присущему решетке, состоящей из идеально мягких брусьев.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. П. Шестопалов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб.* Дифракция волн на решетках. Изд-во Харьковского гос. ун-та, 1973.
2. *Е. Л. Шендеров.* Волновые задачи гидроакустики. Л., «Судостроение», 1972.
3. *М. А. Исакович.* Общая акустика. М., «Наука», 1973.

Поступила
11 августа 1975 г.