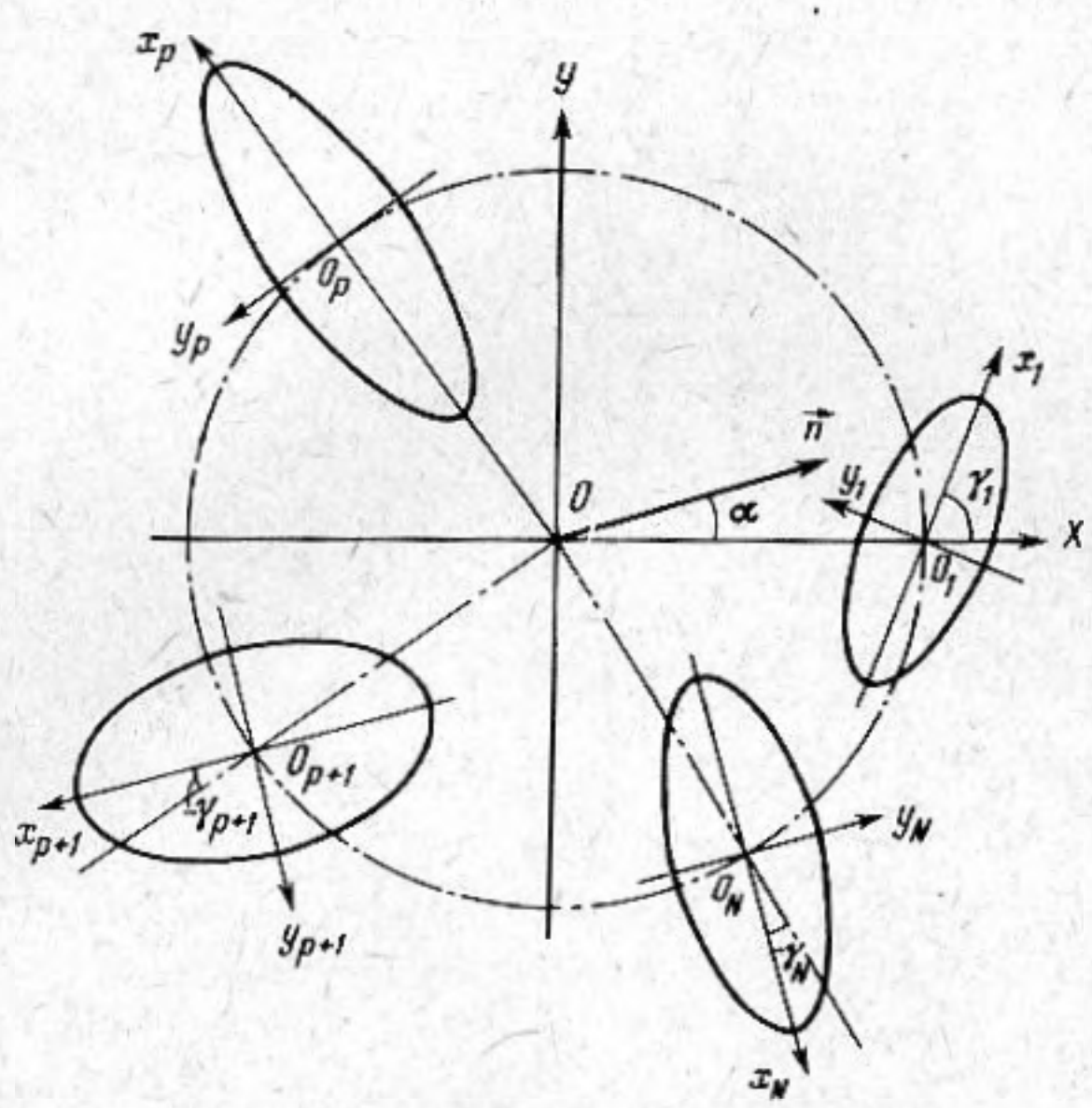
УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА КРУГОВОЙ СИСТЕМЕ АКУСТИЧЕСКИ ЖЕСТКИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

А. Г. Лейко, Б. А. Омельченко

Определим звуковое поле, рассеянное системой из N акустически жестких эллиптических цилиндрических рассеивателей при нормальном падении на нее плоской волны. Рассеиватели расположены в неограниченной однородной изотропной среде, имеют бесконечную длину, произвольные поперечные размеры и ориентацию, а их продольные оси образуют круговую цилиндрическую решетку.



Фиг. 1. Нормальное сечение круговой решетки эллиптических цилиндрических рассеивателей

На фиг. 1 изображены эллипсы сечений рассеивателей $s=1, \ldots, N$, единичный вектор $\mathbf{n}$ направления падения плоской звуковой волны и системы координат: общая прямоугольная система OXY с началом в центре круговой системы рассеивателей, ось OX которой направлена по лучу OO_1, соединяющему центр круговой системы с центром эллипса $s=1$; общая полярная система ρ, φ с центром O; локальные прямоугольные системы $O_s x_s y_s$, оси $O_s x_s$ которых совпадают с большими диаметрами эллипсов сечений рассеивателей и образуют углы γ_s с лучами OO_s; локальные полярные координаты ρ_s, φ_s с центрами O_s, расположенными на окружности радиуса $\rho=r$ под углами φ_{0s} к оси OX; локальные эллиптические координаты ξ_s, η_s, в которых эллипсы сечений рассеивателей обозначены через ξ_s^0.

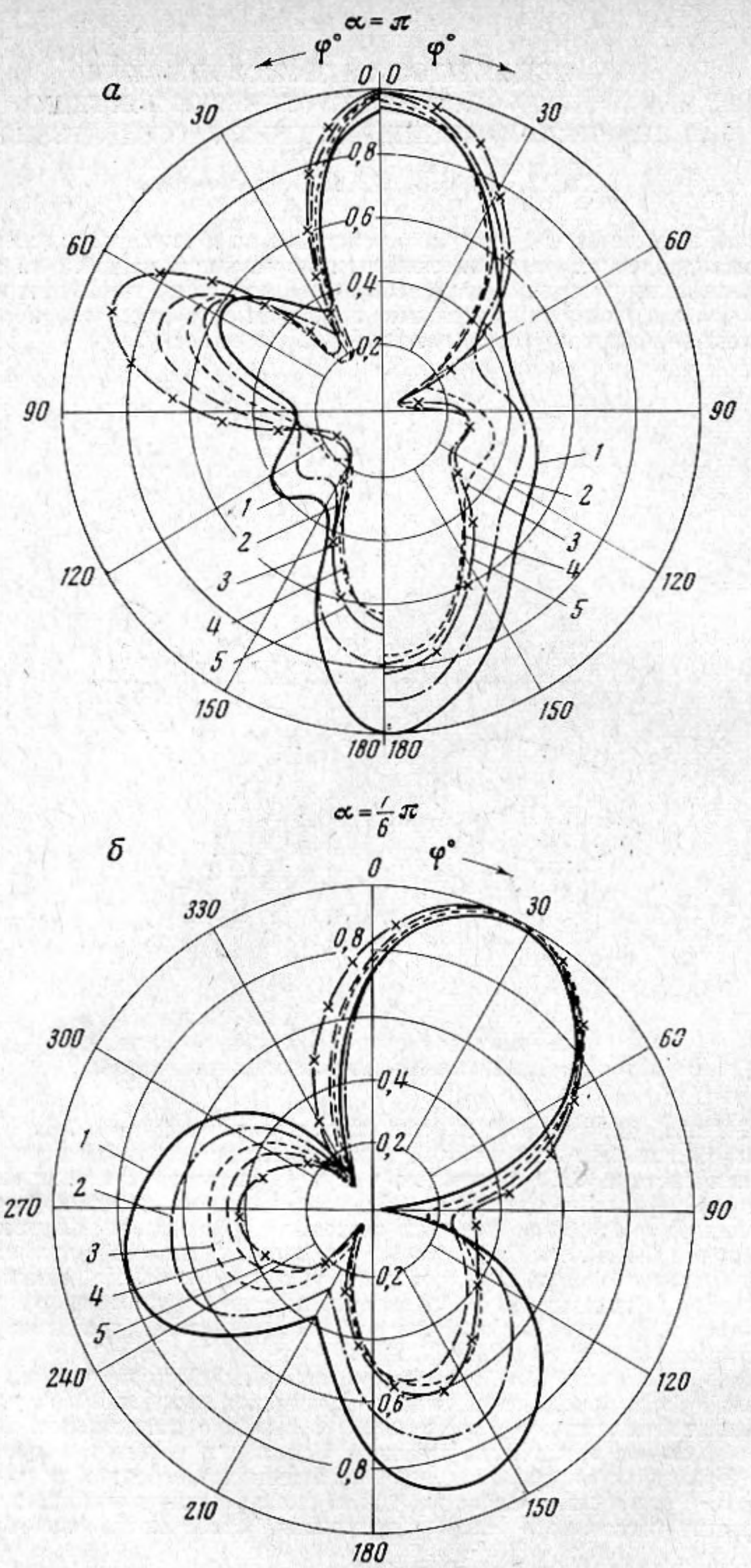
Рассеянное поле может быть определено решением двумерного скалярного волнового уравнения Гельмгольца относительно потенциала скорости $\Phi^{(1)}$, удовлетворяющего на поверхности каждого из цилиндров в сумме с потенциалом скорости $\Phi^{(0)}$ поля падающей волны граничным условиям Неймана и условию излучения на бесконечности. Процедура определения его аналогична приведенной в работе [1].

Опуская промежуточные выкладки, дадим окончательные выражения для потенциала скорости рассеянного поля (временная зависимость выбрана в виде $\exp[-i\omega t]$

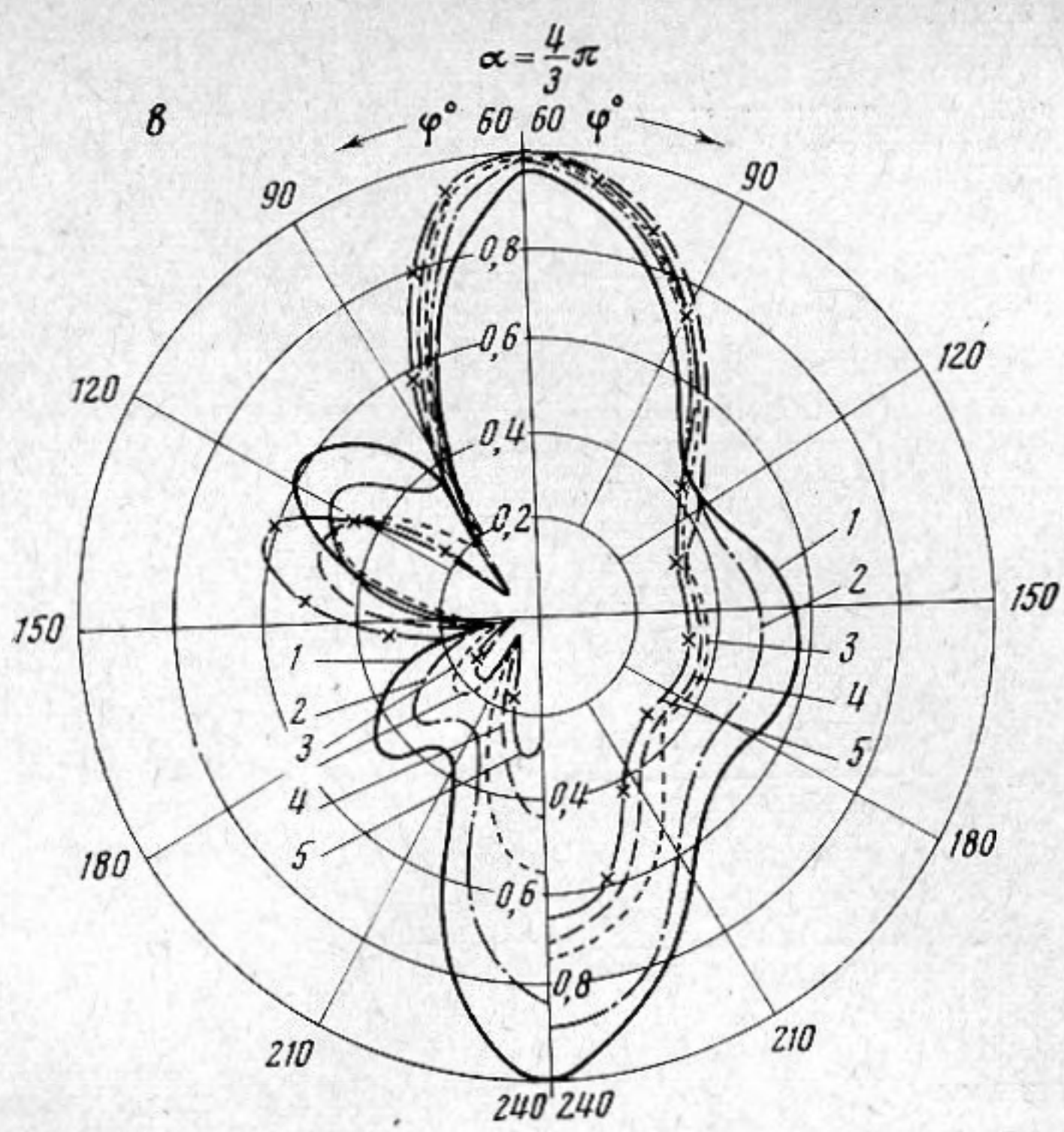
$$\Phi^{(1)} = \sum_{s=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \{x_n^{(s)} c_n C' e_n(\xi_s^0, q_s) c_n M e_n^{(1)}(\xi_s, q_s) ce_n(\eta_s, q_s) + \tag{1}$$

$$+ y_n^{(s)} d_n S' e_n(\xi_s^0, q_s) d_n N e_n^{(1)}(\xi_s, q_s) se_n(\eta_s, q_s)\},$$

где $x_n^{(s)}$ и $y_n^{(s)}$ — некоторые коэффициенты, $Ce_n(\xi_s^0, q_s)$ и $Se_n(\xi_s^0, q_s)$ — четная



Фиг. 2. Диаграмма направленности поля, рассеянного круговой решеткой из трех рассеивателей с параметрами: $kr=0{,}5\,\pi$; π; $\varphi_s=\frac{2\pi}{3}(s-1)$; $\gamma_s=0$; $a_s=0{,}25$; $\xi_s^0=0{,}0$ (*1*); 0,1 (*2*); 0,3 (*3*); 0,5 (*4*); 0,7 (*5*); $s=1, 2, 3$ при падении плоской волны в направлении $\alpha=\pi$ (*а*), $^7/_6\pi$ (*б*) и $^4/_3\pi$ (*в*)



Фиг. 2 *в*

и нечетная радиальные функции Матье n-го порядка, $Me_n^{(1)}(\xi_s, q_s)$ и $Ne_n^{(1)}(\xi_s, q_s)$ — четная и нечетная комбинированные функции Матье первого рода n-го порядка, $ce_n(\eta_s, q_s)$ и $se_n(\eta_s, q_s)$ — четная и нечетная угловые функции Матье n-го порядка, $c_n=c_n(q_s)$ и $d_n=d_n(q_s)$ — коэффициенты пропорциональности, $q_s=\left(\frac{kf_s}{2}\right)^2$ k — волновое число, $2f_s$ — расстояние между фокусами эллипса нормального сечения s-го рассеивателя; штрих означает производную функцию по радиальной координате ξ.

В волновой зоне системы рассеивателей, для которой комбинированные функции Матье можно заменить их асимптотическими представлениями [2], выражение (1) для потенциала скорости рассеянного поля упрощается и в полярных координатах ρ, φ с центром в точке O приобретает вид

$$\Phi_{\text{д}}^{(1)}(\rho,\varphi)=\left(\frac{2}{\pi k\rho}\right)^{1/2} e^{i(k\rho-\pi/4)}\sum_{s=1}^{N} e^{ikr\cos(\alpha-\varphi_{0s})}\times \tag{2}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\left[x_n^{(s)} c_n C' e_n(\xi_s^0, q_s)\, ce_n(\varphi-\varphi_{0s}-\gamma_s, q_s)+\right.$$

$$\left.+\, y_n^{(s)} d_n S' e_n(\xi_s^0, q_s)\, se(\varphi-\varphi_{0s}-\gamma_s, q_s)\right].$$

Коэффициенты разложения $x_n^{(s)}$ и $y_n^{(s)}$ определяются бесконечной системой линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$x_n^{(s)}+\sum_{\substack{p=1\\ p\neq s}}^{N}\sum_{m=0}^{\infty}\left[a_{nm}^{(p,s)} x_m^{(p)}+b_{nm}^{(p,s)} y_m^{(p)}\right]=\alpha_n^{(s)}, \tag{3}$$

$$y_n^{(s)}+\sum_{\substack{p=1\\ p\neq s}}^{N}\sum_{m=0}^{\infty}\left[v_{nm}^{(p,s)} x_m^{(p)}+w_{nm}^{(p,s)} y_m^{(p)}\right]=\beta_n^{(s)}, \quad s=1,\ldots,N; \quad n=0,1,2,\ldots$$

с матричными элементами

$$a_{nm}^{(p,s)} = 2\frac{c_m C' e_m(\xi_p^0, q_p)}{c_n M e^{(1)\prime}(\xi_s^0, q_s)} Q_{mn}^{(1)}(p, s; \gamma_{sp});$$

$$b_{nm}^{(p,s)} = 2\frac{d_m S' e_m(\xi_p^0, q_p)}{c_n M e_n^{(1)\prime}(\xi_s^0, q_s)} \tilde{Q}_{mn}^{(1)}(p, s; \gamma_{sp});$$

$$v_{nm}^{(p,s)} = 2\frac{c_m C' e_m(\xi_p^0, q_p)}{d_n N e_n^{(1)\prime}(\xi_s^0, q_s)} R_{mn}^{(1)}(p, s; \gamma_{sp});$$

$$w_{nm}^{(p,s)} = 2\frac{d_m S' e_m(\xi_p^0, q_p)}{d_n N e_n^{(1)\prime}(\xi_s^0, q_s)} \tilde{R}_{mn}^{(1)}(p, s; \gamma_{sp})$$

$$\alpha_n^{(s)} = -\frac{ce_n(\alpha-\varphi_{0s}-\gamma_s, q_s)}{c_n M e^{(1)\prime}(\xi_s^0, q_s)} e^{ikr\cos(\alpha-\varphi_{0s})}$$

$$\beta_n^{(s)} = -\frac{se_n(\alpha-\varphi_{0s}-\gamma_s, q_s)}{d_n N e^{(1)\prime}(\xi_s^0, q_s)} e^{ikr\cos(\alpha-\varphi_{0s})}.$$

Коэффициенты $Q_{mn}^{(1)}$, $\tilde{Q}_{mn}^{(1)}$, $R_{mn}^{(1)}$, $\tilde{R}_{mn}^{(1)}$ приведены в работе [1]. Бесконечная система уравнений (3) относится к системам с вполне непрерывной формой и разрешима методом усечения.

В качестве примера определим угловое распределение поля рассеяния для круговой системы, образованной из трех идентичных эллиптических цилиндрических рассеивателей, центры которых равномерно ($\varphi_{0s}={}^2/_3\pi(s-1)$, $s=1, \ldots, 3$) расположены на окружности радиуса r, а большие оси эллипсов сечений рассеивателей направлены вдоль лучей OO_s ($\gamma_s=0$). Вычисление амплитудных диаграмм направленности рассеянного поля $F(\varphi)=\dfrac{|\Phi_Д^{(1)}(\rho, \varphi)|}{\text{макс}|\Phi_Д^{(1)}(\rho, \varphi)|}$ было произведено по формулам (2) и (3) для направлений прихода плоской звуковой волны, равных π; $\frac{7}{6}\pi$ и $\frac{4}{3}\pi$, волновых размеров эллипсов сечений рассеивателей, соответствующих $q=0{,}25$ и $\xi^0=0$; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7, и волновых размеров радиуса окружности центров рассеивателей $kr=0{,}5\pi$ и π.

При расчетах порядок усечения системы уравнений (3) принимался равным 5. Результаты расчетов представлены на фиг. 2. Кривые *1–5* соответствуют значениям ξ^0, равным 0; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7, и углу прихода плоской волны α, указанному на фигуре.

Ввиду симметрии диаграмм относительно направлений прихода плоской волны при углах прихода $\alpha=\pi$ и $\frac{4}{3}\pi$ диаграммы $F(\varphi)$ приведены на фиг. 2, *а* и *в* в диапазонах углов (0°, 180°) и (60°, 240°) соответственно. При этом в левой половине фигур изображены диаграммы $F(\varphi)$ для $kr=\pi$, в правой – для $kr=0{,}5\pi$.

Анализ полученных результатов показывает, что в отличие от круговой системы, образованной из акустически мягких рассеивателей [1], круговая система акустически жестких цилиндров рассеивает энергию в основном в ту часть пространства, откуда пришла плоская волна. При этом диаграммы имеют выраженный основной лепесток, который обостряется по мере увеличения волнового размера радиуса системы kr. Увеличение степени выпуклости рассеивателей ξ^0 сопровождается увеличением уровня боковых лепестков диаграмм рассеяния и мало влияет на ширину основного лепестка.

Для направлений прихода плоской волны, близких к осям симметрии круговой системы, уровень тыльного лепестка диаграмм рассеяния равен единице, если рас-

сеиватели системы представляют собой бесконечно тонкие ленты, и уменьшается по мере увеличения степени выпуклости рассеивателей.

Для других углов α прихода плоской волны наблюдается одностороннее рассеяние энергии при любой толщине цилиндров системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г. Лейко, Б. А. Омельченко.* Поле рассеяния для круговой системы акустически мягких эллиптических цилиндрических рассеивателей. Акуст. ж., 1976, *22*, 2, 250–256.
2. *Е. А. Иванов.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск, «Наука и техника», 1968.

Поступила
31 января 1975 г.

УДК 534.222

ПОТОКИ В ИДЕАЛЬНОЙ, НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИЯМИ ТЕЛА

М. А. Миронов

При движении тела в идеальной несжимаемой жидкости скорость течения в любой точке среды однозначно определяется скоростью тела и его формой и размерами в данный момент. Чем «шире» тело в поперечном по отношению к движению направлении, тем больше скорость среды. При осцилляции тела неизменных размеров и формы смещение частиц среды, происходящее во время движения его в одну сторону, полностью компенсируется во время движения в другую сторону. Если же в процессе осцилляции размеры или форма меняются, то такой компенсации не будет. Пусть, например, при движении вправо тело «шире», чем при движении влево. Тогда в точках перед телом скорость течения в полупериод движения вправо будет больше, чем в полупериод движения влево. Это означает, что средняя за период скорость течения отлична от нуля, причем возникающий стационарный поток направлен вправо.

В качестве примера, иллюстрирующего количественную сторону этого явления, рассмотрим стационарный поток, возникающий около осциллирующей и одновременно пульсирующей сферы. Пусть центр сферы движется по оси $0x$ по закону $x=X(t)$, а объем ее изменяется по закону $v=V(t)$. Поле скоростей, вызванное поступательным движением, имеет вид [1]

$$\mathbf{v}_1 = \frac{R^3}{2r^3}\left[3\mathbf{n}(\dot{\mathbf{X}}\mathbf{n}) - \dot{\mathbf{X}}\right],$$

а вызванное пульсационным движением –

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{dV/dt}{r^2}\mathbf{n}.$$

Здесь $\mathbf{X}=X(t)\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k}$ – радиус-вектор, определяющий положение центра сферы, R – ее радиус, r – расстояние от центра сферы до точки наблюдения, $\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении из центра сферы на точку наблюдения. Пусть $\mathbf{X}(t)$ и $V(t)$ – периодические функции. Постоянный поток представляет собой усредненное по времени поле скоростей $\langle\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\rangle$. На большом по сравнению с амплитудой осцилляций расстоянии расчет дает следующее выражение:

$$\langle\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\rangle = \frac{1}{r_0^3}\left[3\mathbf{n}_0(\mathbf{n}_0\mathbf{M}) - \mathbf{M}\right], \tag{1}$$

где

$$\mathbf{M} = \frac{1}{8\pi}\langle V(t)\dot{\mathbf{X}}(t)\rangle, \tag{2}$$

а r_0 – среднее расстояние от точки наблюдения до центра сферы.

Используем выражение (1) для исследования потока около газового пузырька, находящегося в звуковом поле. Длину звуковой волны примем много большей радиуса пузырька, вязкость жидкости учитывать не будем, а поглощение энергии