АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXII 1976 Вып. 3

УДК 534.833

ЗВУКОИЗОЛЯЦИЯ В ШИРОКИХ ТРУБАХ

А. Д. Лапин

Рассмотрена задача о распространении звука в широкой (по сравнению с длиной волны) цилиндрической трубе, имеющей на стенке близко расположенные друг от друга резонаторы.

Известно [1], что резонаторы являются эффективными изоляторами звука в узкой (по сравнению с длиной волны) трубе. Особенно большую и широкополосную звукоизоляцию дает цепочка близко расположенных друг от друга резонаторов Гельмгольца [2—4].

В работе [5] было показано, что при определенных условиях резонаторы являются эффективными изоляторами звука и в широкой (по сравнению с длиной волны) трубе. Ниже рассчитана звукоизоляция в широкой цилиндрической трубе, имеющей на стенке близко расположенные друг от друга резонаторы. Как и в работах [2—4], здесь расчет выполнен в предположении, что стенку с резонаторами можно охарактеризовать эффективным импеданцем Z.

Пусть труба радиуса R имеет стенки, характеризующиеся реактивным импеданцем Z. Исследуем нормальные волны в этой трубе. Направим ось z цилиндрической системы координат r, φ, z по оси трубы и напишем нормальные волны в виде

$$p=J_m(\zeta r)\cos(m\varphi)e^{i\xi z},$$

где J_m — функция Бесселя m-го порядка, $\xi=\sqrt{k^2-\zeta^2}$, k — волновое число. Из граничного условия на импеданцной стенке $r=R$ получим для ζ следующее дисперсионное уравнение:

$$\zeta R\frac{J_m'(\zeta R)}{J_m(\zeta R)}=i\eta kR, \tag{1}$$

где $\eta=\rho c/Z$ — относительная податливость стенки, ρ и c — соответственно плотность среды и скорость звука в ней, штрих означает дифференцирование по аргументу.

Корни дисперсионного уравнения (1) можно найти графическим методом, аналогичным изложенному в работе [6]. На фиг. 1 сплошными линиями даны графики левой части уравнения (1) при $m=0, 1, 2, 3$; здесь по оси абсцисс отложена величина ζR (вправо — вещественные положительные значения, влево — мнимые положительные значения), а по оси ординат отложена величина

$$Y_m=(\zeta R)\frac{J_m'(\zeta R)}{J_m(\zeta R)}.$$

Исследование показывает, что при данном m функция $Y_m(\zeta R)$ имеет бесконечное число ветвей; ее n-я ветвь ($n=0, 1, 2, \ldots$) соответствует моде (m, n). Нулевая ветвь лежит в области мнимых положительных значений ζR и в полосе $0\leqslant\zeta R<\nu_{m0}$; n-я ветвь (при $n\neq0$) лежит в интервале

$\nu_{m(n-1)}<\zeta R<\nu_{mn}$, где ν_{mn} — n-й положительный корень уравнения $J_m(\nu)=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$.

На той же фигуре приведены графики правой части уравнения (1) в функции kR; штриховая парабола $Y=\frac{\rho c^2}{\varkappa R}(kR)^2$ соответствует податливости упругого типа $\eta=-i\rho c\omega/\varkappa$, где $\varkappa$ — поверхностный коэффициент упругости стенки; штрихпунктирная прямая линия $Y=-R\rho/\rho_0$ соответствует податливости массового типа $\eta=i\rho c/\omega\rho_0$, где ρ_0 — поверхностная плотность стенки. Абсцисса точки пересечения графика правой части уравнения (1) с n-й ветвью функции $Y_m(\zeta R)$ дает критическое значение $(kR)_{\text{кр}}$ для моды (m, n) в трубе с импеданцными стенками. Мода (m, n) — распространяющаяся (однородная) при $\omega>\omega_{mn}=ck_{\text{кр}}$ и нераспространяющаяся (неоднородная) при $\omega<\omega_{mn}$. При данной частоте ω величина ζR для моды (m, n) равна абсциссе точки пересечения прямой линии $Y=-i\eta kR=\text{const}$ с n-й ветвью функции $Y_m(\zeta R)$.

Критические частоты моды (m, n) в трубе с абсолютно жесткими стенками и в трубе с абсолютно мягкими стенками известны [6]; они равны $\omega_{mn}^{(ж)}=c\mu_{mn}/R$ и $\omega_{mn}^{(м)}=c\nu_{mn}/R$ соответственно. Здесь через μ_{mn} обозначен n-й корень уравнения $J_m'(\mu)=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$; нумерация корней производится в порядке их возрастания, начиная с корня $\mu=0$ при $m=0$ и с наименьшего положительного корня при $m\neq0$.

В результате исследования дисперсионного уравнения (1) графическим методом можно сделать важные заключения о критических частотах мод в трубе с импеданцными стенками.

При податливости упругого типа ($\operatorname{Im}\eta<0$) критическая частота моды $(0, 0)$ равна нулю, а критическая частота моды (m, n) при m или $n\neq0$ меньше частоты $\omega_{mn}^{(ж)}$. Частота ω_{mn} удовлетворяет соотношениям:

$$0<\omega_{m0}<\omega_{m0}^{(ж)} \quad \text{при} \quad m\neq0;$$

$$\omega_{m(n-1)}^{(м)}<\omega_{mn}<\omega_{mn}^{(ж)} \quad \text{при} \quad n\neq0;$$

$$\omega_{mn}\to\omega_{mn}^{(ж)} \quad \text{при } \operatorname{Im}\eta\to0, m \text{ или } n\neq0;$$

$$\omega_{m0}\to0 \quad \text{при } \operatorname{Im}\eta\to-\infty, \quad m\neq0;$$

$$\omega_{mn}\to\omega_{m(n-1)} \quad \text{при } \operatorname{Im}\eta\to-\infty, \quad n\neq0.$$

При податливости инерционного типа ($\operatorname{Im}\eta>0$) критическая частота моды (m, n) при любых m и n не равна нулю и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\omega_{mn}^{(ж)}<\omega_{mn}<\omega_{mn}^{(м)};$$

$$\omega_{mn}\to\omega_{mn} \quad \text{при } \operatorname{Im}\eta\to0;$$

$$\omega_{mn}\to\omega_{mn} \quad \text{при } \operatorname{Im}\eta\to\infty.$$

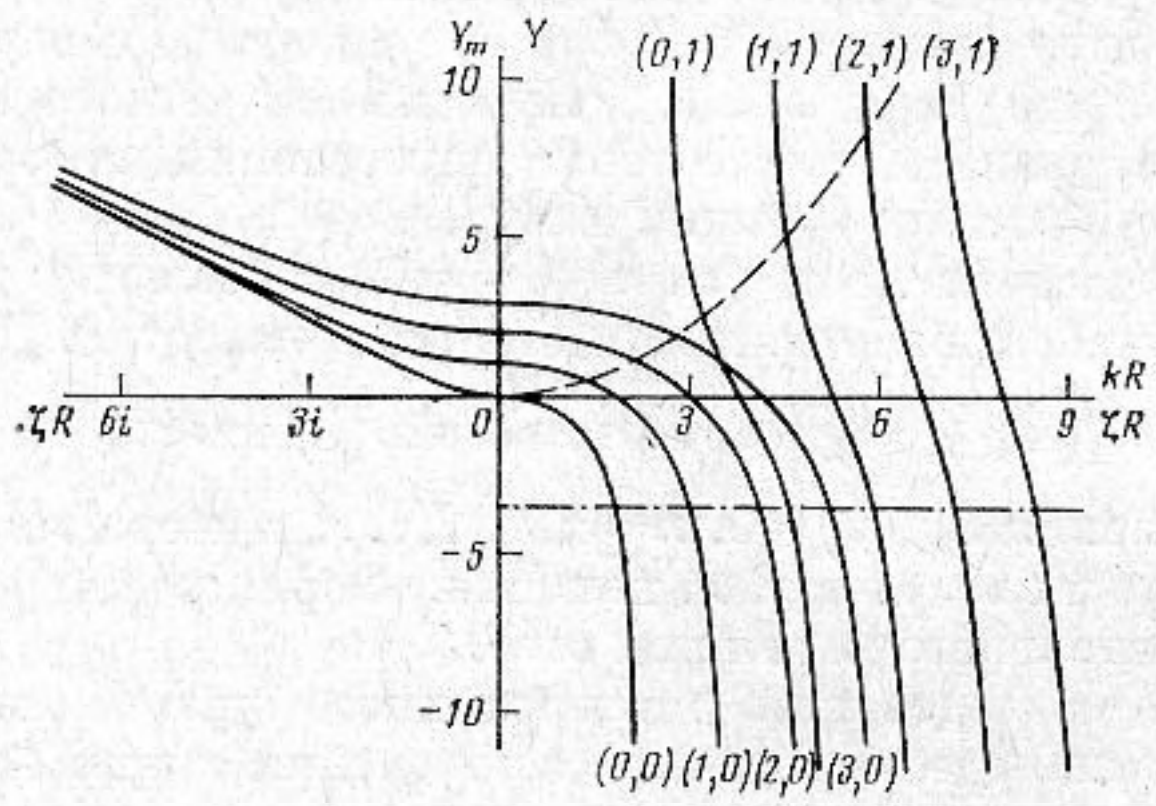
Из этих соотношений следует, что при замене абсолютно жестких стенок трубы стенками с податливостью инерционного типа повышаются критические частоты всех мод. В результате такой замены появляется полоса запирания для звуковых волн с симметрией нулевого порядка и расширяются полосы запирания для звуковых волн с симметрией других порядков.

Закономерности поведения критических частот мод в трубе с импеданцными стенками могут быть использованы на практике для целей звукоизоляции. Инерционный импеданц на стенках трубы можно создать, например, присоединяя к трубе горлышки резонаторов Гельмгольца, расположенных друг от друга на расстояниях, малых по сравнению с длиной

волны [2—4]. На частотах выше резонансной частоты ω_0 резонатора получается эффективный импеданц инерционного типа:

$$Z=-i\frac{2\rho c}{\gamma kR}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-1\right),$$

где $\gamma=\frac{\tilde{\Omega}}{\Omega}$, $\tilde{\Omega}$ — погонный объем сосудов резонаторов, $\Omega=\pi R^2$ — погонный объем трубы.



Фиг. 1. Графики левой и правой частей дисперсионного уравнения для трубы с импеданцными стенками

Для трубы, «облицованной» резонаторами Гельмгольца, дисперсионное уравнение (1) имеет вид

$$\zeta R\frac{J_m'(\zeta R)}{J_m(\zeta R)}=-\frac{\gamma}{2}\frac{(kR)^2}{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-1\right)} \tag{2}$$

Исследуем это уравнение графическим методом. На фиг. 2 даны графики левой (сплошные линии) и правой (штриховая линия при $kR<\frac{\omega_0}{c}R$ и штрихпунктирная линия при $kR>\frac{\omega_0}{c}R$) частей дисперсионного уравнения (2). Анализ этих графиков показывает, что при $\omega_0<\omega<\omega_{m0}=c\alpha_m/R$, где α_m — абсцисса точки пересечения штрихпунктирной линии с нулевой ветвью функции $Y_m(\zeta R)$, в трубе не могут распространяться звуковые волны с симметрией m-го порядка. Частота ω_{m0} удовлетворяет соотношению $\omega_{m0}^{(ж)}<\omega_{m0}<\omega_{m0}^{(м)}$. При частотах ниже собственной частоты ω_0 резонатора появляется полоса пропускания звука, обусловленная тем, что при этих частотах импеданц резонатора является импеданцем упругого типа.

На основании этих результатов можно сделать следующие заключения об оптимальной конструкции изоляторов звука в трубе. Для изоляции волн с симметрией нулевого порядка резонансную частоту ω_0 следует выбирать малой по сравнению с частотой $\omega_{00}^{(м)}$; звукоизоляция будет иметь место в полосе $\omega_0<\omega<\omega_{00}=c\alpha_0/R$. Для изоляции волн с симметрией m-го порядка ($m\neq0$) резонаторы следует присоединять к трубе вдали от источника шума, тогда по трубе к резонаторам придут только звуковые волны частот,

больших $\omega_{m0}^{(ж)}$. Выбирая резонансную частоту, равной $\omega_{m0}^{(ж)}$, мы получим эффективную звукоизоляцию в полосе $0<\omega<\omega_{m0}=c\alpha_m/R$. Корни дисперсионного уравнения (2), а следовательно, и постоянные распространения ξ мод в трубе, можно получить и в аналитическом виде, аппроксимируя тем или иным способом левую часть этого уравнения.

Предположим, что модуль правой части уравнения (2) мал по сравнению с единицей. Тогда для моды (0, 0) выполняются соотношения

$$|\zeta_{00}R|\ll 1, \quad (\zeta_{00}R)\frac{J_0'(\zeta_{00}R)}{J_0(\zeta_{00}R)}\approx -\frac{1}{2}(\zeta_{00}R)^2,$$

и мы получим для $\xi_{00}^2=k^2-\zeta_{00}^2$ следующее выражение:

$$\xi_{00}^2=-k^2\left[\gamma\frac{\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2}-1\right]. \tag{3}$$

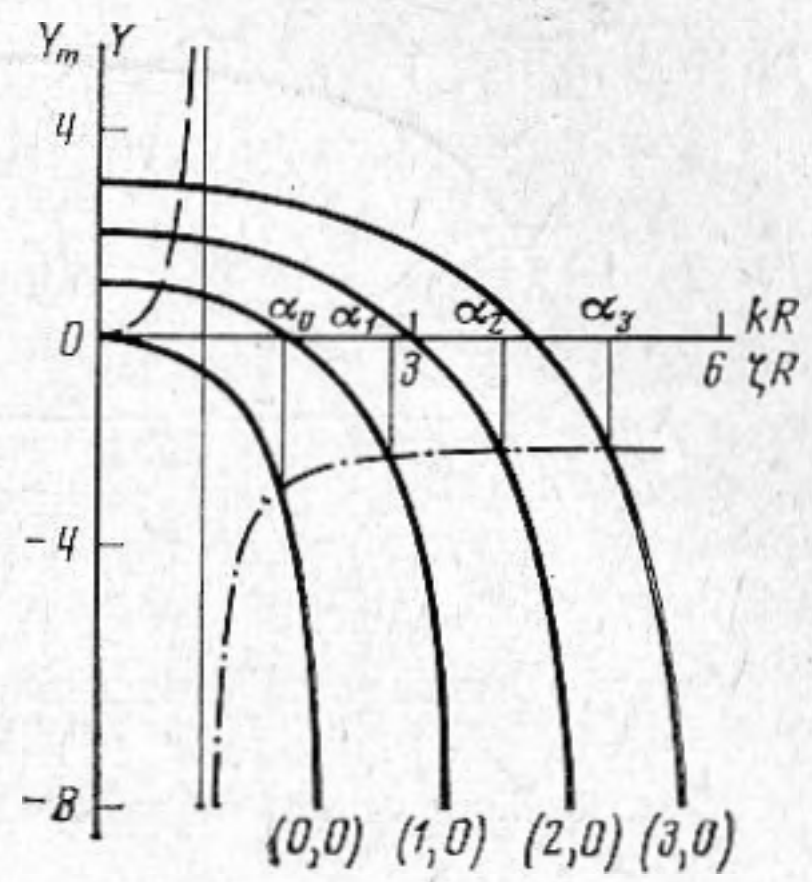
Впервые формула (3) была получена в работах [2—4]. Согласно этой формуле, звукоизоляция в узкой трубе происходит в диапазоне от ω_0 до $\omega_0\sqrt{1+\gamma}$.

Рассчитаем величину ξ_{m0}^2 в полосе запирания волн симметрии m-го порядка ($m\neq 0$). При резонансной частоте ω_0, равной $\omega_{m0}^{(ж)}$, полоса запирания определится неравенством

$$\omega_0=\omega_{m0}^{(ж)}<\omega<\omega_{m0}=c\alpha_m/R<\omega_{m0}^{(м)}. \tag{4}$$

Из графиков на фиг. 2 следует, что при изменении частоты ω в этой полосе величина $\zeta_{m0}R$ лежит вблизи $\nu_{m0}=\omega_{m0}^{(м)}R/c$; поэтому в дисперсионном уравнении (2) можно положить

$$\frac{J_m'(\zeta_{m0}R)}{J_m(\zeta_{m0}R)}\approx\frac{1}{(\zeta_{m0}R-\nu_{m0})}.$$



Фиг. 2. Графики левой и правой частей дисперсионного уравнения для трубы, «облицованной» резонаторами

В результате мы получим для ξ_{m0}^2 следующее приближенное выражение:

$$\xi_{m0}^2=-k^2\left\{\left[\frac{\omega_{m0}^{(м)}/\omega}{1+\dfrac{2}{\gamma(k_0R)}(1-\omega_0^2/\omega^2)}\right]^2-1\right\}. \tag{5}$$

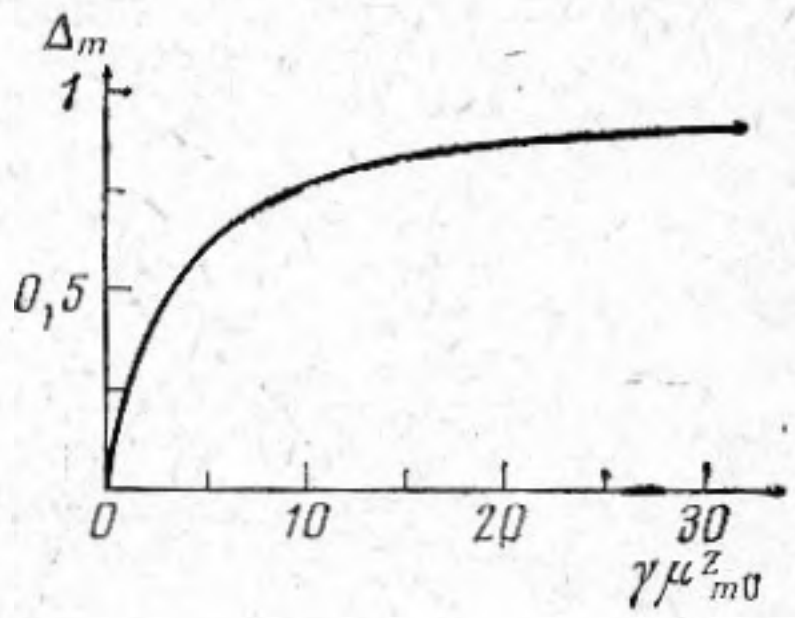
В полосе запирания (4) мода $(m, 0)$ экспоненциально затухает вдоль «облицованной» трубы. При прохождении участка длиной l амплитуда волны уменьшается в $\exp(|\xi_{m0}|l)$ раз. Коэффициент затухания $|\xi_{m0}/k_0|$ принимает максимальное значение, равное $\sqrt{(\omega_{m0}^{(м)}/\omega_0)^2-1}$, на левой границе ($\omega=\omega_0=\omega_{m0}^{(ж)}$) полосы запирания и монотонно убывает до нуля при приближении частоты к правой границе ($\omega=\omega_{m0}$). Граничную частоту ω_{m0} найдем из уравнения $\xi_{m0}^2(\omega)=0$:

$$\omega_{m0}=\omega_{m0}^{(м)}\left\{\frac{1+\sqrt{1+\dfrac{8}{\gamma\nu_{m0}^2}\left(1+\dfrac{2}{\gamma\mu_{m0}^2}\right)}}{2\left(1+\dfrac{2}{\gamma\mu_{m0}^2}\right)}\right\}. \tag{6}$$

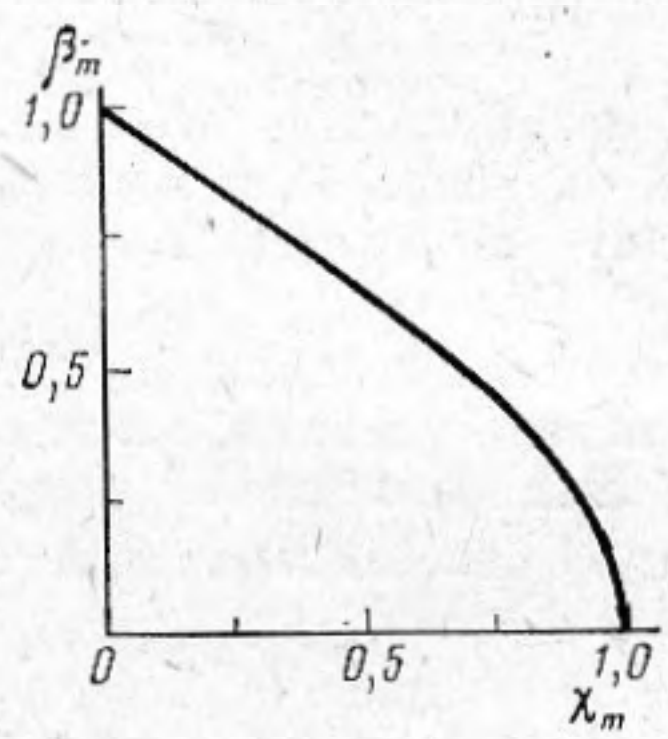
При $\gamma(k_0R)^2 \gg 1$ эту частоту можно вычислить по приближенной формуле

$$\omega_{m0}=\omega_{m0}^{(м)}\left\{1-\frac{2}{\gamma}\left(\frac{1}{\mu_{m0}^2}-\frac{1}{\nu_{m0}^2}\right)\right\}.$$

Исследуем влияние параметров γ и m на ширину полосы запирания и на коэффициент затухания волны. На фиг. 3 дан график величины $\Delta_m=\frac{(\omega_{m0}-\omega_{m0}^{(ж)})}{(\omega_{m0}^{(м)}-\omega_{m0}^{(ж)})}$ — относительной ширины полосы запирания в функции $\gamma\mu_{m0}^2$. Граничная частота ω_{m0} вычислена по формуле (6). Поскольку при



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Зависимость относительной ширины полосы запирания от величины $\gamma\mu_{m0}^2$

Фиг. 4. Зависимость нормированного коэффициента затухания от величины χ_m

разных значениях m кривые мало отличаются друг от друга, то на фигуре приведена только одна кривая для $m=1$. Из графика следует, что при увеличении параметра $\gamma\mu_{m0}^2$ относительная ширина полосы запирания монотонно растет, асимптотически приближаясь к единице.

На фиг. 4 дан график величины $\beta_m=\frac{|\xi_{m0}/k_0|}{\sqrt{(\nu_{m0}/\mu_{m0})^2-1}}$ — коэффициента затухания, выраженного в относительных единицах, в функции величины

$$\chi_m=\frac{(\omega-\omega_{m0}^{(ж)})}{(\omega_{m0}-\omega_{m0}^{(ж)})}=\frac{(\omega/\omega_0-1)}{\Delta_m(\nu_{m0}/\mu_{m0}-1)}$$

— относительного отклонения частоты звука от резонансной частоты резонатора. Этот график рассчитан на основе формул (5) и (6). Расчеты показывают, что при вариации параметров γ и m кривые мало изменяются, поэтому на фигуре приведена только одна кривая, полученная при $\gamma=0{,}2$ и $m=3$. Графики, представленные на фиг. 3 и 4, могут быть использованы при проектировании изоляторов звука в широкой трубе.

Полученные формулы позволяют спроектировать «оптимальный» изолятор, обеспечивающий при минимальном суммарном объеме сосудов резонаторов ослабление моды $(m, 0)$ не менее чем в $1/W$ раз, в заданном частотном диапазоне $\omega_0<\omega<\omega_1<\omega_{m0}$. Эта задача сводится к нахождению минимума величины $(\widetilde{\Omega}l)$, при которой выполняется соотношение

$$\exp\{-|\xi_{m0}(\omega_1)|l\}=W.$$

Расчеты дают следующие оптимальные значения параметров:

$$l_{\text{opt}} = \frac{\frac{1}{k_0}\ln\frac{1}{W}}{\frac{\omega_1}{\omega_0}\sqrt{\left(\frac{\omega_{m0}^{(\text{м})}}{\omega_1}\right)^{2/3}-1}}, \quad \gamma_{\text{opt}} = \frac{2}{\mu_{m0}^2}\frac{\{1-(\omega_0/\omega_1)^2\}}{\left\{\left(\frac{\omega_{m0}^{(\text{м})}}{\omega_1}\right)^{2/3}-1\right\}},$$

$$(\tilde{\Omega}l)_{\min} = \gamma_{\text{opt}} l_{\text{opt}}\Omega = \frac{2\pi R^2}{k_0\mu_{m0}^2}\frac{\omega_0}{\omega_1}\frac{\{1-(\omega_0/\omega_1)^2\}}{\{(\omega_{m0}^{(\text{м})}/\omega_1)^{2/3}-1\}^{3/2}}\ln\frac{1}{W}.$$

Таким образом, суммарный объем сосудов «оптимального» изолятора растет пропорционально $\ln\frac{1}{W}$, в то время как объем одиночного резонатора, удовлетворяющего тем же требованиям, растет пропорционально $1/W$. Следовательно, для получения большой звукоизоляции «оптимальный» изолятор требует меньшего объема, чем одиночный резонатор.

Однако следует иметь в виду, что «оптимальный» изолятор работает лишь в диапазоне $\omega_{m0}^{(\text{ж})} < \omega < \omega_{m0}^{(\text{м})} < \omega_{m1}^{(\text{ж})}$, в то время как одиночный резонатор является отражателем звука в диапазоне $\omega_{m0}^{(\text{ж})} < \omega < \omega_{m1}^{(\text{ж})}$.

При расчете звукоизоляции в трубе, «облицованной» резонаторами лишь на ограниченном участке длиной l, следует учитывать концевые эффекты. Точный учет этих эффектов сложен и требует решения бесконечной системы алгебраических уравнений. Приближенные оценки, выполненные на основе точных уравнений, показывают, что при $|\xi_{m0}|l \geqslant 2$ концевые эффекты могут ухудшить звукоизоляцию облицованного участка в одномодовой трубе не более чем на 6 *дб*. Следовательно, звукоизоляция этого участка будет не меньше $(8{,}69|\xi_{m0}|l-6)$ *дб*.

В качестве примера рассчитаем «оптимальный» изолятор в трубе радиусом 15 *см*, обеспечивающий ослабление моды (1, 0) не менее чем в 100 раз (звукоизоляция 40 *дб*) при частотах ниже 800 *гц*; скорость звука в заполняющей среде примем равной 333 *м/сек*. При заданных параметрах имеем $\omega_{10}^{(\text{ж})} = 4100$ *сек*$^{-1}$, $\omega_{10}^{(\text{м})} = 8500$ *сек*$^{-1}$. Резонансную частоту ω_0 выберем равной $\omega_{10}^{(\text{ж})}$. Пользуясь формулами для оптимальных значений параметров, получим

$$l_{\text{opt}} = 0{,}47\ \text{м}, \quad \gamma_{\text{opt}} = 0{,}48, \quad (\tilde{\Omega}l)_{\min} = 0{,}016\ \text{м}^3.$$

Автор благодарит В. П. Бажничкину за проведение расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Д. Лапин.* Звукоизоляция в волноводах (обзор). Акуст. ж., 1975, *21*, 3, 337–350.
2. *М. А. Исакович, В. И. Кашина, В. В. Тютекин.* Применение систем разонаторов для звукоизоляции нормальной волны нулевого порядка в трубах и других длинных линиях. В сб.: Морское приборостроение, сер. Акустика, 1972, *1*, 117–125.
3. *М. А. Исакович.* Теория волноводной изоляции в длинных линиях. В сб. VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, кн. 2. Ереван, 1973, 105–108.
4. *М. А. Исакович.* Волноводный принцип изоляции звука и вибраций. Тр. семинара «Борьба с шумом и звуковой вибрацией». М., 1974, 83–87.
5. *А. Д. Лапин.* О резонансных отражателях звука в волноводе. Акуст. ж., 1974, *20*, 6, 921–923.
6. *М. А. Исакович.* Общая акустика. М., «Наука», 1973.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
17 июня 1975 г.