ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. М. Лямшев.* К вопросу о принципе взаимности в акустике. ДАН, 1959, *125*, 6, 1231.
2. *М. В. Федорюк.* О работах Г. Д. Малюжинца по теории волновых потенциалов. Тр. Акуст. ин-та, ВХV, 1971, 169.
3. *Б. Д. Тартаковский.* Активные методы компенсации вибраций и звуковых полей. Сб. рефератов докладов VIII Всес. акуст. конф., I, М., 1973.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
18 апреля 1975 г.

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛОСЕ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Л. В. Седов

Представляет интерес следующая дифракционная задача. Пусть на полосу ширины l и толщины $d(-l/2\leqslant x\leqslant l/2,\ -d/2\leqslant y\leqslant d/2)$ падает плоская волна $p_i=\exp(-ik\cos\theta x-ik\sin\theta y)$. Нужно найти полное звуковое давление p_t, которое удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta p_t+k^2p_t=0$ и граничным условиям на полосе: $p_t=0$ при $y=\pm d/2$ и $-l/2\leqslant x\leqslant l/2$, $\partial p_t/\partial x=0$ при $x=\pm l/2$ и $-d/2\leqslant y\leqslant d/2$. Звуковое давление $p=p_t-p_i$ должно удовлетворять условию излучения и условию на ребре [1].

Точное решение такой задачи пока не получено. В работе [1] подробно описаны два приближенных способа решения некоторых дифракционных задач на основании так называемого метода Винера — Хопфа. Первый из них позволяет решить задачу о дифракции плоской звуковой волны на полубесконечной пластине конечной толщины, второй дает приближенное решение задачи о дифракции плоской волны на бесконечно тонкой полосе конечной ширины. В настоящей работе эти методы применяются одновременно к поставленной выше задаче. Получаемые при этом приближенные решения представляют собой первые члены разложения точных решений по малым параметрам kd и $1/kl$, поэтому будем пока рассматривать лишь широкие и тонкие по сравнению с длиной волны звука полосы ($kd\ll 1$, $kl\gg 1$).

Вместо полного звукового давления p_t будем искать звуковое давление $p=p_t-p_i$. Введем комплексное преобразование Фурье $\Phi(\alpha, y)$ для давления p по координате x:

$$\Phi(\alpha, y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\exp(i\alpha x)\,dx, \qquad \alpha=\sigma+i\tau.$$

Из уравнения Гельмгольца для p_t получаем уравнение для $\Phi(\alpha, y)$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-(\alpha^2-k^2)\Phi= \tag{1}$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad |y|\geqslant d/2, \\ i\alpha[\exp(-i\alpha l/2)\,p(-l/2, y)-\exp(i\alpha l/2)\,p(l/2, y)] & \text{при} \quad |y|\leqslant d/2, \end{cases}$$

где $p(-l/2, y)$ и $p(l/2, y)$ — неизвестные значения p на торцах полосы. Ясно, что значение давления p на каждом торце полосы обусловлено как падающей волной, так и волнами, дифрагировавшими на другом ее торце. Добавки в $p(-l/2, y)$ и $p(l/2, y)$, связанные с дифрагировавшими волнами, пропорциональны по крайней мере $(kl)^{-3/2}$, поскольку две грани полосы абсолютно мягкие и добавки, пропорциональные $(kl)^{-1/2}$, должны отсутствовать. Для того чтобы решить уравнение (1), пренебрегаем в правой части уравнения этими добавками. Ошибка в окончательном результате, которую мы при этом допускаем, будет уже по крайней мере порядка $(kd)(kl)^{-3/2}$, поскольку правая часть уравнения (1) обусловлена конечностью толщины полосы. Таким образом, такое пренебрежение допустимо, если ограничиться в решении членами порядка kd и $(kl)^{-3/2}$. В остальном техника решения уравнений типа (1) подробно описана в работе [1], поэтому сразу приведем результат.

Давление p на больших по сравнению с размерами полосы расстояниях и с учетом лишь членов порядка kd и $(kl)^{-3/2}$ определяется формулой

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad p(r,\varphi)=\Bigg\{&\exp(i(\cos\varphi+\cos\theta)kl/2)\left[\frac{L_-(-k\cos\varphi)}{L_-(k\cos\theta)}\times\right.\\
&\left.\times\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\left(\frac{i}{\cos\varphi+\cos\theta}+\frac{2kd}{\pi}S\right)\pm\frac{kd}{4}\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta+\cos\varphi}\right]-\\
&-\exp(-i(\cos\varphi+\cos\theta)kl/2)\left[\frac{L_+(-k\cos\varphi)}{L_+(k\cos\theta)}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\times\right.\\
&\left.\times\left(\frac{i}{\cos\varphi+\cos\theta}-\frac{2kd}{\pi}S\right)\pm\frac{kd}{4}\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta+\cos\varphi}\right]+\\
&+\frac{\exp(i\pi/4)}{\pi\sqrt{2kl}}\exp(i(2+\cos\theta-\cos\varphi)kl/2)\frac{L_+(-k\cos\varphi)}{L_-(k\cos\theta)}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\times\\
&\times\left(\frac{i}{\cos\theta+1}+\frac{2kd}{\pi}S\right)I(-ikl(1-\cos\varphi))-\frac{\exp(i\pi/4)}{\pi\sqrt{2kl}}\times\\
&\times\exp(i(2-\cos\theta+\cos\varphi)kl/2)\frac{L_-(-k\cos\varphi)}{L_+(k\cos\theta)}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\times\\
&\times\left(\frac{i}{\cos\theta-1}-\frac{2kd}{\pi}S\right)I(-ikl(1+\cos\varphi))\Bigg\}\exp(-i\pi/4)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}}.
\end{aligned}
$$

Здесь θ – угол падения плоской волны на полосу, r и φ – полярные координаты точки наблюдения: $x=r\cos\varphi$, $|y|=r\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$. В формуле (2) верхние и нижние знаки относятся соответственно к полупространствам $y\geqslant0$ и $y\leqslant0$. Функции $L_+(\alpha)$ и $L_-(\alpha)$ дают факторизацию функции $L(\alpha)=\exp(-\sqrt{\alpha^2-k^2}d/2)\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha^2-k^2}d/2)$. Эта факторизация подробно выполнена в работе [1]. Далее,

$$
I(-iv)=\sqrt{\pi}+2i\sqrt{\pi v}\exp(-iv)\int\limits_v^\infty\exp(iu^2)\,du,\qquad S=\sum_{m=1}^\infty x_m(2m-1),
$$

где x_m – решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$
(3)\qquad \frac{\pi x_n}{L_+^2(i(2n-1)\pi/d)}=\frac{1}{2n-1}+\sum_{m=1}^\infty\frac{x_m}{n+m-1},\qquad n=1,2,\ldots
$$

Неизвестные x_m с точностью до соответственных множителей являются коэффициентами разложения функций $p(-l/2,y)$ и $p(l/2,y)$ в ряд Фурье на отрезке $[-d/2,d/2]$.

Нахождение приближенного решения системы (3) облегчает тот факт, что из условия на ребре полосы (звуковое давление p_t вблизи ребра должно спадать, как $\rho^{1/3}$ при $\rho\to0$, где ρ – расстояние до ребра) можно получить асимптотическое решение системы (3): $x_m\sim m^{-5/6}$ при $m\to\infty$. (Подробно см. в работе [1].) Будем, начиная с некоторого номера N, приближенно считать $x_m=Am^{-5/6}$, где A пока неизвестно. Подставляя это выражение в формулу (3), получим конечную систему $N+1$ уравнений для неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_N, A$. С ростом N решения подобных конечных систем быстро сходятся, что позволяет принять решение такой системы в качестве приближенного решения системы (3). Таким образом находим $S\simeq0{,}33$.

Формула (2) получена в предположении, что угол падения θ не очень близок к 0 или π. В противном случае соответственная формула будет более громоздка, но может быть получена совершенно аналогичным путем.

Первые два члена в фигурных скобках в формуле (2) описывают первичную дифракцию на краях полосы, третий и четвертый – вторичную дифракцию на краях. Для больших kl эти члены имеют порядок $(kl)^{-3/2}(I(-iv)\sim v^{-1}$ для больших $v)$. Естественно, что при $d=0$ формула (2) дает решение, полученное в работе [1] для бесконечно тонкой полосы шириной l.

Ввиду сложности формулы (2) трудно аналитически оценить, насколько существенным при практических расчетах оказывается учет конечности толщины полосы. Поэтому по формуле (2) для нескольких конкретных примеров были рассчитаны полярные диаграммы направленности дифракционного поля $p(r,\varphi)$ и результаты расчета сравнивались с результатами расчета по формуле, полученной в работе [1] для

бесконечно тонкой полосы. Расчеты проводились для $kl=10$, $kd=0{,}1-0{,}2$ в функции угла падения от 30 до 90°. Оказалось, что для таких полос учет конечности толщины изменяет амплитуду дифрагировавшей волны на $4\div8\%$ для углов наблюдения, близких к углу зеркального отражения, к зоне геометрической тени, а также для скользящих углов наблюдения, близких к 0 или π. Для остальных углов наблюдения такие полосы с большой точностью можно считать бесконечно тонкими.

В заключение автор благодарит Л. М. Лямшева, под руководством которого выполнена данная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Нобл.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
31 марта 1975 г.

УДК 534.286

РЕЗОНАНСНОЕ ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЗВУКА В УСЛОВИЯХ НАСЫЩЕНИЯ ПАРАМАГНИТНОЙ СПИН-СИСТЕМЫ

М. М. Шакирзянов

Поляризация поперечной звуковой волны, распространяющейся в парамагнетике в направлении постоянного магнитного поля, в условиях акустического резонанса может испытывать значительное вращение [1, 2]. При расчете этого эффекта предполагалось, что фононы и парамагнитные частицы находятся в равновесных состояниях. Между тем фононы, составляющие возбуждаемую внешним ультразвуковым генератором акустическую волну, находятся в сильно неравновесном состоянии. Неравновесная статистическая теория акустического резонанса была предложена в работе [3]. Эта теория, в частности, позволяет учитывать эффекты насыщения спиновой системы, которые могут иметь место в сильных акустических полях, т. е. в условиях экстремально перегретой системы звуковых фононов. Ниже строится неравновесная статистическая теория вращения плоскости поляризации звука в парамагнетике с учетом эффектов насыщения.

Рассмотрим кубический кристалл, находящийся в постоянном магнитном поле H_0, направленном вдоль оси симметрии четвертого порядка (оси z). Пусть в направлении z распространяется поперечная акустическая волна, вектор поляризации которой параллелен другой оси четвертого порядка (оси x), так что единственной отличной от нуля компонентой тензора деформаций является U_{xz}. В работах [1, 2, 4] было показано, что при наличии спин-фононного взаимодействия может появиться компонента тензора деформации U_{yz}, что эквивалентно вращению плоскости поляризации звука.

Для описания этого эффекта будем рассматривать в качестве динамических подсистем спиновые степени свободы и две системы фононов, соответствующих деформациям U_{xz} и U_{yz}. Оператор энергии естественным образом распадается на гамильтониан невзаимодействующих систем $\mathscr{H}_0=\hbar[E(s)+E_x(k)+E_y(k)+E(q)]$ и на малое возмущение $V^{(t)}=\hbar[G(s,\ q)+G_x(k,\ s)+G_y(k,\ s)+G(k,\ q)+D^{(t)}(k)]$. Здесь $\mathscr{H}_s=\hbar E(s)$ — гамильтониан спин-системы $\mathscr{H}(k,\ \alpha)\,\hbar E_\alpha(k)=\hbar\omega_{\mathbf{k},\alpha}\hat{a}^+_{\mathbf{k},\alpha}\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}$ — гамильтониан динамической системы фононов с волновым вектором $\mathbf{k}$ и поляризацией α, $\hat{a}_{\mathbf{k}}{}^+{}_\alpha$, $\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}$ — операторы рождения и уничтожения фононов $(\mathbf{k},\ \alpha)$, $\hbar E(q)$ — гамильтониан термостата (остальных колебательных степеней свободы). Операторы $\hbar G(\alpha,\ \beta)$ описывают взаимодействие между подсистемами α и β. В частности, взаимодействие спинов с динамическими фононами имеет форму [1, 2]

$$\mathscr{H}_{sh}=\hbar G(s,k,\alpha)=iG\sum_j(S_x{}^jS_z{}^j+S_z{}^jS_x{}^j)\,(\hat{a}_{\mathbf{k}x}e^{ikz}-\hat{a}_{\mathbf{k}x}{}^+e^{-ikz})+$$

$$+(S_y{}^jS_z{}^j+S_z{}^jS_y{}^j)\,(\hat{a}_{\mathbf{k}y}e^{ikz}-\hat{a}_{\mathbf{k}y}{}^+e^{-ikz}),$$

где G — константа спин-фононной связи. Гамильтониан взаимодействия с внешним полем напишем в виде [3]

$$\mathscr{H}^t=\hbar D^{(t)}(k)=B\int_0^l dz\,\mathscr{H}^t(z);\qquad \mathscr{H}^t_{(z)}=U_{xz}(z)\,\sigma_{xz}(z,t);$$

$$\sigma_{xz}(z,t)=\sigma_0\cos(\omega t-kz);\qquad U_{xz}(z)=\frac{i}{2}\left(\frac{\hbar k^2}{2M\omega_k}\right)^{1/2}(\hat{a}_{\mathbf{k}x}e^{ikz}-\hat{a}_{\mathbf{k}x}{}^+e^{-ikz}),$$