АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXII 1976 Вып. 6

УДК 534.26

О ГАШЕНИИ ПОЛЯ, ВОЗБУЖДАЕМОГО ПУЛЬСИРУЮЩЕЙ СФЕРОЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

А. И. Бойко, В. П. Иванов

Рассмотрена стационарная задача о гашении поля, возбуждаемого пульсирующей сферой в прямоугольном полубесконечном акустически жестком на боковых, торцевой и нижней стенках и акустически мягком на верхней стенке волноводе. Гашение осуществляется полем, возбуждаемым системой вспомогательных излучателей сферической формы, расположенных в некотором слое внутри волновода. Определено число излучателей, их амплитуда и фаза, а также такое расстояние от торца волновода, начиная с которого суммарное поле от всех излучателей не превосходит наперед заданного малого числа.

В работе [1] автор поставил задачу активного гашения акустических полей и предложил метод ее решения. Этот метод получил дальнейшее развитие в работах [2, 3] и был экспериментально проверен в одномодовом волноводе [4]. Способ гашения, предложенный авторами настоящей статьи, отличается от метода Малюжинца тем, что система излучателей, гасящих поле, с самого начала предполагается дискретной и, кроме того, предполагается, что волновые размеры излучателей отличны от нуля.

Пусть в прямоугольном полубесконечном $\{|x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b,\ 0\leqslant z<\infty\}$ акустически жестком на боковых, торцевой и нижней стенках и акустически мягком на верхней стенке волноводе возбуждается поле с помощью пульсирующей сферы F_0 радиуса r_0. Торцевая стенка волновода лежит в плоскости $z=0$, а центр сферы F_0 расположен в сечении $z_0>r_0$. Внутри волновода помещены вспомогательные сферические излучатели F_q радиуса r_q, центры которых находятся в слое z, $0<z<Z$, где $z>r^*=\max r_q$, $q=1,\ldots,Q$, а Z — фиксированное число. Излучатели F_q не касаются стенок волновода и не пересекаются друг с другом. Рассматривается следующая задача: требуется подобрать число Q, амплитуды и фазы излучателей F_q, $q=1,\ldots,Q$, и определить расстояние, начиная с которого будет погашено с наперед заданной точностью суммарное поле, включающее в себя поле основного излучателя F_0, вспомогательных излучателей F_q, отражения от стенок и поле дифракции на излучателях.

Перейдем к строгой постановке задачи. Поле в области, ограниченной стенками волновода и расположенной вне излучателей F_q, $q=0, 1,\ldots,Q$, удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta+K^2)u(x,y,z)=0,\quad (\partial/\partial t=-i\omega,\ K=\omega/c), \tag{1}$$

краевым условиям на излучателях

$$\partial u/\partial n|_{F_0}=f_0,\ \partial u/\partial n|_{F_q}=f_q,\ q=1,\ldots,Q, \tag{2}$$

где f_0 — известное распределение нормальной скорости поля на поверхности F_0, краевым условиям на стенках волновода

$$\partial u/\partial z|_{z=0}=\partial u/\partial x|_{x=\pm a}=\partial u/\partial y|_{y=-b}=u|_{y=b}=0, \tag{3}$$

и условию погашаемости Малюжинца.

Задача гашения поля u заключается в следующем. Требуется определить число излучателей Q, их амплитуды и фазы (функции f_q, $q=1, \ldots, Q$), а также расстояние $d(\varepsilon)$, такое, что при всех $z \geqslant Z+d(\varepsilon)$ суммарное поле u не превосходило по модулю ε, т. е. $|u| \leqslant \varepsilon$ для всех точек (x, y, z), у которых

$$z \geqslant Z+d(\varepsilon). \tag{4}$$

Будем искать поле, удовлетворяющее задаче (1)—(4) в виде

$$u(\mathbf{x})=\sum_{q=0}^{Q} \int_{F_q} \mu_q(\xi_q)\left[G(\xi_q, \mathbf{x})+G(\xi_q^*, \mathbf{x})\right] d\sigma_q \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{x}=(x, y, z)$, $\xi_q=(\xi_q, \eta_q, \zeta_q)$ — координаты точки на сфере F_q, $\xi_q^*=(\xi_q, \eta_q, -\zeta_q)$; μ_q, $q=0, 1, \ldots, Q$ — неизвестные плотности объемной скорости. Функция G есть решение задачи о точечном источнике, расположенном в прямоугольном бесконечном в обе стороны по оси z волноводе с краевыми условиями типа (3) на боковых стенках

$$G=\frac{1}{a} \int_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left[a_n(x-a)\right] \cos\left[a_n(\xi-a)\right]}{\delta_n \tau_n \cos(2h\tau_n)} \exp\left[i(z-\zeta) t/a\right] \times \tag{6}$$
$$\times\left\{\sin\left[\tau_n(2h-|\eta-y|/a)\right]-\sin\left[\tau_n(\eta+y)/a\right]\right\} dt,$$

где $\tau_n=\left[k^2-t^2-(\pi n/2)^2\right]^{1/2}$, $k=Ka$, $a_n=\pi n/2a$, $h=b/a$, $\delta_n=2$ при $n=0$, $\delta_n=1$ при $n \neq 0$. Контур C при $\operatorname{Im} k>0$ есть вещественная ось, у функции τ_n выбрана ветвь, которая при фиксированном n, $\operatorname{Re} t \to \infty$, $\operatorname{Im} t=0$, стремится к it.

Подставляя формулу (5) в краевые условия (2) на сферах F_q, $q=0, 1, \ldots, Q$, получим

$$-2\pi \mu_p(\xi_{1p})+\sum_{q=0}^{Q} \int_{F_q} \mu_q(\xi_q) \partial/\partial n\left[G(\xi_q, \xi_{1p})+G(\xi_q^*, \xi_{1p})\right] d\sigma_q=f_p(\xi_{1p}) \tag{7}$$

$p=0, 1, \ldots, Q$, где $\partial/\partial n$ — производная по нормали к сфере F_p в точке $\xi_{1p}=(\xi_{1p}, \eta_{1p}, \zeta_{1p})$. Формулы (7) дают связь между неизвестными функциями f_p и функциями μ_p. Воспользовавшись тем, что функции f_p и функции μ_p неизвестны, будем искать распределение нормальной скорости поля f_p на излучателе F_p при $p=1, \ldots, Q$ как функцию от полных плотностей μ_q на этих излучателях при $q=1, \ldots, Q$ и числа излучателей Q. В этой схеме при нахождении неизвестных функций f_p отпадает необходимость в решении прямой задачи дифракции на сферах F_p, $p=0, 1, \ldots, Q$ в волноводе. Задача гашения сводится к отысканию плотностей μ_q и числа Q, а функции f_p определяются из соотношения (7) через найденные значения μ_q простым интегрированием. Заметим далее, что задача гашения поля не имеет единственного решения, поэтому выбор вида плотности μ_q на излучателях и выбор числа излучателей произволен. Принимая во внимание этот факт и исходя из учета простоты реализации задачи гашения [4], представим μ_q в следующей простой форме:

$$\mu_q(\xi_q)=c_{0q}+c_{1q} \cos \theta_q, \quad q=1, \ldots, Q. \tag{8}$$

Здесь c_{0q} и c_{1q} — неопределенные коэффициенты, $\cos \theta_q=\zeta_q/r_q$ — полярное расстояние в сферической системе координат, связанной с q-м излучателем. При таком выборе μ_q в случае малых волновых размеров излучателей функции f_q также будут содержать только две гармоники, а именно нулевую и первую, а сами излучатели будут излучателями монопольного и дипольного типа.

Полагая в формуле (7) $p=0$, учитывая формулу (8) и решая полученное интегральное уравнение, имеем в результате

$$\mu_0(\xi_{10}) = g_0(\xi_{10}) + \sum_{q=1}^{Q}\sum_{j=0}^{1} c_{jq} g_{jq}(\xi_{10}). \tag{9}$$

В формуле (9) введены следующие обозначения:

$$g_0(\xi_{10}) = f_0(\xi_{10}) + \int_{F_0} f_0(\xi_0) R(\xi_0, \xi_{10})\, d\sigma_0,$$

$$g_{jq}(\xi_{10}) = -\int_{F_q} P_j(\zeta_q/r_q)\, \partial/\partial n [G(\xi_q, \xi_{10}) + G(\xi_q^*, \xi_{10})]\, d\sigma_q -$$

$$-\int_{F_0}\left\{\int_{F_q} P_j(\zeta_q/r_q)\, \partial/\partial n [G(\xi_q, \xi_0) + G(\xi_q^*, \xi_0)]\, d\sigma_q\right\} R(\xi_0, \xi_{10})\, d\sigma_0,$$

где $R(\xi_0, \xi_{10})$ — резольвента интегрального уравнения с ядром $\partial/\partial n[G(\xi_0\xi_{10}) + G(\xi_0^*, \xi_{10})]$; ξ_0, ξ_{10} — точки на сфере F_0, $P_0=1$, $P_1=\cos\theta_q$. Функция μ_0 есть полная плотность объемной скорости на поверхности F_0, которая включает в себя как плотность объемной скорости, индуцированную f_0, так и плотность, наведенную полями излучателей F_q и отражениями от стенок.

Напишем поле u при $z \geqslant Z$ в виде суммы распространяющихся и затухающих нормальных волн. Для этого интеграл в формуле (6) представим в виде ряда по вычетам и подставим полученное выражение в формулу (5)

$$u(\mathrm{x}) = \frac{4\pi i}{b}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{nm}(x, y) \exp(izt_{nm}/a)\, [\delta_n t_{nm}]^{-1} \times \tag{10}$$

$$\times \sum_{q=0}^{Q}\int_{F_q} \mu_q(\xi_q)\, \Psi_{nm}(\xi_q, \eta_q) \cos(t_{nm}\zeta_q/a)\, d\sigma_q,$$

где $\Psi_{nm}(x, y) = \cos[a_n(x-a)][\cos b_m y - (-1)^m \sin b_m y]$, $b_m = \pi(2m+1)/4b$, $t_{nm} = [k^2 - (aa_n)^2 - (ab_m)^2]^{1/2}$. Предполагается, что параметр $k=Ka$ таков, что $t_{nm} \neq 0$. Пусть S — число пар целых чисел (n_s, m_s), $s=1, \ldots, S$, для которых выполняется условие $t_{nm} > 0$. Из этого условия следует, что в волноводе распространяется ровно S нормальных волн. Остальные нормальные волны затухают. Используя представления (8) и (9) для плотностей μ_q, $\partial=0, 1, \ldots, Q$, проинтегрируем выражение (10). В результате для поля u получаем следующее разложение:

$$u(\mathrm{x}) = \frac{4\pi i}{b}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{nm}(x, y) \exp(izt_{nm}/a)\, [\delta_n t_{nm}]^{-1} \times \tag{11}$$

$$\times \left\{\alpha(n, m) + \sum_{q=1}^{Q}\sum_{j=0}^{1} [\alpha_j(q, n, m) + \beta_j(q, n, m)]\, c_{jq}\right\}.$$

Здесь приняты обозначения

$$\alpha(n, m) = \int_{F_0} g_0(\xi_0)\, \Psi_{nm}(\xi_0, \eta_0) \cos(t_{nm}\zeta_0/a)\, d\sigma_0,$$

$$\alpha_j(n, m, q) = \int_{F_0} g_{jq}(\xi_0)\, \Psi_{nm}(\xi_0, \eta_0) \cos(t_{nm}\zeta_0/a)\, d\sigma_0,$$

$$\beta_j(n, m, q) = \int_{F_q} P_j(\zeta_q/r_q)\, \Psi_{nm}(\xi_q, \eta_q) \cos(t_{nm}\zeta_q/a)\, d\sigma_q.$$

Потребуем, чтобы коэффициенты при распространяющихся нормальных волнах обратились в нуль. Тогда получим систему S линейных алгебраических уравнений для определения $2Q$ неизвестных коэффициентов c_{0q}, c_{1q}.

$$\sum_{q=1}^{Q}\sum_{j=0}^{1} c_{jq}[\alpha_j(q, n_s, m_s)+\beta_j(q, n_s, m_s)] = -\alpha(n_s, m_s), \quad s=1, \ldots, S \tag{12}$$

Пусть число вспомогательных излучателей Q равно $E(S/2)+1$ при S-нечетных и $E(S/2)$ при S-четных, где $E(x)$ — целая часть числа x, а сами излучатели расположены таким образом, что определитель системы (12) отличен от нуля. Решая уравнения (12), найдем неизвестные коэффициенты c_{0q}, c_{1q}. Поскольку функции μ_q вычислены, функции f_q определяются из соотношений (7). После этого, оценивая ряд (10) по затухающим волнам, узнаем расстояние $d(\varepsilon)$, начиная с которого модуль поля $|u|$ не превосходит ε. Формула для определения расстояния $d(\varepsilon)$ имеет достаточно громоздкий вид, поэтому она будет приведена для более простого случая в рассматриваемом ниже примере.

Следует заметить, что функции f_q, определяющие параметры излучателей, гасящих поле, имеют сложный вид (содержат бесконечное число пространственных гармоник). Как уже указывалось, вид функции f_q может быть значительно упрощен (а именно функции f_q будут содержать не зависящие от угла и пропорциональные косинусу угла составляющие) при условии, что волновые размеры излучателей достаточно малы.

В качестве примера рассмотрим задачу о гашении поля в волноводе, возбуждаемого пульсирующей сферой достаточно малого радиуса r_0 с постоянной нормальной скоростью f_0=const. Гашение поля осуществляется системой сферических излучателей F_q, $q=1, \ldots, Q$, волновые размеры которых также достаточно малы. Для возбуждения поля с амплитудой порядка $O(1)$ при $\rho_0=kr_0/a\to 0$ амплитуда монополя f_0 должна быть порядка $O(\rho_0^{-2})$. В этом случае соотношение (9) принимает вид $\mu_0=-f_0/4\pi+\mu_{01}$, где $|\mu_{01}|=O(1)$ при $\rho_0\to 0$. Для поля u при $z\geqslant Z$ получаем представление $u=u_0+u_1$, где

$$u_0(\mathbf{x}) = \frac{2\pi i}{b}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_{nm}(x, y)\exp(izt_{nm}/a)\,[\delta_n t_{nm}]^{-1}\times$$

$$\times\sum_{q=0}^{Q}\Psi_{nm}(x_q, y_q)\,[c_{0q}^{*}\cos(t_{nm}z_q/a)+c_{1q}^{*}\sin(t_{nm}z_q/a)\,t_{nm}/k],$$

$$c_{00}^{*}=-r_0^2\sqrt{\frac{\pi}{2\rho_0}}\,J_{1/2}(\rho_0)\,f_0, \quad c_{10}^{*}=0, \tag{13}$$

$$c_{jq}^{*}=4\pi r_q^2\sqrt{\frac{\pi}{2\rho_q}}\,J_{j+1/2}(\rho_q)\,c_{jq}, \quad \rho_q=kr_q/a,$$

а поле u_1 порождено плотностью объемной скорости μ_{01} и имеет порядок $|u_1|=O(\rho_0^2)$ при $\rho_0\to 0$. Таким образом, при достаточно малых ρ_0 выполняется соотношение $|u_1|\leqslant\varepsilon/3$. Для решения задачи о гашении поля u_0 потребуем, расположив излучатели F_q некоторым образом, чтобы коэффициенты при распространяющихся нормальных волнах обратились в нуль, т. е. выберем амплитуды и фазы вспомогательных излучателей F_q так, чтобы распространяющиеся нормальные волны, интерферируя, гасили друг друга. Этот выбор можно осуществить различными способами. Поступим, например, следующим образом. Расположим вспомогательные излучатели так, чтобы их центры лежали в плоскости $z=z_1>r^*$. В этом случае алгебраи-

ческая система (12) преобразуется к виду

$$(14)\qquad \sum_{q=1}^{Q} \Psi_s(x_q, y_q)\,[c_{0q}^{*}\cos(t_s z_1/a) + c_{1q}^{*}\sin(t_s z_1/a)\,t_s/k] =$$
$$= -c_{00}^{*}\Psi_s(x_0, y_0)\cos(t_s z_0/a).$$

Здесь $\Psi_s = \Psi_{n_s m_s}$, $t_s = t_{n_s m_s}$, $s = 1, \ldots, S$.

Выберем число излучателей $Q = E(S/2)+1$ при $S = 2n+1$ и $Q = E(S/2)$ при $S = 2n$ и, расположив их таким образом, чтобы определитель системы (14) был отличен от нуля, вычислим амплитуды и фазы, реализующие задачу гашения. Получить решение системы (14) в явном виде при произвольных значениях параметров не представляется возможным. Вид уравнений (14) может быть упрощен, если положить число излучателей Q равным числу S распространяющихся нормальных волн. При этом система, служащая для определения параметров вспомогательных излучателей, имеет Q уравнений при числе неизвестных c_{0q}^{*} и c_{1q}^{*}, равном $2Q$. Таким образом, в выборе этих неизвестных существует произвол. Осуществим выбор таким образом, чтобы система (14) распалась на две независимые системы относительно неизвестных c_{0q}^{*} и c_{1q}^{*} соответственно. С физической точки зрения такому разбиению соответствует особая ориентация вспомогательных излучателей F_q и, следовательно, специальная структура поля нормальных волн, возбуждаемых ими. Каждой ориентации соответствует один и тот же вид системы для определения коэффициентов c_{0q}^{*}, c_{1q}^{*}, но с различными правыми частями

$$\sum_{q=1}^{Q} \Psi_s(x_q, y_q)\, c_{jq}^{*} = A_{js}, \quad s = 1, \ldots, S; \quad j = 0, 1.$$

Например, в случае, когда поле излучателя F_0, отраженное от торца волновода, гасится полем излучателей F_q, $q = 1, \ldots, Q$, также отраженным от торца волновода, а прямое поле излучателя F_0 гасится прямым полем излучателей F_q, правые части A_{js} имеют вид

$$A_{0s} = -c_{00}^{*}\Psi_s(x_0, y_0)\cos[t_s(z_0 - z_1)/a],$$
$$A_{1s} = -c_{00}^{*}k\Psi_s(x_0, y_0)\sin[t_s(z_0 - z_1)/a]/t_s, \quad s = 1, \ldots, S$$

Для случаев другой ориентации вспомогательных излучателей правые части соответствующих систем легко получить из выражения (13) для поля u_0. Считая, что коэффициенты c_{jq}^{*}, определяющие по формулам (8), (13) плотности объемных скоростей на излучателях F_q, известны, найдем из соотношений (7) функции f_q, обеспечивающие гашение поля распространяющихся нормальных волн, при условии, что r^{*} достаточно мал

$$f_q = -4\pi c_{0q} - \frac{8}{3}\pi c_{1q}\cos\theta_q + f_q^{*},$$

где $|f_q^{*}| = O(1)$ при $kr^{*}/a \to 0$.

Выберем параметр kr^{*}/a столь малым, чтобы суммарное поле, возбуждаемое излучателями F_q, на которых задано распределение нормальной скорости, равное f_q^{*}, не превосходило по модулю $\varepsilon/3$. Обозначим через $\delta = \min[\tau/a, \pi/4b]$, через $\tau = \min \tau_{nm}$ по всем парам чисел (n, m), для которых выполняется условие $\tau_{nm} = [(aa_n)^2 + (ab_m)^2 - k^2]^{1/2} > 0$. Для определения расстояния $d(\varepsilon)$, начиная с которого поле u не превосходит по модулю ε, получаем формулу

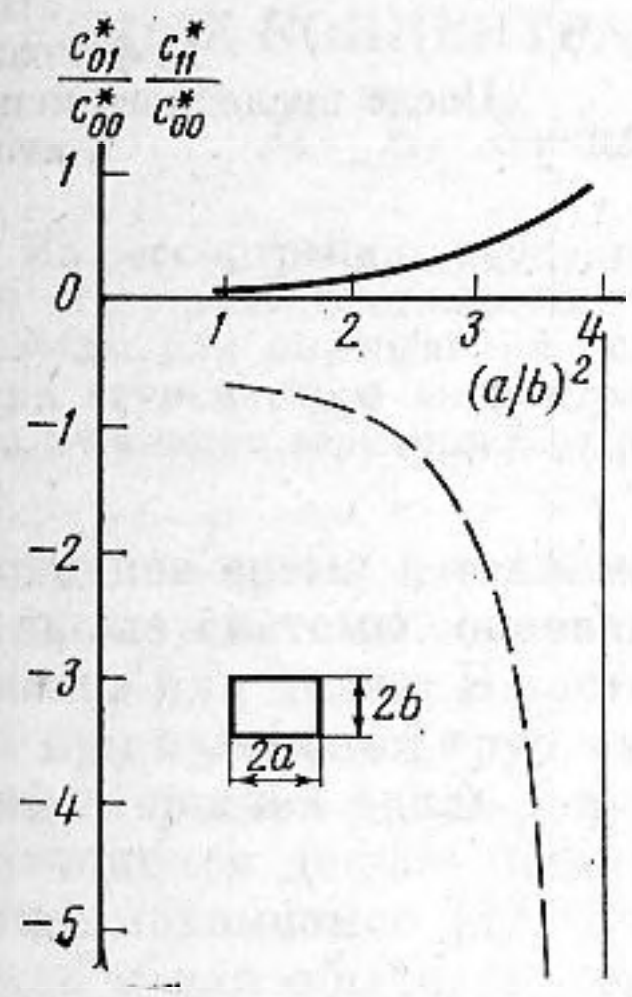
$$d(\varepsilon) = \delta^{-1}\ln(12\pi T/\varepsilon\tau) - Z - z_2.$$

Здесь

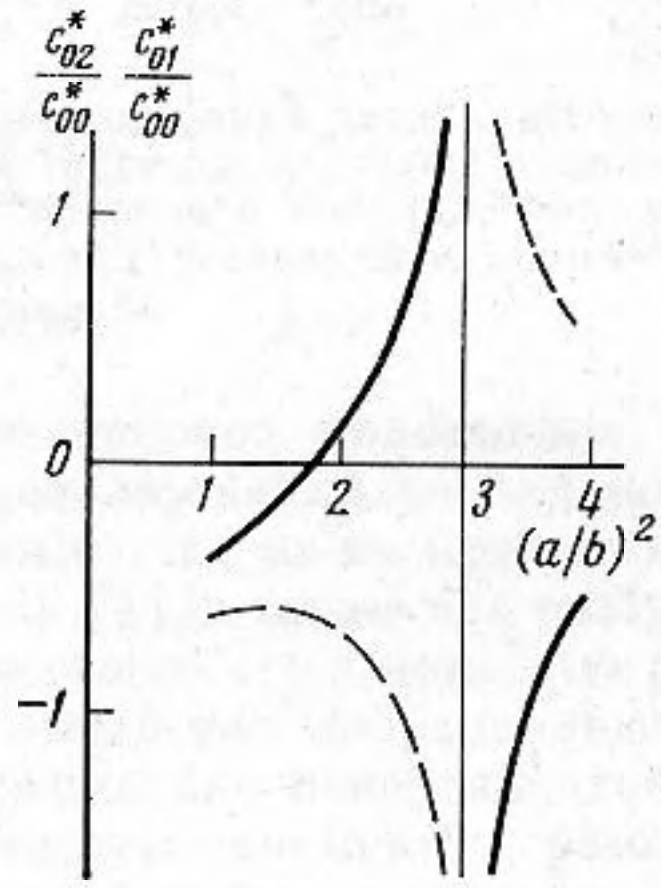
$$T = [E(2bk/\pi a) + 3]^2\{(Q+1)c_0 + \pi Q c_1[E(2bk/\pi a) + 33\pi]\},$$
$$z_2 = \max(z_0, z_1),\ c_j = \max|c_{jq}^{*}|,$$

$E(x)$ — целая часть числа x.

Рассмотрим в качестве числового примера решение задачи гашения поля в двухмодовом волноводе при следующих значениях параметров задачи: $k=\pi/\sqrt{2}$, $8/9<(a/b)^2<4$, $kr_0/a\ll 1$. В волноводе распространяются две нормальные волны с индексами $s=1$ ($n_1=0$, $m_1=0$) и $s=2$ ($n_2=1$, $m_2=0$). Пусть центр основного излучателя F_0 расположен внутри волновода в точке (x_0, y_0, $z=a$). Исследуем два варианта решения задачи гашения поля. В первом варианте расположим центр вспомогательного излучателя F_1 в точке (x_0, y_0, $z=2a$) и зададим плотность распределения μ_1 в виде (8).



Фиг. 1. Отношение монопольной и дипольной составляющей амплитуды излучателя F_1 к амплитуде излучателя F_0



Фиг. 2. Отношение амплитуд вспомогательных излучателей к амплитуде основного излучателя F_0

При этом предполагается, что $kr_1/a\ll 1$, где r_1 — радиус F_1. На фиг. 1 приведены графики отношений c_{01}^*/c_{00}^* (сплошная линия) и c_{11}^*/c_{00}^* (штриховая линия) для значений c_{01}^* и c_{11}^*, реализующих задачу гашения при изменении параметра $(a/b)^2$ от 8/9 до 4. Рост амплитуды c_{11}^* при $(a/b)^2\to 4$ обусловлен тем, что при заданных значениях параметров задачи дипольная составляющая вспомогательного излучателя F_1 плохо возбуждает первую и вторую нормальные волны.

Во втором варианте поместим два вспомогательных излучателя F_1 и F_2 соответственно в точки с координатами ($x_0\neq 0$, y_0, $z=2a$) и ($-x_0$, y_0, $z=2a$), предполагая при этом, что вспомогательные излучатели являются излучателями монопольного типа, т. е. $c_{11}^*=c_{12}^*=0$. На фиг. 2 представлено решение задачи гашения в этом варианте. График отношения c_{01}^*/c_{00}^* обозначается сплошной линией, график c_{02}^*/c_{00}^* — штриховой линией. При значении параметра $(a/b)^2\to 3$ вспомогательные излучатели, центры которых расположены в сечении $z=2a$, возбуждают прямую и отраженную от торца вторые нормальные волны, которые почти гасят друг друга, а амплитуда второй нормальной волны, возбуждаемой излучателем F_0 не равна нулю. Поэтому амплитуды вспомогательных излучателей стремятся к бесконечности при $(a/b)^2\to 3$. Чтобы осуществить гашение в волноводе при $(a/b)^2=3$, достаточно сдвинуть центры вспомогательных излучателей в точки ($\pm x_0$, y_0, $a<z<2a$). При значении параметра $(a/b)^2\approx 1{,}75$ достаточно взять один вспомогательный излучатель F_2, так как параметры задачи таковы, что при $z\geqslant Z$ поле распространяющихся нормальных волн, возбуждаемое излучателем F_2, равно взятому со знаком минус полю распространяющихся нормальных волн излучателя F_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Д. Малюжинец.* Нестационарные задачи дифракции для волнового уравнения с финитной правой частью. Тр. Акуст. ин-та, 1971, вып. XV, 124—139.
2. *М. В. Федорюк.* Об одном методе активного гашения звука. Акуст. ж., 1974, *20*, 5, 809—810.
3. *М. П. Завадская, А. В. Попов, Б. Л. Эгельский.* Решение некоторых модельных задач активного гашения звука. Вибротехника, 1, 22. Научн. тр. вузов. Изд. Каунасского политехн. ин-та, 1974, 155—160.
4. *А. А. Мазаников, В. В. Тютекин.* Экспериментальное исследование активного гашения акустических полей. Акуст. ж., 1974, *20*, 5, 807—808.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
13 февраля 1975 г.
После последнего исправления
1 июня 1976 г.