АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXII 1976 Вып. 6

УДК 534.2

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭХО-СИГНАЛА ОТ НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Я. А. Метсавээр

Предлагается алгоритм вычисления эхо-сигнала плоского звукового импульса от тонкой некруговой выпуклой цилиндрической оболочки в жидкой среде. Упругие волны в оболочках описываются при помощи теории оболочек типа Тимошенко, а в среде, окружающей оболочку — уравнениями движения идеальной сжимаемой жидкости, записанными в акустическом приближении. Алгоритм выводится путем обобщения формул, полученных для эхо-сигнала от круговой цилиндрической оболочки методом интегрального преобразования Фурье по времени и преобразования Ватсона по угловой координате.

Хотя первые работы [1—3] по дифракции акустических волн на круговых цилиндрических оболочках были опубликованы уже в 50-х годах, дифракция на некруговых цилиндрических оболочках до сих пор мало изучена. Это связано с тем, что методы, использованные для изучения дифракции на круговых оболочках, как правило, основываются на разделении переменных, которое в общем случае некруговой оболочки не имеет места. При помощи методов, в которых не используется разделение переменных, рассматривалась в основном лишь дифракция на акустически жестких и мягких телах. Обзор этих методов можно найти в монографии [4].

В данной работе рассматривается задача вычисления эхо-сигнала $p_e(r, \vartheta, \tau)$ от тонкой выпуклой цилиндрической оболочки, срединная поверхность которой описывается уравнением

$$r=R(\vartheta), \tag{1}$$

где r, ϑ — полярные координаты, $\tau=ct/h$ — безразмерное время (h — толщина оболочки, t — время, c — скорость звука в среде). Перпендикулярно к образующим оболочки падает плоский зондирующий импульс давления

$$p_i(l, \tau)=P_*g(\tau-l)\,[H(\tau-l)-H(\tau-l-\tau_*)], \tag{2}$$

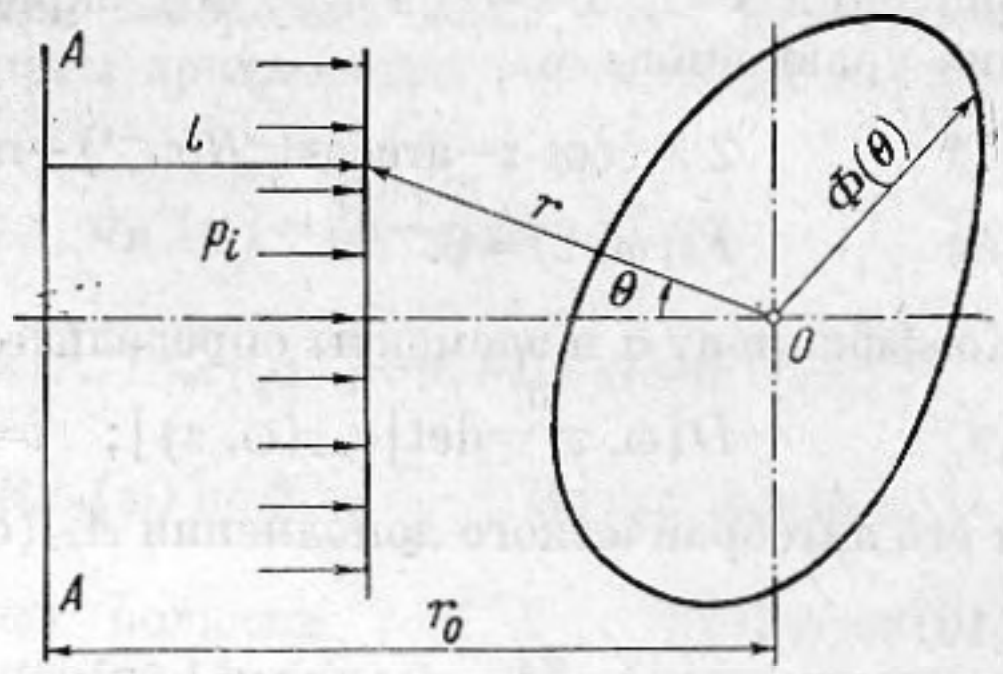
где P_* — постоянная, определяющая амплитуду импульса, $g(\tau)$ — закон изменения давления, τ_* — безразмерная продолжительность зондирующего импульса, l — безразмерное расстояние, измеряемое от «плоскости отсчета» (плоскость, где находится фронт зондирующего импульса при $\tau=0$), $H(\tau)$ — единичная функция Хевисайда. Плоскость отсчета находится на безразмерном расстоянии r_0 от полюса полярных координат r, ϑ (фиг. 1).

Волновые процессы в среде, окружающей оболочку, описываются при помощи акустического приближения уравнения движения идеально сжимаемой жидкой среды. Среда характеризуется двумя постоянными: скоростью звука c и плотностью ρ.

Для описания волн упругой деформации в оболочке используются уравнения движения линейной теории оболочек типа Тимошенко. Мате-

риал оболочки характеризуется тремя постоянными: модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ_1.

Метод вычисления эхо-сигнала выводится путем обобщения на оболочку произвольного поперечного сечения результатов, полученных при помощи преобразования Ватсона для эхо-сигнала от круговой цилиндрической оболочки. Поэтому сначала мы приводим формулы для вычисления эхо-сигнала от круговой цилиндрической оболочки.



Фиг. 1. Схема к постановке задачи

На основе результатов работы [5] эхо-сигнал от пустой круговой цилиндрической оболочки с безразмерным радиусом R_0 в точке наблюдения с координатами r_*, ϑ_* может быть вычислен по формуле

$$p_e(\tau)=\frac{P_*}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{g^F(\omega)}{\sqrt{2r_*}}\Big\{G_0(\omega)e^{-i\omega(\tau-d_0^*-d_0^{**})}+ \tag{3}$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}G_{jk}(\omega)e^{-i\omega[\tau-d_{jk}^*(\omega)-d_{jkn}(\omega)-d_{jk}^{**}(\omega)]}H[\vartheta_{nk}-\vartheta_j(\omega)]\Big\}d\omega,$$

где изображение зондирующего импульса $g^F(\omega)$ вычисляется по формуле

$$g^F(\omega)=\int\limits_0^{\tau_*}g(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau. \tag{4}$$

Функции, входящие в (3), определяются при этом соотношениями

$$\begin{aligned}
&G_0(\omega)=-[B(z)C(z)N(z)F_1(\omega,z)F_0^{-1}(\omega,z)]_{z=z_0},\\
&d_0^*=r_0-R_0(1-z_0^2)^{1/2},\\
&d_0^{**}=(r_*^2-z_0^2R_0^2)^{1/2}-R_0(1-z_0^2)^{1/2},\\
&d_{jk}^*(\omega)=r_0-R_0[1-z_j^2(\omega)]^{1/2},\\
&d_{jkn}(\omega)=z_j(\omega)s_{jkn}(\omega),\quad d_{jk}^{**}(\omega)=[r_*^2-R_0^2z_j^2(\omega)]^{1/2}-\\
&-R_0[1-z_j^2(\omega)]^{1/2},\\
&G_{j1}(\omega)=G_{j2}(\omega)=-2iR_0\sqrt{i\omega\pi}\left[\frac{N(z)F_1(\omega,z)}{\partial F_0(\omega,z)/\partial z}\right]_{z=z_j},\\
&s_{jkn}(\omega)=R_0\left\{2\arccos z_j(\omega)-\frac{\pi}{2}-\arccos[r_*^{-1}R_0z_j(\omega)]+\vartheta_{nk}\right\},\\
&\vartheta_{n1}=\vartheta_*+2n\pi,\quad \vartheta_{n2}=2\pi-\vartheta_*+2n\pi,\\
&\vartheta_j(\omega)=-\mathrm{Re}\left\{2\arccos z_j(\omega)-\arccos\left[\frac{z_j(\omega)R_0}{r_*}\right]-\frac{\pi}{2}\right\},
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
&F_{0,1}(\omega,z)=\omega A_{33}(\omega,z)-\alpha D(\omega,z)H_\sigma^{(1,2)^{-1}}(\omega R_0)\partial H_\sigma^{(1,2)}(\omega R_0)/\partial(\omega R_0),\\
&B(z)=[R_0(1-z^2)^{1/2}]^{1/2},\quad N(z)=(1-z^2R_0^2r_*^{-2})^{-1/4},\\
&C(z)=\left[1-\frac{1}{2}R_0(1-z^2)^{1/2}(r_*^2-z^2R_0^2)^{-1/2}\right]^{-1/2},\\
&\sigma=\omega zR_0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Значения $z=z_0$ и $z=z_j$ в (5), (6) определяются соответственно как решения уравнений

(7) $$2\arccos z-\arccos(zR_0r_*^{-1})-\pi/2+\vartheta_{nk}=0,$$

(8) $$F_0(\omega, z)=0.$$

Коэффициент α и элементы определителя $D(\omega, z)$, где

(9) $$D(\omega, z)=\det|a_{lm}(\omega, z)|; \quad l=1, 2, 3; \; m=1, 2, 3,$$

и его алгебраического дополнения $A_{33}(\omega, z)$ — следующие:

(10)
$$a_{11}=-(1+a^2)(\sigma^2+\varkappa^2+\beta^{-2}\omega^2), \quad a_{12}=a^2(\varkappa^2+\sigma^2+\beta^{-2}\omega^2)+\varkappa^2,$$
$$a_{13}=-(1+a^2)(1+\varkappa^2)\sigma, \quad a_{21}=a^2(\varkappa^2+\sigma^2+\beta^{-2}\omega^2)+\varkappa^2,$$
$$a_{22}=-a^2(\sigma^2+\varkappa^2-\beta^{-2}\omega^2)-\varkappa^2, \quad a_{23}=[(1+a^2)\varkappa^2+a^2]\sigma,$$
$$a_{31}=-(1+a^2)(1+\varkappa^2)\sigma, \quad a_{32}=[(1+a^2)\varkappa^2+a^2]\sigma,$$
$$a_{33}=-(1-a^2)(\varkappa^2\sigma^2+1)+\beta^{-2}\omega^2,$$
$$\sigma=\omega zR_0, \quad \alpha=\beta^2\rho_1\rho^{-1},$$
$$\beta=c^{-1}R_0^{-1}\left[\frac{E}{(1-\nu^2)\rho_1}\right]^{1/2}, \quad a=\frac{1}{\sqrt{12}R_0}, \quad \varkappa=k_\tau\left[\frac{1-\nu}{2}\right]^{1/2},$$
$$k_\tau=\pi/\sqrt{12}.$$

Выражение в квадратных скобках под интегралом (3) имеет смысл стационарного эхо, т. е. эхо-сигнала стационарной зондирующей волны

(11) $$p_i=\sqrt{2r}\exp[-i\omega(\tau-r_0+r\cos\vartheta)]$$

от круговой цилиндрической оболочки.

Первый одиночный член в квадратных скобках (3) определяет составляющее стационарного эхо, отраженного от поверхности оболочки в точке «отражения» $\vartheta=\vartheta_0$, где

(12) $$\vartheta_0=\arcsin z_0.$$

Функция $G_0(\omega)$ определяет амплитуду отраженного составляющего эхо и d_0^*, d_0^{**} — безразмерные времена, затраченные зондирующей волной на путь от плоскости отсчета до оболочки и отраженным составляющим эхо на путь от оболочки до точки наблюдения с координатами r_*, ϑ_* (фиг. 2*а*).

Члены под тройной суммой в (3) определяют составляющие эхо, излученные в окружающую оболочку среду периферическими и ползущими волнами. Эти волны возбуждаются зондирующей волной в «критических точках входа» $\vartheta=\vartheta_{jk}^*(\omega)$, в которых проекция соответствующей фазовой скорости $c_j(\omega)$ периферических или ползущих волн j-й моды на направление распространения зондирующей волны равна скорости звука c в окружающей оболочку среде. Далее эти волны, непрерывно излучаясь в окружающую среду, распространяются как в оболочке, так и в окружающей среде, как по ($k=1$), так и против ($k=2$) часовой стрелки до полного их затухания. Под периферическими подразумеваются тут те волны, которые имеют место только в случае деформируемых тел, а под ползущими — те волны, которые имеют место как в случае деформируемых, так и в случае акустически жестких и мягких тел. К точке наблюдения излученные составляющие эхо направляются от «критических точек выхода» $\vartheta=\vartheta_{jk}^{**}(\omega)$, в которых проекция соответствующей фазовой скорости $c_j(\omega)$ периферических или ползущих волн j-й моды на направление распространения излученного составляющего эхо j-й моды к точке наблюдения равна скорости звука c в окружающей среде. Число n в (3)

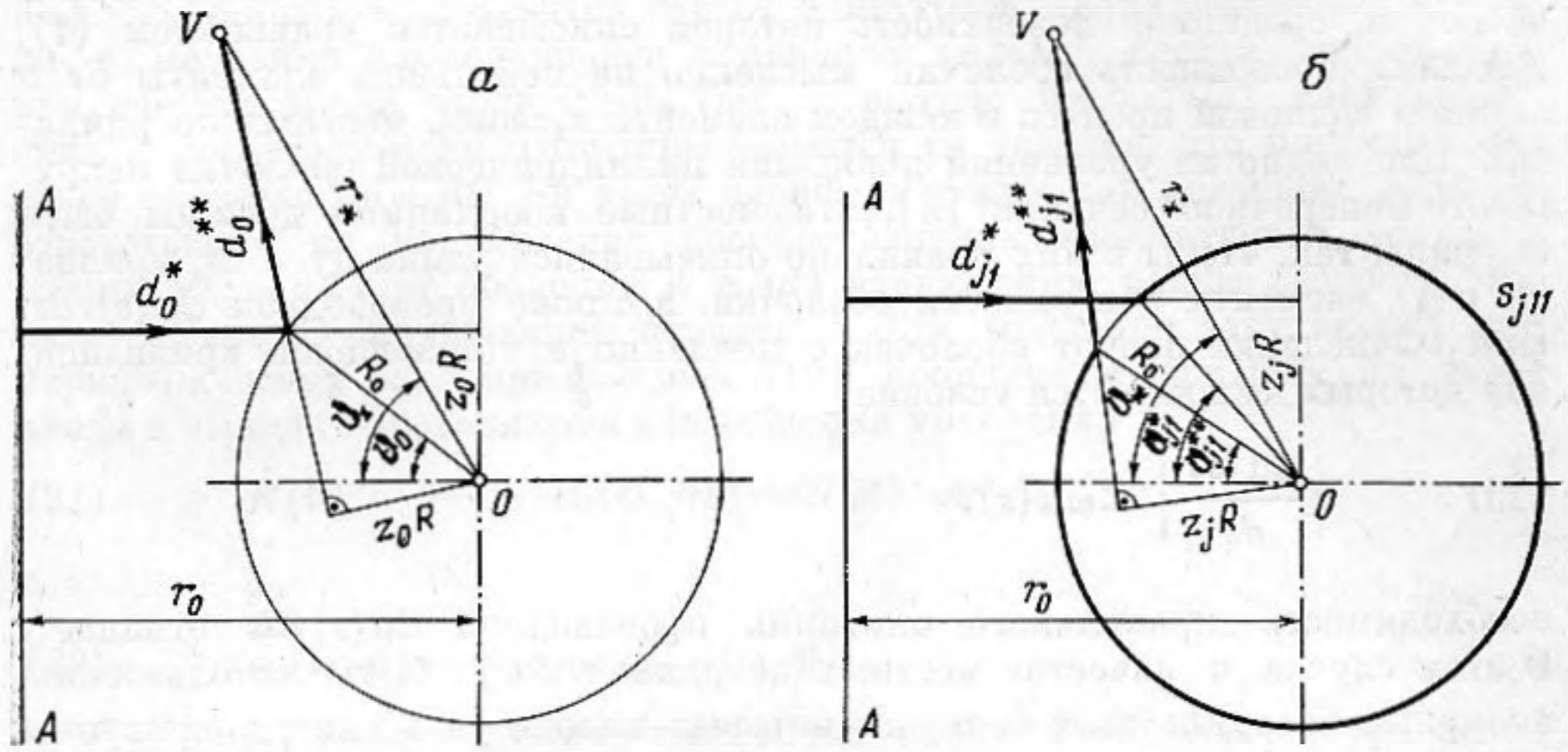
показывает, сколько оборотов волна совершила в оболочке до отправления к точке наблюдения. Координаты критических точек входа и выхода определяются соотношениями

$$\vartheta_{j1}^{*}(\omega)=\mathrm{Re}\arcsin z_j(\omega),\quad \vartheta_{j2}^{*}(\omega)=2\pi-\arcsin z_j(\omega), \tag{13}$$

$$\vartheta_{j1}^{**}(\omega)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Re}\arccos[r_{*}^{-1}R_0 z_j(\omega)]+\vartheta_{*}-\mathrm{Re}\arcsin z_j(\omega),$$

$$\vartheta_{j2}^{**}(\omega)=\mathrm{Re}\arccos[r_{*}^{-1}R_0 z_j(\omega)]+\vartheta_{*}-\frac{\pi}{2}+\mathrm{Re}\arcsin z_j(\omega).$$

Поскольку координаты $z=z_j(\omega)$ полюсов $j=1, 2\ldots$ являются комплексными, то все члены под знаком суммы в (3) будут комплекс-



Фиг. 2. Схема путей волн от плоскости отсчета $A-A$ до точки наблюдения V при формировании отраженного и излученного при $k=1$, $n=1$ составляющих стационарного эхо (вместо R нужно читать R_0)

ными. Функции $G_{jk}(\omega)$ определяют амплитуды и фазы периферических и ползущих волн j-й моды при их возбуждения в критических точках входа $\vartheta=\vartheta_{jk}^{*}(\omega)$. Вещественные части величин $d_{jk}^{*}(\omega)$, $d_{jkn}(\omega)$, $d_{jk}^{**}(\omega)$ есть безразмерные времена, затраченные соответственно зондирующей волной на путь от плоскости отсчета до оболочки периферической или ползущей волной j-й моды на путь в оболочке или в среде возле поверхности оболочки и излученным составляющим эхо на путь от оболочки к точке наблюдения. Поскольку время безразмерно, то величины $d_{jk}(\omega)$, $s_{jkn}(\omega)$, $d_{jk}^{**}(\omega)$ являются одновременно и безразмерными путями этих волн (фиг. 2*б*), а вещественная часть множителя $z_j(\omega)$ в $d_{jkn}(\omega)$ редуцирует фазовую скорость $c_j(\omega)$ периферических или ползущих волн к скорости c распространения волн в среде, т. е.

$$\mathrm{Re}\, z_j(\omega)=c/c_j(\omega). \tag{14}$$

Мнимые величины $d_{jk}^{*}(\omega)$, $s_{jkn}(\omega)$, $d_{jk}^{**}(\omega)$ связаны с затуханием этих волн. Мнимые части величин $d_{jk}^{*}(\omega)$, $s_{jkn}(\omega)$, $d_{jk}^{**}(\omega)$ определяют потери, возникающие при возбуждении периферических и ползущих волн в критических точках входа и при излучении этих волн в окружающую среду в критических точках выхода. Мнимая часть координаты полюса $z_j(\omega)$ определяет потери, возникающие при распространении периферических и ползущих волн в оболочке и возле ее поверхности. Если точка наблюдения находится от оболочки в направлении, близком к направлению $\vartheta_{*}=0$, т. е. обратном к направлению падения зондирующего импульса, то существенно отличающиеся от нуля вклады дают только медленно зату-

хающие моды периферических и ползущих волн, т. е. те моды, у которых мнимые части $z_j(\omega)$ малы. Такими медленно затухающими модами в случае тонких оболочек, как правило, являются только безмоментная и изгибная моды периферических волн. Для этих мод в прикладных расчетах можно пренебречь потерями, возникающими при возбуждении и излучении периферических волн.

Весь описанный механизм формирования стационарного эхо от круговой оболочки может быть обобщен на некруговую цилиндрическую оболочку, и эхо-сигнал от нее может быть вычислен по формуле (3), если входящие в нее функции $G_0(\omega)$, d_0^*, d_0^{**}, $G_{jk}(\omega)$, $d_{jk}^*(\omega)$, $d_{jkn}(\omega)$, $d_{jk}^{**}(\omega)$ заменить другими, соответствующими рассматриваемой некруговой оболочке.

Для описания формирования стационарного эхо от цилиндрической оболочки, срединная поверхность которой описывается уравнением (1), разделим поверхность оболочки мысленно на небольшие элементы ds и опишем волновой процесс в каждом элементе в своих, местных координатах. Как видно из уравнений движения цилиндрической оболочки некругового поперечного сечения [6], эти местные координаты должны быть выбраны так, чтобы в них правильно описывались длина дуги ds, кривизна $\mu(s)$ элемента поверхности оболочки, а также производная $d\mu(s)/ds$. При вычислении эхо от оболочек с медленно изменяющейся кривизной, для которых выполняется условие

$$\left|\frac{d\mu(s)}{ds}\right| \ll \omega\mu(s), \tag{15}$$

необходимость правильного описания производной $d\mu(s)/ds$ отпадает. В этом случае в качестве местных координат могут быть использованы полярные координаты $\bar{r}$, $\bar{\vartheta}$, полюс которых находится в центре кривизны рассматриваемого элемента и направление радиус-вектора $\bar{r}$ при $\bar{\vartheta}=0$ совпадает с направлением радиус-вектора r при $\vartheta=0$. Поскольку элемент некруговой оболочки в местных координатах является элементом круговой оболочки, то для описания волнового процесса в элементе в местных координатах можно воспользоваться формулами, выведенными для круговых цилиндрических оболочек.

Рассмотрим вычисление отдельных компонентов эхо от некруговой цилиндрической оболочки с медленно изменяющейся кривизной.

Формирование отраженного компонента эхо связано с одной точкой — «точкой отражения» на поверхности оболочки, координата $\vartheta=\vartheta_0$, которой определяется из условия равенства углов отражения и падения. Зная координату $\vartheta=\vartheta_0$ точки отражения, определим месторасположение полюса местных координат, местные координаты $\bar{\vartheta}=\bar{\vartheta}_0$, $\bar{r}=R_c(\vartheta_0)$ точки отражения, где $R_c(\vartheta)$ — радиус кривизны поверхности $r=R(\vartheta)$, а также расстояние $\bar{r}_*$ до точки наблюдения. После этого функции $G_0(\omega)$, d_0^*, d_0^{**} могут быть вычислены по формулам (5), где

$$R_0=R_c(\vartheta_0),\ z_0=\sin\bar{\vartheta}_0,\ r_*=\bar{r}_*. \tag{16}$$

При $r_* \gg \max R(\vartheta)$ вычисление функции $G_0(\omega)$, d_0^*, d_0^{**} упрощается. В этом случае координата точки отражения $\vartheta=\vartheta_0$ может быть определена как решение уравнения

$$R(\vartheta)\,\mathrm{tg}(\vartheta-\vartheta_*/2)-dR(\vartheta)/d\vartheta=0. \tag{17}$$

Функция $G_0(\omega)$ при $r_* \gg \max R(\vartheta)$ может быть вычислена по формуле

$$G_0(\omega)=[R_c(\vartheta_0)\cos(\vartheta_*/2)]^{1/2}\left[\frac{F_1(\omega,z)}{F_0(\omega,z)}\right]_{\substack{z=\sin(\vartheta_*/2)\\ R_0=R_c(\vartheta_0)}}, \tag{18}$$

где

(19) $$R_c=[R^2+(dR/d\vartheta)^2]^{3/2}[R^2+2(dR/d\vartheta)^2-Rd^2R/d\vartheta^2]^{-1}$$

и d_0^*, d_0^{**} — по формулам

(20) $$d_0^*=r_0-R_c(\vartheta_0)\cos\vartheta_0,\quad d_0^{**}=r_*-R_c(\vartheta_0)\cos(\vartheta_*-\vartheta_0).$$

При вычислении излученных компонентов эхо-сигнала от некруговой цилиндрической оболочки особенностью является то, что в этом случае координаты полюсов z_j, а следовательно, и фазовые скорости c_j не являются функциями только от ω, как это было в случае круговых цилиндрических оболочек, а также зависят от ϑ, т. е. $z_j=z_j(\omega, \vartheta)$, $c_j=c_j(\omega, \vartheta)$.

Рассмотрим вычисление этих компонентов эхо-сигнала. Для вычисления излученных компонентов эхо от некруговой цилиндрической оболочки с медленно изменяющейся кривизной сначала следует определить критические точки входа $\vartheta=\vartheta_{jk}^*(\omega)$ и выхода $\vartheta=\vartheta_{jk}^{**}(\omega)$ периферических и ползущих волн. Они определяются из условия, что проекции фазовой скорости $c_j(\omega, \vartheta)$ j-й моды периферических или ползущих волн соответственно на направление распространения зондирующей волны и волны, уходящей от оболочки к точке наблюдения, равны скорости звука c в среде, окружающей оболочку. Для медленно затухающих мод периферических волн при $r_*\gg\max R(\vartheta)$ координаты критических точек входа и выхода определяются как решения уравнения

(21) $$R(\vartheta)\operatorname{tg}[\vartheta-\vartheta_*-\alpha_j(\omega, \vartheta)]-dR(\vartheta)/d\vartheta=0,$$

где

(22) $$\alpha_j(\omega, \vartheta)=\pm\operatorname{Re}\arcsin z_j(\omega, \vartheta).$$

При определении критических точек входа $\vartheta=\vartheta_{jk}^*(\omega)$ в уравнении (21) следует брать $\vartheta_*=0$. В формуле (22) знак «+» следует брать при определении $\vartheta_{j1}^*(\omega)$, $\vartheta_{j2}^{**}(\omega)$ и знак «—», наоборот,— при определении $\vartheta_{j1}^{**}(\omega)$, $\vartheta_{j2}^*(\omega)$. Поскольку $z_j=z_j(\omega, \vartheta)$, то для нахождения критических точек следует решать систему, состоящую из уравнений (8), (21). Радиус круговой оболочки R_0, входящий в (8), следует при этом брать равным радиусу кривизны $R_c(\vartheta)$, который при каждом значении ϑ вычисляется по формуле (19).

Зная координату критической точки входа $\vartheta=\vartheta_{jk}^*(\omega)$, функции $G_{jk}(\omega)$ можно вычислить по формуле (5); при этом $R_0=R_c(\vartheta_{jk}^*)$, $z_j=z_j(\omega, \vartheta_{jk}^*)$.

Безразмерные времена, затраченные зондирующей волной на путь от плоскости отсчета до оболочки и излученным эхом на путь от оболочки до точки наблюдения для медленно затухающих мод периферических волн при $r_*\gg\max R(\vartheta)$ вычисляются по формулам

(23) $$d_{jk}^*(\omega)=r_0-R(\vartheta_{jk}^*)\cos\vartheta_{jk}^*,$$
$$d_{jk}^{**}(\omega)=r_*-R(\vartheta_{jk}^{**})\cos(\vartheta_*-\vartheta_{jk}^{**}).$$

Поскольку $z_j(\omega, \vartheta)$ является переменной вдоль поверхности оболочки, то безразмерное время, затраченное периферической волной на путь в оболочке и возле ее поверхности в случае медленно затухающих мод периферических волн вычисляется при помощи интеграла

(24) $$d_{jkn}(\omega)=\pm\int\limits_{\vartheta_{jk}^*(\omega)}^{\vartheta_{jk}^{**}(\omega)} z_j(\omega, \vartheta)A(\vartheta)d\vartheta,$$

где

(25) $$A(\vartheta)=\{R^2(\vartheta)+[dR(\vartheta)/d\vartheta]^2\}^{1/2}.$$

В формуле (24) знак «+» следует брать при $k=1$ и знак «−», наоборот,— при $k=2$. Интегрирование в формуле (24) следует произвести в направлении распространения периферических и ползущих волн в оболочке и возле ее поверхности в среде, т. е. при $k=1$ в направлении роста переменной ϑ и при $k=2$, наоборот, в направлении убывания переменной ϑ. Функция $z_j(\omega, \vartheta)$ в каждой точке под интегралом (24) вычисляется как решение уравнения (8) при $R_0=R_c(\vartheta)$.

Следует обратить внимание на то, что под интегралом (3) все величины, кроме d_0^*, d_0^{**}, зависят от параметра ω преобразования Фурье по времени. Поскольку из результатов вычисления эхо-сигнала от круговой цилиндрической оболочки известно, что эти зависимости являются медленно изменяющимися, то интеграл обращения преобразования Фурье по времени в (3) может быть вычислен способом, представленным в работе [5].

Вычисление эхо-сигнала от круговой цилиндрической оболочки по формулам (3)—(10) является довольно трудоемким процессом, поскольку для нахождения функций $G_0(\omega)$, $z_j(\omega)$, $G_{jk}(\omega)$ приходится неоднократно вычислять функции $F_0(\omega, z)$, $F_1(\omega, z)$, которые определяются через функции Ханкеля с комплексными индексами. При вычислении эхо-сигнала от некруговой цилиндрической оболочки эти трудности значительно увеличиваются, поскольку в этом случае при переходе от точки к точке вдоль поверхности оболочки меняется и радиус R_0, который в случае некруговой оболочки в каждой точке следует приравнивать радиусу кривизны оболочки $R_c(\vartheta)$. Другими словами, в случае некруговой оболочки в вышеупомянутых функциях прибавляется еще одна переменная R_0.

Рассмотрим возможности упрощения процедуры вычисления функций $G_0(\omega, R_0)$, $z_j(\omega, R_0)$, $G_{jk}(\omega, R_0)$.

Вычисление функции $G_0(\omega, R_0)$ может быть легко упрощено. Как видно из (6), функции $F_0(\omega, z, R_0)$, $F_1(\omega, z, R_0)$ в (18) являются комплексно-сопряженными. Следовательно, модуль отношения F_1/F_0 равен единице. Как показывают численные результаты, фаза этого отношения также существенно не зависит от ω, z, R_0. Поэтому если мы не интересуемся фазой отраженного эхо, а только его амплитудой и временем прибытия в точку наблюдения, то в прикладных расчетах функция $G_0(\omega, R_0)$ может быть вычислена вместо (18) по упрощенной формуле

$$G_0=[R_c(\vartheta_0)\cos(\vartheta_*/2)]^{1/2}. \tag{26}$$

Вычисление функций $z_j(\omega, R_0)$, $G_{jk}(\omega, R_0)$ может быть упрощено путем построения вспомогательных диаграмм или приближенных аналитических зависимостей для этих функций.

Из-за упрощений, использованных при выводе алгоритма вычисления эхо-сигнала, возникает несколько ограничений на область применения этого алгоритма.

Вывод был основан, в частности, на теории оболочек типа Тимошенко, поэтому должны быть выполнены условия

$$\omega<x_1, \quad R_c(\vartheta)>x_2, \tag{27}$$

где x_1, x_2 — некоторые постоянные, которые, вообще говоря, зависят от требуемой точности вычислений.

Из-за пренебрежения вкладом быстрозатухающих мод периферических и ползущих волн и из-за применения асимптотических представлений Дебая функций Ханкеля возникает дополнительное ограничение

$$\omega R_c(\vartheta)>x_3, \tag{28}$$

где x_3 — также постоянная, зависящая от требуемой точности.

Постоянным x_i, $i=1, 2, 3$, разумеется, трудно придать конкретные значения, но по некоторым нестрогим соображениям при вычислении эхо-

сигнала от металлических оболочек в воде можно рекомендовать присваивать этим постоянным следующие значения:

$$x_1=6\div8,\quad x_2=15\div20,\quad x_3=5\div10. \tag{29}$$

Кроме условий (27), (28) должно быть выполнено еще условие (15), которое может быть записано в виде

$$\left|\frac{dR_c(\vartheta)}{d\vartheta}\right| \ll \omega R_c(\vartheta) A(\vartheta), \tag{30}$$

а также условие выпуклости поверхности оболочки.

Как видно, условие (30) по существу является условием гладкости поверхности оболочки.

Следует отметить, что алгоритм может быть обобщен для вычисления эхо-сигналов от оболочек, имеющих местные неоднородности, например сварные швы и т. д. Наиболее простым является случай, когда неоднородность в оболочке может быть учтена только при помощи коэффициентов прохождения и отражения периферических волн. В этом случае требуется только перестроить интеграл (24).

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. C. Junger.* Sound Scattering by Thin Elastic Shells. J. Acoust. Soc. America, 1952, *24*, 4, 366–373.
2. *Л. М. Лямшев.* Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1955.
3. *Л. М. Лямшев.* Дифракция звука на безграничной тонкой упругой цилиндрической оболочке. Акуст. ж., 1958, *4*, 2, 161–167.
4. *В. М. Бабич, В. С. Булдырев.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.
5. *Я. А. Метсавээр.* Эхо-сигнал конечного сферического импульса от упругой цилиндрической оболочки. Прикл. матем. и мех., 1973, *37*, 2, 274–284.
6. *М. Э. Кутсер, Я. А. Метсавээр.* Алгоритм вычисления эхо-сигнала от произвольной цилиндрической оболочки. В сб. Тр. X Всес. конф. по теории оболочек и пластин, т. 2. Тбилиси, «Мецниереба», 1975, 247–253.

Институт кибернетики
Академии наук ЭССР

Поступила
27 января 1975 г.
После окончательной переработки
18 июня 1976 г.