АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIII 1977 Вып. 2

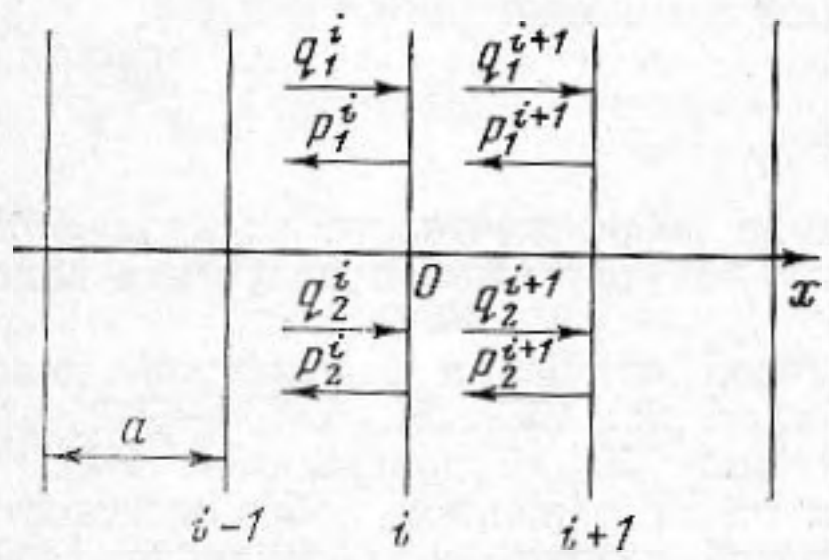
УДК 534.83

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВИБРАЦИОННОЙ ЭНЕРГИИ В СТРУКТУРАХ С ПОГЛОЩЕНИЕМ

В. Д. Белов, С. А. Рыбак, Б. Д. Тартаковский

В статье рассматривается в энергетическом приближении распространение энергии изгибных и продольных колебаний по структуре, обладающей поглощением. Приводится вывод дифференциальных уравнений типа уравнений теплопроводности, характеризующих «растекание» энергии колебаний по структуре. На основе общего решения полученной системы дифференциальных уравнений и при помощи ЭВМ определяется оптимальное расположение вибропоглощающего покрытия на пластине с ребрами жесткости.

Вибрационное поле в неоднородных упругих структурах, как правило, является сложной функцией координат и при точном его расчете встречаются большие трудности. Вместе с тем неоднократно отмечалось, что при наличии достаточно широкой полосы сигнала и при достаточно больших волновых размерах структуры можно использовать статистические методы расчета. При этих условиях с высокой точностью выполняется принцип энергетического суммирования: суммарная энергия волн, пришедших в некоторую точку в результате многократного рассеяния на неоднородностях, равна сумме их энергий. Задача о «растекании» энергии по структуре приобретает в этом случае черты задачи теплопроводности. Эвристически такое диффузионное приближение используется в акустике давно [1, 2]. Обоснование приближения, а также вывод кинетических коэффициентов выполнен в последние годы с помощью метода функций Грина [3—5].



Фиг. 1. Схема распределения потоков энергии: i — номер ребра жесткости, a — расстояние между ребрами жесткости, q_1, p_1 — плотности потоков энергии изгибных колебаний, q_2, p_2 — плотности потоков энергии продольных колебаний

Предположим, что метод энергетического суммирования применим, и напишем соотношения для потоков энергии, распространяющихся по неоднородной упругой структуре. Рассмотрим следующую модель (фиг. 1): потоки энергии продольных и изгибных колебаний распространяются в направлении оси x в пластине, в которой на расстояниях a друг от друга находятся сосредоточенные препятствия — ребра жесткости. Эти препятствия характеризуются восемью коэффициентами: четырьмя коэффициентами отражения по энергии R_{jk} и четырьмя коэффициентами прохождения по энергии D_{jk} где j, k пробегает значения 1,2 (здесь и далее индекс 1 соответствует изгибным, а индекс 2 — продольным типам колебаний). Эти коэффициенты связаны двумя соотношениями, являющимися следствием закона сохранения энергии для непоглощающего препятствия:

$$R_{11}+R_{12}+D_{11}+D_{12}=1, \qquad (1)$$
$$R_{21}+R_{22}+D_{21}+D_{22}=1.$$

Кроме того, на основании принципа взаимности $R_{12}=R_{21}$, $D_{12}=D_{21}$. Примем так же, что $R_{12}=D_{12}=\varkappa$, причем $\varkappa$ имеет смысл коэффициента связи между изгибными и продольными колебаниями. Благодаря этим соотношениям из восьми коэффициентов независимыми являются всего три. При распространении вибрации между соседними препятствиями ослабление энергии характеризуется множителями $\theta_1=e^{-\alpha_1 a}$ и $\theta_2=e^{-\alpha_2 a}$. Тогда для плотностей потоков энергии q и p, распространяющихся между $i-1$ и $i+1$ препятствиями (фиг. 1), на основании закона сохранения энергии можно написать соотношения

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad & p_1^{\,i}=q_1^{\,i}R_{11}+q_2^{\,i}\varkappa+p_1^{\,i+1}D_{11}\theta_1+p_2^{\,i+1}\varkappa\theta_2,\\
& p_2^{\,i}=q_2^{\,i}R_{22}+q_1^{\,i}\varkappa+p_2^{\,i+1}D_{22}\theta_2+p_1^{\,i+1}\varkappa\theta,\\
& q_1^{\,i+1}=q_1^{\,i}D_{11}\theta_1+q_2^{\,i}\varkappa\theta_1+p_1^{\,i+1}R_{11}\theta_1\theta_1+p_2^{\,i+1}\theta_1\theta_2\varkappa,\\
& q_2^{\,i+1}=q_2^{\,i}D_{22}\theta_2+q_1^{\,i}\varkappa\theta_2+p_2^{\,i+1}R_{22}\theta_2\theta_2+p_1^{\,i+1}\theta_1\theta_2\varkappa.
\end{aligned}
$$

Для анализа распределения плотностей потоков по структуре удобно перейти от дискретного к непрерывному распределению препятствий. При этом имеют место соотношения:

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad & D_i(x)=1-\frac{1}{a}(1-D_{ii})x;\qquad R_i(x)=\frac{1}{a}R_{ii}x;\\
& \varkappa(x)=\frac{\varkappa}{a}x;\qquad \theta_i(x)=\alpha_i x;\qquad \text{где } i=1,2.
\end{aligned}
$$

После некоторых преобразований получаем систему дифференциальных уравнений для плотностей потоков энергии колебаний обоих типов:

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad & \frac{dp_1}{dx}=\left(\alpha_1+\frac{1-D_{11}}{a}\right)p_1-\frac{\varkappa}{a}p_2-\frac{R_{11}}{a}q_1-\frac{\varkappa}{a}q_2,\\
& \frac{dp_2}{dx}=-\frac{\varkappa}{a}p_1+\left(\alpha_2+\frac{1-D_{22}}{a}\right)p_2-\frac{\varkappa}{a}q_1-\frac{R_{22}}{a}q_2,\\
& \frac{dq_1}{dx}=\frac{R_{11}}{a}p_1+\frac{\varkappa}{a}p_2-\left(\alpha_1+\frac{1-D_{11}}{a}\right)q_1+\frac{\varkappa}{a}q_2,\\
& \frac{dq_2}{dx}=\frac{\varkappa}{a}p_1+\frac{R_{22}}{a}p_2+\frac{\varkappa}{a}q_1-\left(\alpha_2+\frac{1-D_{22}}{a}\right)q_2.
\end{aligned}
$$

Заметим, что величины $p_i+q_i=Q_i$ имеют смысл средней спектральной плотности энергии, отнесенной к единичному интервалу волновых чисел:

$$Q_i=W_i c_{ri}\simeq W_i\frac{\Delta\omega}{\Delta k_i},$$

где $i=1,\ 2$; W_i — плотность энергии, c_{ri} — групповая скорость, ω — круговая частота, k_i — волновое число. Принимая это во внимание, можно систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка свести к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка типа уравнений теплопроводности:

$$
\begin{aligned}
(5)\qquad & \frac{d^2Q_1}{dx^2}=\left(\alpha_1+\frac{2\varkappa}{a}+\frac{2R_{11}}{a}\right)\left[\alpha_1Q_1+\frac{2\varkappa}{a}(Q_1-Q_2)\right];\\
& \frac{d^2Q_2}{dx^2}=\left(\alpha_2+\frac{2\varkappa}{a}+\frac{2R_{22}}{a}\right)\left[\alpha_2Q_2+\frac{2\varkappa}{a}(Q_2-Q_1)\right].
\end{aligned}
$$

Частные решения этой системы дифференциальных уравнений достаточно элементарны. Так, в случае отсутствия связи между двумя типами колебаний, т. е. при $\varkappa=0$, получаются независимые решения:

$$Q_i = Q_{i0} e^{-\alpha_i \left(1+\frac{2R_{ii}}{a\alpha_i}\right)^{1/2} x}; \tag{6}$$

$$R_{ii}=1-D_{ii}; \quad i=1,2; \quad \alpha_1=\frac{k_1\eta_1}{2}; \quad \alpha_2=k_2\eta_2.$$

η_i — коэффициент поглощения волн соответственного типа. В отсутствие поглощения ($\alpha_1=\alpha_2=0$) имеет место выравнивание средних спектральных плотностей энергии обоих типов колебаний при достаточном удалении от источника. В общем случае решение системы дифференциальных уравнений при условии $\underset{x\to+\infty}{Q_1(x)}=0$; $\underset{x\to+\infty}{Q_2(x)}=0$ имеет вид

$$Q_1=A_1e^{-\beta_1 x}+B_1e^{-\beta_3 x}; \tag{7}$$

$$Q_2=A_2e^{-\beta_1 x}+B_2e^{-\beta_3 x},$$

где

$$\beta_{1,3}=\sqrt{\frac{\mu_1\left(\alpha_1+\frac{2\varkappa}{a}\right)+\mu_2\left(\alpha_2+\frac{2\varkappa}{a}\right)}{2}\pm}$$

$$\pm\sqrt{\frac{\left(\mu_1\left(\alpha_1+\frac{2\varkappa}{a}\right)-\mu_2\left(a_2+\frac{2\varkappa}{a}\right)\right)^2}{4}+4\mu_1\mu_2\frac{\varkappa^2}{a^2}};$$

$$\mu_i=\alpha_i+\frac{2R_{ii}}{a}+\frac{2\varkappa}{a}; \quad i=1,2.$$

Между коэффициентами A_1, A_2 и B_1, B_2 из-за связи между продольными и изгибными колебаниями устанавливаются следующие соотношения:

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{-\beta_1^2+\alpha_1\mu_1+\frac{2\varkappa}{a}\mu_1}{2\frac{\varkappa}{a}\mu_1}=C_1; \tag{8}$$

$$\frac{B_2}{B_1}=\frac{-\beta_3^2+\alpha_1\mu_1+\frac{2\varkappa}{a}\mu_1}{2\frac{\varkappa}{a}\mu_1}=C_2.$$

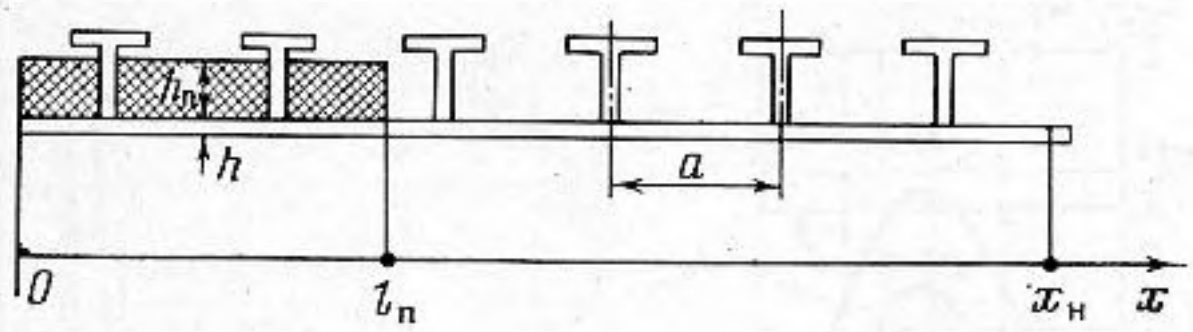
Из граничного условия $Q_1=Q_{10}$, $Q_2=Q_{20}$ при $x=0$ находим:

$$A_1=\frac{Q_{20}-C_2Q_{10}}{C_1-C_2}; \quad B_1=\frac{C_1Q_{10}-Q_{20}}{C_1-C_2}. \tag{9}$$

Таким образом, средние спектральные плотности энергии обоих типов колебаний полностью определяются соотношениями (7, 8, 9). Дальнейший анализ общего решения удобно проводить с помощью ЭВМ.

Изложенным методом была решена задача выбора оптимальной толщины вибропоглощающего покрытия (ВПП). Задача оптимизации сводилась к следующему: определить оптимальную толщину вибропоглощающего покрытия (ВПП), наносимого на выделенный участок $0-x_н$ пластины с

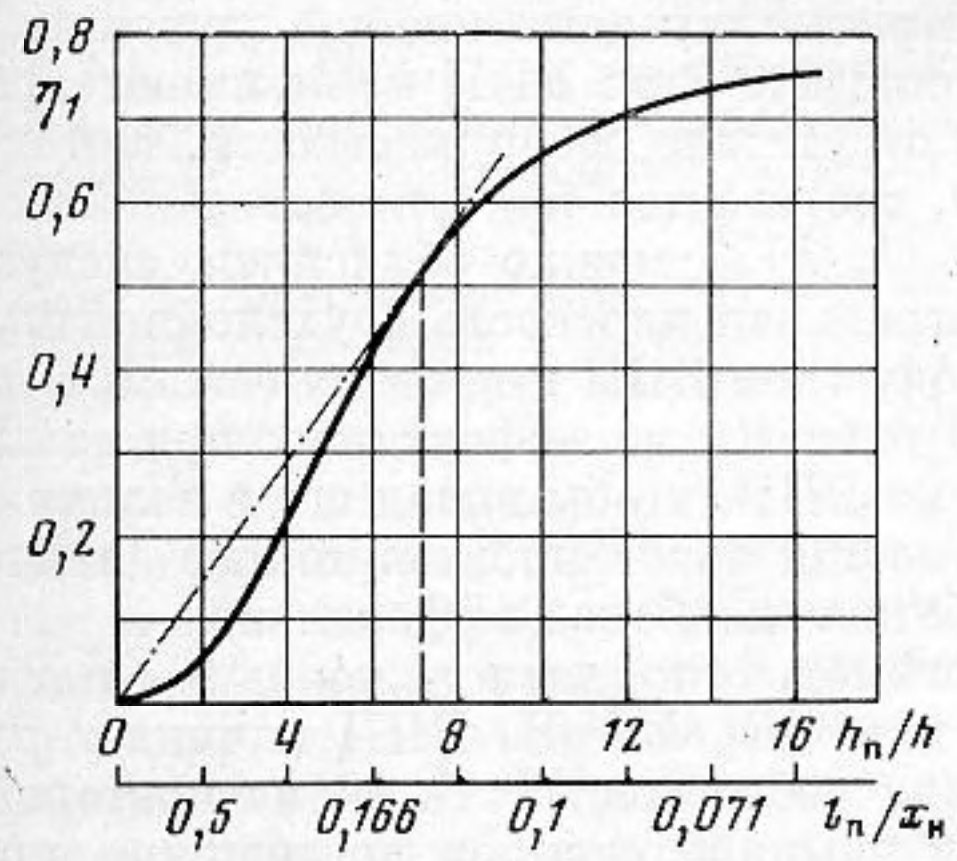
ребрами жесткости (фиг. 2), при которой средняя спектральная плотность энергии на выходе из демпфируемого участка (в точке $x_н$) была бы минимальна. При этом количество ВПП, т. е. его объем на единицу ширины пластины P_0, считается заданным: $P_0=l_п h_п=\text{const}$. В качестве исходных в задаче были приняты следующие величины: $x_н=1000$ *см*, $a=100$ *см*, $P_0=1000$ *см*^{3}, модуль Юнга пластины $E=2{,}1\cdot 10^{12}$ *дин/см*^{2}, отношение действительных частей модулей Юнга ВПП и пластины $E_п/E=10^{-2}$; 10^{-3}; 10^{-4}, коэффициент поглощения изгибных колебаний в ВПП $\eta_п=0{,}8$, коэффициент поглощения изгибных и продольных колебаний в пластине без ВПП



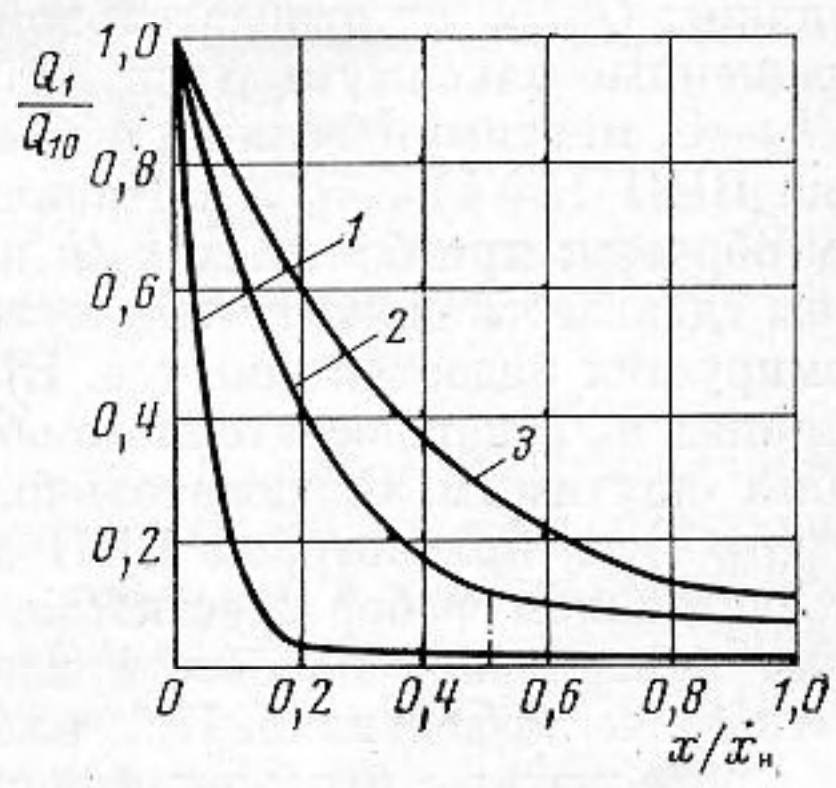
Фиг. 2. Схема нанесения вибропоглощающего покрытия: a – расстояние между ребрами жесткости, h – толщина демпфируемой пластины, $h_п$, $l_п$ – толщина и длина вибропоглощающего покрытия, $x_н$ – длина демпфируемого участка пластины

$\eta=0{,}005$, плотность материала пластины $\rho=7{,}8$ *г/см*^{2}, средняя частота $f=1000$ *гц*. Было принято допущение, что волновые числа не меняются, т. е. остаются постоянными при изменении толщины ВПП. На участке пластины, покрытой ВПП, коэффициент поглощения η_1 подсчитывался по формуле Оберста. Зависимость η_1 от длины слоя ВПП и от его толщины приведена на фиг. 3. При малых значениях $h_п/h$ ВПП суммарный коэффициент поглощения η_1 приближается к значению коэффициента поглощения демпфируемой пластины η, с увеличением толщины ВПП η_1 асимптотически стремится к значению коэффициента поглощения ВПП $\eta_п$.

Рассмотрим случай, когда пластина возбуждается поперечными силами, т. е. выполняется условие $Q_{10}=1$ и $Q_{20}=0$ при $x=0$. При этом распределение средней спектральной плотности энергии изгибных колебаний по пластине с ребрами жесткости в отсутствие связи между двумя типами колебаний ($\varkappa=0$) для разных длин слоя ВПП показано на фиг. 4. Видно,



Фиг. 3



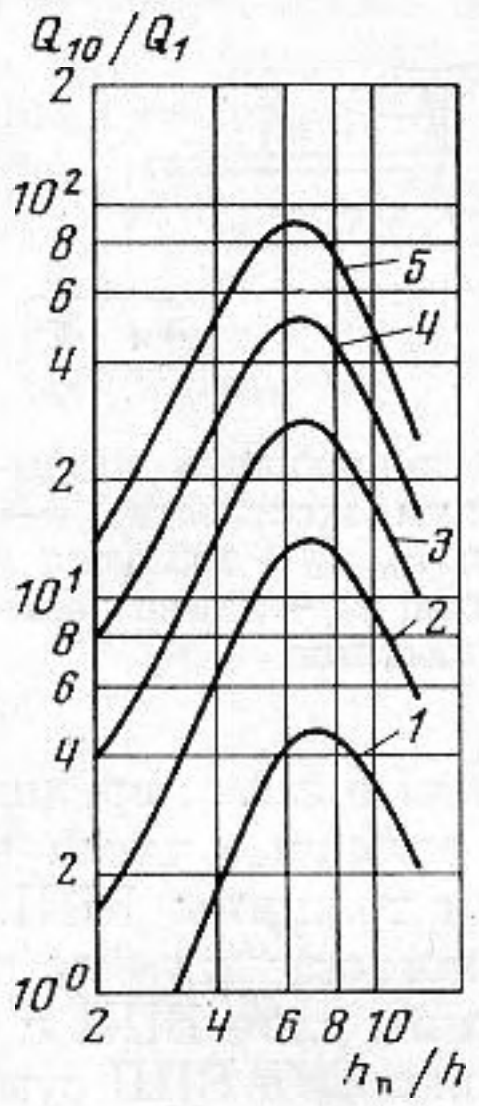
Фиг. 4

Фиг. 3. Зависимость суммарного коэффициента поглощения двухслойной пластины от относительной толщины и длины ВПП; $E_п/E=10^{-3}$

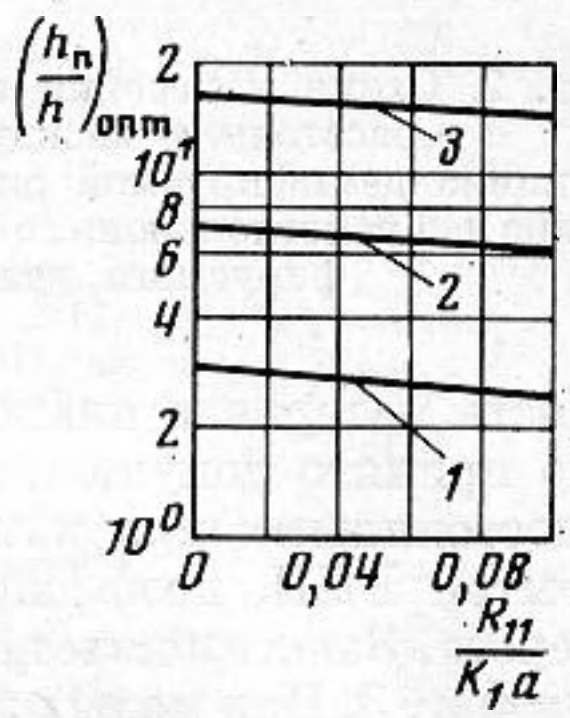
Фиг. 4. Распределение средней спектральной плотности энергии по структуре. Кривым *1–3* соответствуют относительные значения длины ВПП: $l_п/x_н=0{,}2$; $0{,}5$; $0{,}8$. $R_{11}=0{,}25$; $\varkappa=0$; $Q_{10}=1$; $E_п/E=10^{-3}$

что плотность энергии быстро уменьшается на участке, покрытом ВПП, и почти не убывает на участке, свободном от ВПП.

Нас интересует средняя спектральная плотность энергии на выходе демпфируемого участка пластины, т. е. при $x=x_н$, в зависимости от относительной толщины $h_п/h$ или длины $l_п/x_н$ слоев ВПП. Вначале мы установим оптимальную толщину $(h_п/h)_{опт}$ для гладкой пластины, а затем исследуем, как влияют ребра жесткости, расположенные симметрично и асимметрично относительно нейтральной оси пластины. Удобно в дальнейшем рассматривать не величину Q_1/Q_{10}, а обратную ей Q_{10}/Q_1; при этом



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 5. Зависимость обратной величины средней спектральной плотности энергии на выходе из демпфируемого участка от относительной толщины ВПП. Кривым *1–5* соответствуют значения параметра R_{11}/k_1a 0; 0,025; 0,05; 0,075; 0,1; $E_п/E=10^{-3}$

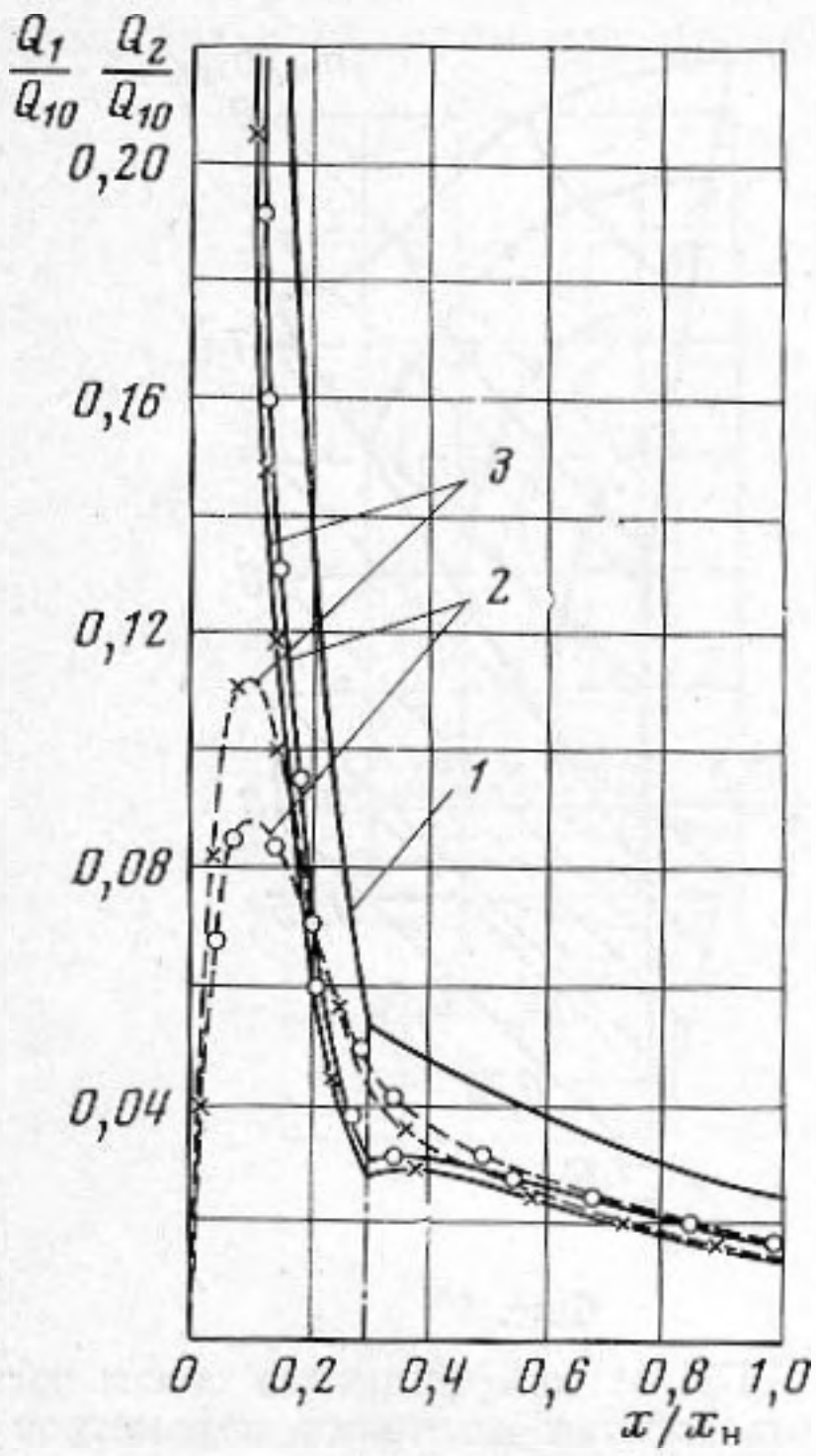
Фиг. 6. Зависимость оптимальной толщины ВПП от коэффициента отражения по энергии. Кривым *1–3* соответствуют значения параметра $E_п/E$ 10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}

задача отыскания минимума величины Q_1/Q_{10} превращается в задачу отыскания максимума величины Q_{10}/Q_1. Кривые, представляющие зависимость величины Q_{10}/Q_1 от относительной толщины слоя ВПП $h_п/h$, имеют ярко выраженные максимумы (фиг. 5). В отсутствие ребер жесткости, т. е. при $R_{11}/ka=0$, максимум величины Q_{10}/Q_1 достигается при относительной толщине ВПП $(h_п/h)_{опт}=7{,}17$. Наличие $(h_п/h)_{опт}$ можно объяснить следующим образом: при больших $h_п/h$ нейтральная плоскость двухслойной пластины сдвигается значительно в сторону слоя ВПП и поэтому сам слой деформируется недостаточно, т. е. ВПП работает не эффективно; при малых толщинах $h_п/h$ нет достаточного объема ВПП, чтобы вклад его в величину η_1 был ощутимым. Следовательно, имеется такое промежуточное значение $(h_п/h)_{опт}$, при котором ВПП работает наиболее эффективно.

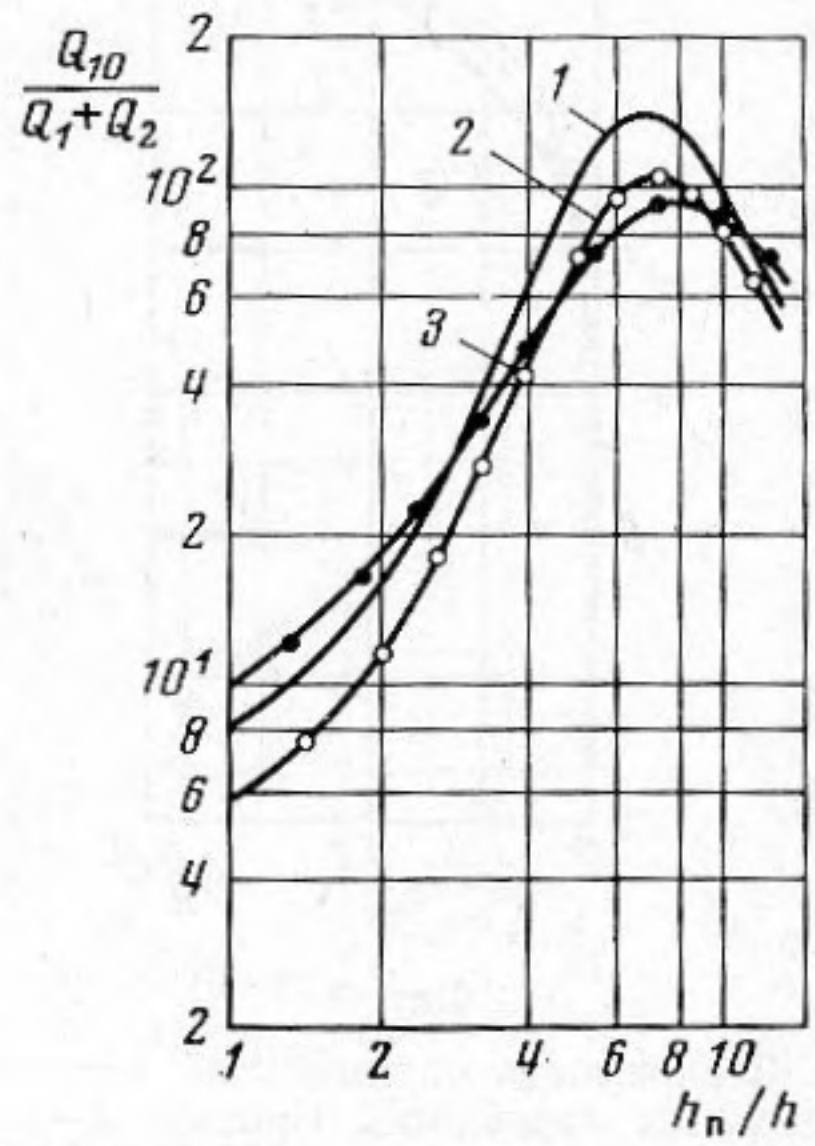
С введением ребер жесткости, симметрично расположенных относительно нейтральной плоскости пластины ($R_{11}/ka\neq0$), ВПП начинает работать более эффективно. При наличии ребер жесткости волна претерпевает многократные отражения между ними, испытывая поглощение при каждом прохождении демпфированного участка. Из фиг. 5 видно, что с ростом параметра R_{11}/ka кривые зависимости Q_{10}/Q_1 от $h_п/h$ поднимаются, несколько при этом деформируясь, т. е. при одних и тех же толщинах ВПП величина, обратная средней спектральной плотности энергии на выходе из демпфируемого участка пластины, становится больше, а сама величина средней спектральной плотности энергии на выходе уменьшается. При

этом точка экстремума сдвигается в сторону меньших толщин ВПП. Оптимальная толщина ВПП $(h_п/h)_{опт}$ с ростом параметра R_{11}/ka при разных значениях величины $E_п/E$ уменьшается, что видно на фиг. 6 (отметим, что выбранный интервал изменения параметра R_{11}/ka охватывает широкий класс упругих структур).

При несимметричном расположении ребер относительно нейтральной плоскости пластины в ней возбуждаются помимо изгибных также продольные колебания. Специфика демпфирования такой пластины состоит в том, что энергия переносится волнами обоих типов, а эффективно демпфиру-



Фиг. 7



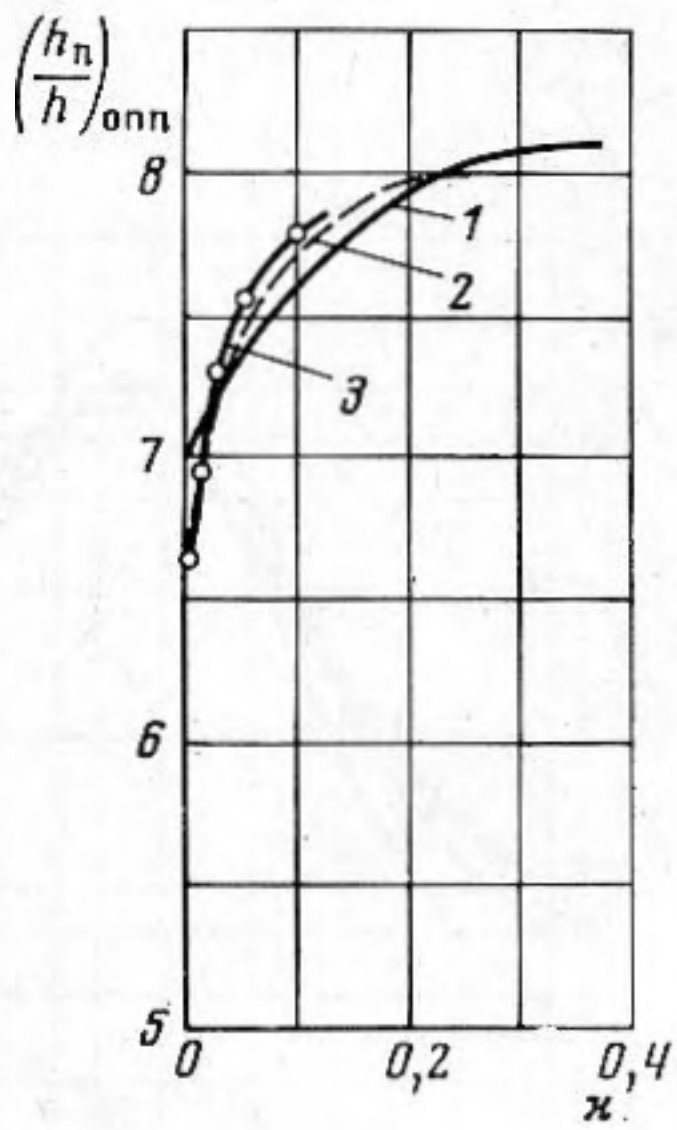
Фиг. 8

Фиг. 7. Распределение средних спектральных плотностей энергии изгибных и продольных колебаний при разной связи. Сплошные линии соответствуют изгибным колебаниям, пунктирные продольным колебаниям. Семействам кривых, обозначенных цифрами *1–3*, соответствуют значения коэффициента связи $\varkappa$ 0; 0,25; 0,375. $R_{11}=R_{22}=0{,}25$. $E_п/E=10^{-3}$. $l_п/x_н=0{,}3$

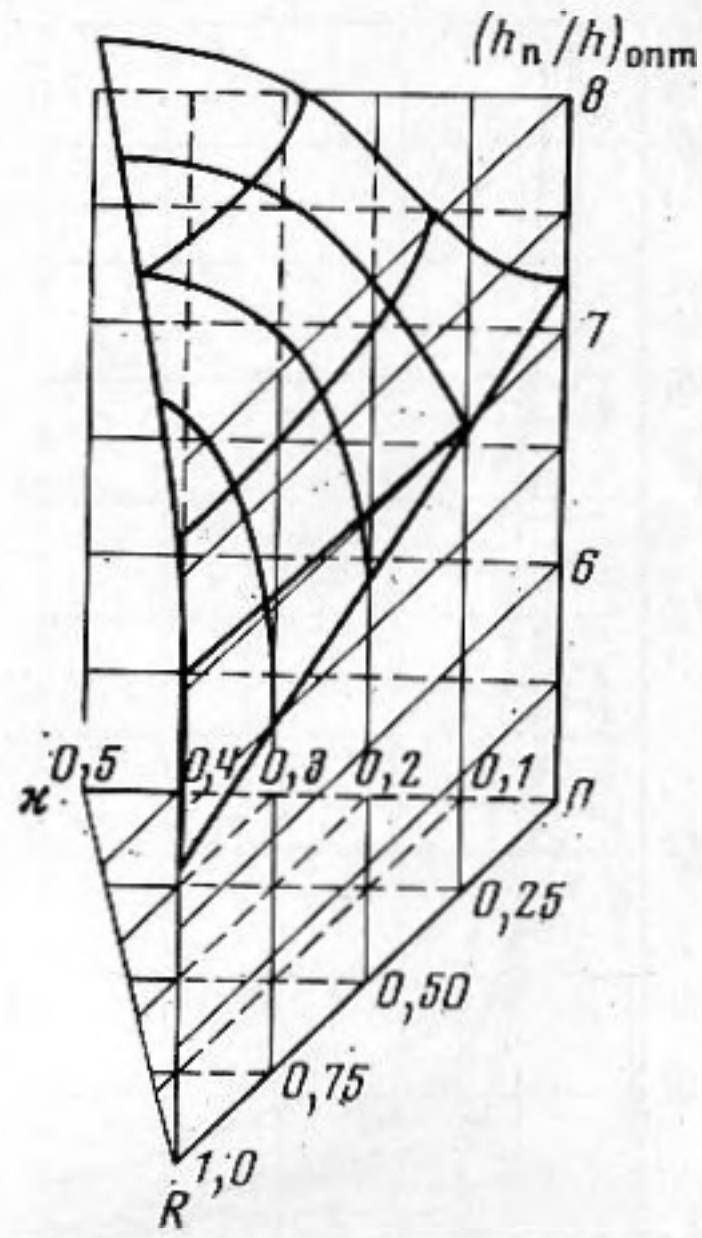
Фиг. 8. Зависимость величины обратной сумме средних спектральных плотностей энергии продольных и изгибных колебаний от относительной толщины ВПП. Кривым *1–3* соответствуют значения коэффициента связи $\varkappa$ 0; 0,05; 0,375. $R_{11}=R_{22}=0{,}25$. $E_п/E=10^{-3}$

ются только изгибные колебания. Положим $R_{11}=R_{12}=R$. При наличии связи, т. е. при $\varkappa\neq0$ (для граничного условия $Q_{10}=1$, $Q_{20}=0$), происходит перетекание части энергии из изгибных колебаний в продольные и это перетекание тем больше, чем больше коэффициент связи между типами колебаний $\varkappa$ (фиг. 7). При этом на выходе из участка, покрытого ВПП, может сложиться ситуация, когда спектральная плотность продольных колебаний больше спектральной плотности изгибных колебаний. На участке, свободном от ВПП, происходит выравнивание спектральных плотностей энергии обоих типов колебаний, которое наступает тем раньше, чем больше коэффициент связи между колебаниями $\varkappa$. Нас интересует величина $\dfrac{Q_{10}}{Q_1+Q_2}$, обратная сумме спектральных плотностей энергии изгибных и про-

дольных колебаний на выходе из демпфируемого участка пластины, которая характеризует вибродемпфирующую способность участка, покрытого ВПП. Максимум величины $\frac{Q_{10}}{Q_1+Q_2}$ с ростом коэффициента связи $\varkappa$ уменьшается (фиг. 8), т. е. увеличивается доля энергии, прошедшей через демпфируемый участок и, следовательно, вибродемпфирующая способность участка, покрытого ВПП с толщиной, близкой к оптимальной, уменьшается. Этот факт можно объяснить тем, что ребра жесткости запирают тем меньше энергии, чем больше коэффициент связи $\varkappa$, т. е. наличие



Фиг. 9



Фиг. 10

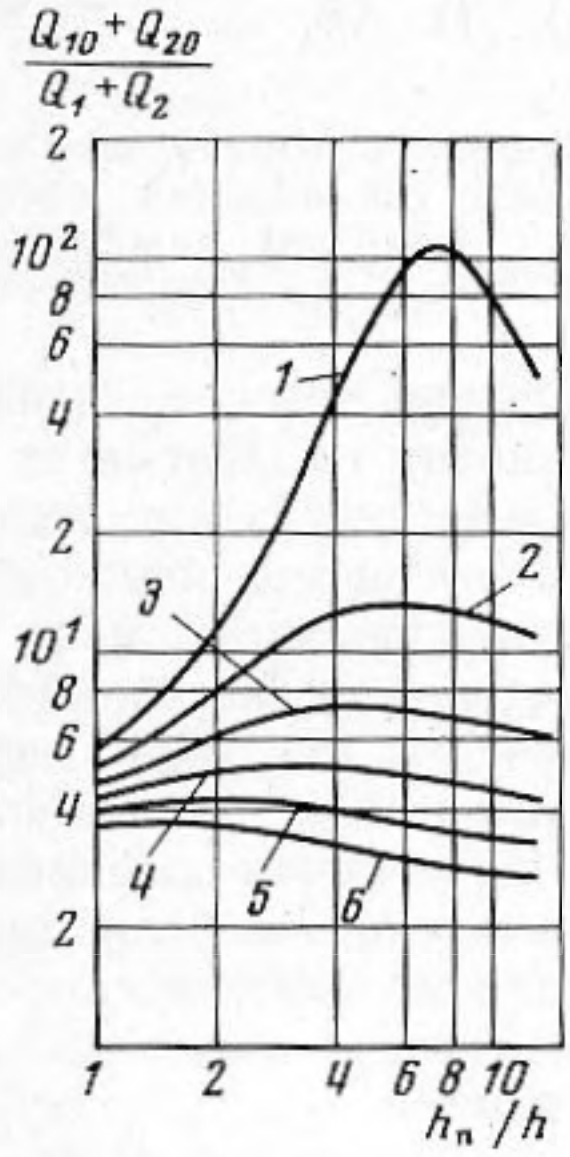
Фиг. 9. Зависимость оптимальной толщины ВПП от коэффициента связи изгибных и продольных колебаний. Кривым *1–3* соответствуют значения параметров $R_{11}=R_{22}$ 0,25; 0,5; 0,75. $E_п/E=10^{-3}$, $Q_{10}=1$

Фиг. 10. Зависимость оптимальной толщины ВПП от коэффициента отражения и коэффициента связи. $E_п/E=10^{-3}$

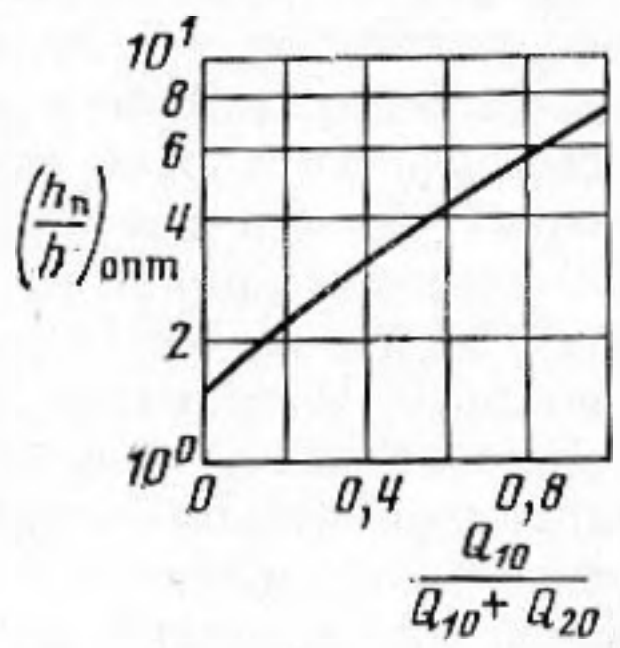
асимметрии приводит к переносу части энергии продольными колебаниями (к шунтированию ребер жесткости). ВПП в этом случае работает менее эффективно, чем в случае ребер жесткости, симметрично расположенных относительно нейтральной плоскости ($\varkappa=0$). При этом точка экстремума сдвигается в сторону бóльших толщин ВПП. С ростом коэффициента связи между двумя типами колебаний оптимальная толщина ВПП увеличивается тем быстрее, чем больше коэффициент отражения по энергии R (фиг. 9).

Влияние ребер жесткости на оптимальную толщину ВПП (при условиях $Q_{10}=1$, $Q_{20}=0$, $R_{11}=R_{22}$) можно наглядно описать заданием поверхности оптимальных толщин ВПП над плоскостью параметров R, $\varkappa$ (фиг. 10). Более существенное влияние на оптимальную толщину ВПП по сравнению с ребрами жесткости оказывают граничные условия на входе в демпфируемый участок пластины, а именно соотношение между спектральными плотностями энергии изгибных и продольных колебаний при $x=0$. Вибродемпфирующая способность участка, покрытого ВПП, характеризуется величиной, обратной отношению суммарной спектральной плотности энергии, прошедшей через демпфируемый участок к суммарной спектральной плотности энергии, вошедшей в этот участок. Можно без ог-

раничения общности предположить, что суммарная спектральная плотность энергии на входе $Q_{10}+Q_{20}=1$. На фиг. 11 видно, что чем большая часть энергии поступает в виде продольных колебаний в начале демпфируемого участка, тем меньше будет величина, характеризующая вибродемпфирующую способность участка $\frac{Q_{10}+Q_{20}}{Q_1+Q_2}$, и тем больше, следовательно, величина спектральной плотности энергии на выходе из демпфируемого участка. Особенности кривых на фиг. 11 можно объяснить тем, что при выбранном коэффициенте связи ($\varkappa=0{,}05$) значительная часть энергии переносится недемпфируемыми продольными колебаниями. Отметим, что с



Фиг. 11



Фиг. 12

Фиг. 11. Зависимость величины обратной сумме средних спектральных плотностей энергии изгибных и продольных колебаний от относительной толщины ВПП. Кривым *1–6* соответствуют относительные плотности энергии изгибных $Q_{10}/(Q_{10}+Q_{20})=1$; 0,8; 0,6; 0,4; 0,2; 0 и продольных $Q_{20}/(Q_{10}+Q_{20})=0$; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0 колебаний при $x=0$. $R_{11}=R_{22}=0{,}25$; $\varkappa=0{,}05$; $E_п/E=10^{-3}$

Фиг. 12. Зависимость оптимальной толщины ВПП от граничных условий; $R_{11}=R_{22}=0{,}25$; $\varkappa=0{,}05$, $E_п/E=10^{-3}$

увеличением доли энергии, поступающей в виде продольных колебаний, точка экстремума сдвигается в сторону меньших толщин и соответственно в сторону больших длин участка, покрываемого ВПП. На фиг. 12 видно, как соотношение между спектральными плотностями изгибных и продольных колебаний на входе в демпфируемый участок пластины влияет на оптимальную толщину ВПП: при изменении величины $Q_{10}/(Q_{10}+Q_{20})$ от 1,0 до 0 оптимальная толщина ВПП меняется от 7,3 до 1,5 соответственно.

Оптимальная толщина ВПП в отсутствие ребер жесткости определяется соотношением действительных частей моделей Юнга вибропоглощающего покрытия и пластины. При наличии ребер жесткости, симметрично расположенных относительно нейтральной оси пластины, ВПП работает более эффективно. Асимметрия расположения ребер жесткости относительно нейтральной оси несколько уменьшает эффективность ВПП. Существенное влияние на оптимальную толщину ВПП оказывает соотношение между долями энергии, поступающей в виде изгибных и продольных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Westphal.* Ausbreitung von Körperschall in Gebäuden. Akustische Beihefte, 1957, H. 1, 335–348.
2. *А. С. Никифоров, С. А. Будрин.* Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах. Л., «Судостроение», 1968.
3. *С. А. Рыбак.* Волны в пластине со случайными неоднородностями. Акуст. ж., 1971, *17*, 3, 412–418.
4. *С. А. Рыбак.* Случайно связанные изгибные и продольные колебания пластин. Акуст. ж., 1972, *18*, 1, 96–100.
5. *В. Д. Белов, С. А. Рыбак.* О применимости уравнения переноса в одномерной задаче. Акуст. ж., 1975, *21*, 2, 173–180.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
23 февраля 1976 г.