

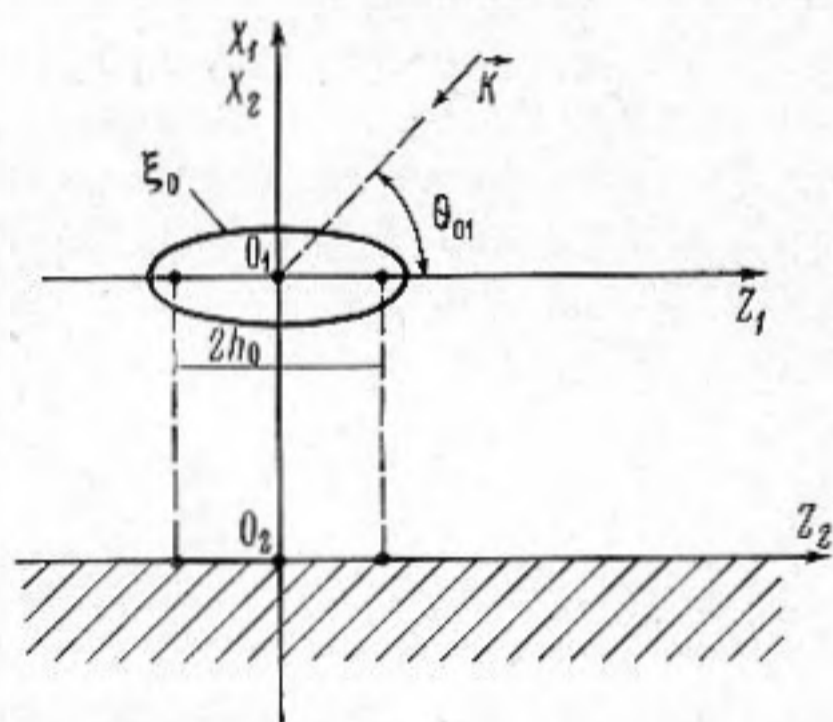
УДК 534.26

**РАССЕЯНИЕ ЗВУКА СФЕРОИДАЛЬНЫМИ ТЕЛАМИ,
НАХОДЯЩИМИСЯ У ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД**

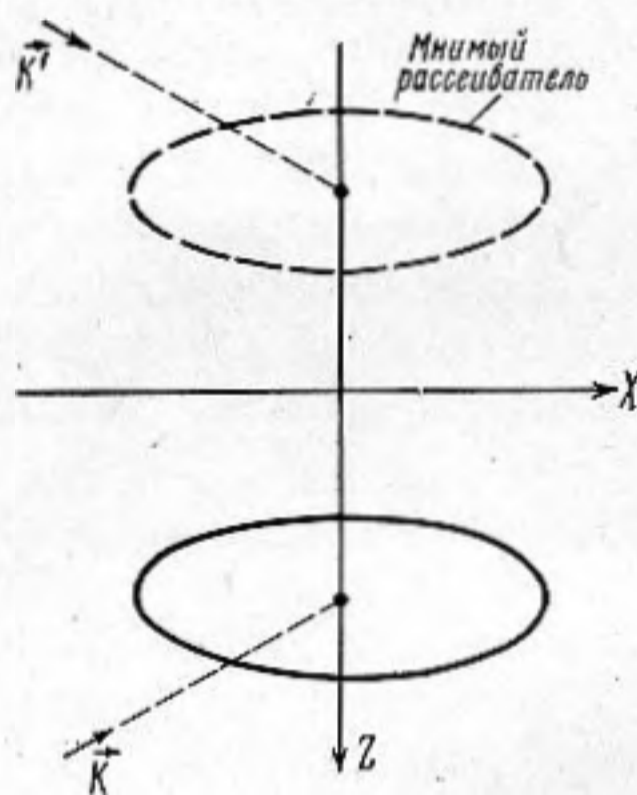
А. А. Клещев

Задача о рассеянии звука твердым сфероидальным телом, находящимся вблизи границы раздела жидкость — твердая среда, сведена к задаче о дифракции на двух взаимодействующих телах, причем плоская граница раздела сред принята в качестве координатной поверхности в сфероидальных координатах. Решение дано на основе теоремы сложения для волновых сфероидальных функций.

Пусть идеальная (невязкая) сжимаемая жидкость с плотностью ρ_1 , скоростью звука C_1' и сжимаемостью K_0 , равной коэффициенту Ламе ее Λ_1 граничит с изотропной твердой средой с плотностью ρ_2 , скоростью продольной волны C_2'' , скоростью поперечной волны C_2' и коэффициентами Ламе Λ_2 ; μ_2 ; граница раздела — плоскость Z_2Y_2 (фиг. 1). В жидкость помещен твердый вытянутый сфероид, ось вращения которого Z_1 параллельна плоскости границы (фиг. 1), материал сфероида имеет плотность ρ_1 ,



Фиг. 1. Системы декартовых и сфероидальных координат, связанных с рассеивателем и границей раздела сред



Фиг. 2. Зеркальное отражение источника и рассеивателя относительно плоской границы жидкость — идеальная среда

скорость продольной и поперечной волн соответственно C_1' и C_2' , коэффициенты Ламе Λ_1 и μ_1 .

Введем в рассмотрение две системы вытянутых сфероидальных координат ξ_s, η_s, φ_s ($S=1, 2$), первую из них ($S=1$) свяжем с рассеивателем, вторую ($S=2$) — с плоскостью границы раздела. Начало отсчета второй декартовой системы координат O_2 и фокусы сфероидальной системы определим как проекции соответственно O_1 и фокусов первой координатной системы на плоскость границы Z_2Y_2 , так что межфокусное расстояние $2h_0$ оказывается общим для обеих координатных систем. Поверхность сфероида в первой координатной системе зададим координатой ξ_0 , плоскость границы раздела представляет собой две координатные полуплоскости ($\varphi_2' = \pi/2$ и $\varphi_2'' = -\pi/2$) второй координатной системы.

Пусть в жидкости распространяется плоская монохроматическая звуковая волна частоты ω с волновым вектором \mathbf{k} , наклоненным к плоскости X_1Z_1 и плоскости X_2Z_2 под одинаковым углом φ_{0s} ($S=1, 2$): $\varphi_{01}=\varphi_{02}$. Потенциал $\Phi_i(P)$ (где P — точка наблюдения с координатами ξ_s, η_s, φ_s) падающей плоской волны разложим в ряд по собственным функциям вытянутого сфероида ($S=1, 2$):

$$(1) \quad \Phi_i(P) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-i)^n \bar{S}_{m,n}(C, \eta_{01}) \times \\ \times \bar{S}_{m,n}(C, \eta_s) R_{m,n}^{(1)}(C, \xi_s) e^{im(\varphi_s - \varphi_{0s})},$$

где $\bar{S}_{m,n}(C_s, \eta_s)$ — нормированная угловая сфероидальная функция, $R_{m,n}^{(1)}(C_s, \xi_s)$ — радиальная сфероидальная функция первого рода, $C = kh_0$; k — волновое число в жидкой среде,

$$\eta_{01} = \cos \theta_{01} \text{ (фиг. 1)}, \theta_{01} = \theta_{02}.$$

Потенциал рассеянной волны Φ_s ($S=1, 2$) находится из решения задачи дифракции на двух взаимодействующих твердых рассеивателях (сфероиде и плоскости раздела сред) с помощью теоремы сложения для сфероидальных волновых функций [1]. Потенциал Φ_s ($S=1, 2$) мы представим в виде ряда по волновым сфероидальным функциям

$$(2) \quad \Phi_s(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{m,n}^s \bar{S}_{m,n}(C, \eta_s) R_{m,n}^{(i_s)}(C, \xi_s) e^{im\varphi_s}, \quad (S=1, 2)$$

где $A_{m,n}^s$ — неизвестные коэффициенты разложения, которые определяются граничными условиями на поверхности сфероида и плоскости раздела

сред, $i_s = \begin{cases} 3 & \text{при } S=1 \\ 1 & \text{при } S=2, \end{cases}$ т. е. при $S=1$, в формуле (2) присутствуют ра-

диальные сфероидальные функции третьего рода $R_{m,n}^{(3)}(C, \xi_s)$.

Потенциал $\Phi_s(P)$ при $S=2$ раскладывается по радиальным функциям первого рода, формально это связано с тем, что фокусы второй координатной системы лежат в плоскости границы раздела, физически же это означает искажение взаимодействующими рассеивателями полей двух плоских волн: падающей и отраженной (границей раздела сред).

Поведение твердого рассеивателя и полубесконечной твердой среды мы будем описывать с помощью трех потенциалов: скалярного потенциала ψ_s ($S=1, 2$) и двух потенциалов Дебая U_s и V_s ($S=1, 2$) [2—4]. Все три потенциала удовлетворяют скалярному уравнению Гельмгольца и определяют вектор упругого смещения \mathbf{u}_s ($S=1, 2$) [4, 5]:

$$(3) \quad \mathbf{u}_s = -\text{grad } \psi_s + \text{rot } \mathbf{A}_s,$$

где $\mathbf{A}_s = \text{rot rot}(\mathbf{R}U_s) + ik_{ts} \text{rot}(\mathbf{R}V_s)$, \mathbf{R} — радиус-вектор точки наблюдения, $k_{ts} = \omega \left(\frac{\rho_s}{\mu_s} \right)^{1/2}$ — волновое число для поперечной волны.

Разложим потенциалы ψ_s, U_s, V_s по сфероидальным волновым функциям, представляющим собой фундаментальные решения уравнений Гельмгольца

$$(4) \quad \psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{m,n} \bar{S}_{m,n}(C_{11}, \eta_1) R_{m,n}^{(1)}(C_{11}, \xi_1) e^{im\varphi_1},$$

$$(5) \quad U_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{m,n} \bar{S}_{m,n}(C_{11}, \eta_1) R_{m,n}^{(1)}(C_{11}, \xi_1) e^{im\varphi_1}.$$

(Потенциал V_1 представляется рядом, аналогичным (5), с коэффициентами $D_{m,n}$ вместо $C_{m,n}$.) В разложениях (4) и (5) приняты следующие обозначения: $C_{t_1} = k_{t_1} h_0 = \omega \left(\frac{\rho_1}{\Lambda_1 + 2\mu_1} \right)^{1/2} h_0$, $C_{t_2} = k_{t_2} h_0$ — волновые размеры,

$$C_{t_2} = \omega \left(\frac{\rho_1}{\mu_1} \right)^{1/2} h_0.$$

$$(6) \quad \psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{S}_{m,n}(C_{t_2}, \eta_2) R_{m,n}^{(1)}(C_{t_2}, \xi_2) [E_{m,n} \cos m\varphi_2 + F_{m,n} \sin m\varphi_2],$$

$$(7) \quad U_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{S}_{m,n}(C_{t_2}, \eta_2) R_{m,n}^{(1)}(C_{t_2}, \xi_2) [G_{m,n} \cos m\varphi_2 + H_{m,n} \sin m\varphi_2],$$

где $C_{t_1} = k_{t_1} h_0 = \omega \left(\frac{\rho_2}{\Lambda_2 + 2\mu_2} \right)^{1/2} h_0$; $C_{t_2} = k_{t_2} h_0 = \omega \left(\frac{\rho_2}{\mu_2} \right)^{1/2} h_0$.

(Потенциал V_2 разлагается в ряд, аналогичный (7), с коэффициентами $I_{m,n}$ вместо $G_{m,n}$ и $K_{m,n}$ вместо $H_{m,n}$ соответственно.)

Неизвестные коэффициенты разложений (и в первую очередь коэффициенты $A_{m,n}^S$) находятся из физических граничных условий на поверхностях сфероида рассеивателя и полубесконечной твердой среды: на границе с жидкостью ($S=1: \xi = \xi_0$; $S=2: \varphi = -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$) нормальное напряжение равно звуковому давлению в жидкой среде, касательные напряжения отсутствуют, нормальные смещения непрерывны.

В компонентах вектора смещения $\mathbf{u}(u_{\xi}^{(s)}, u_{\eta}^{(s)}, u_{\varphi}^{(s)})$ и компонентах тензора деформации граничные условия примут вид:

1) на поверхности сфероида $(S=1: \xi = \xi_0)$.

$$(8) \quad \Lambda\vartheta = \Lambda_1\vartheta_1 + 2\mu_1 U_{\xi\xi}^{(1)} \Big|_{\xi=\xi_0},$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{h_{\eta}^{(1)}}{h_{\xi}^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_{\eta}^{(1)}}{h_{\eta}^{(1)}} \right) + \frac{h_{\xi}^{(1)}}{h_{\eta}^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_{\xi}^{(1)}}{h_{\xi}^{(1)}} \right) = 0 \\ \frac{h_{\varphi}^{(1)}}{h_{\xi}^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_{\varphi}^{(1)}}{h_{\varphi}^{(1)}} \right) + \frac{h_{\xi}^{(1)}}{h_{\varphi}^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u_{\xi}^{(1)}}{h_{\xi}^{(1)}} \right) = 0 \end{array} \right\} \Big|_{\xi=\xi_0},$$

$$(10) \quad u_{\xi} = u_{\xi}^{(1)} \Big|_{\xi=\xi_0},$$

где ϑ — дилатация (объемное расширение) жидкой среды, ϑ_1 — дилатация материала упругого рассеивателя,

$$(11) \quad \vartheta = \text{div } \mathbf{u} = -\Delta\Phi_0 = k^2\Phi_0; \dots; \Phi_0 = \Phi_i + \Phi_1 + \Phi_2,$$

$h_{\xi}^{(1)}, h_{\eta}^{(1)}, h_{\varphi}^{(1)}$ — масштабные множители первой координатной системы, $u_{\xi}^{(1)}$ — относительное удлинение для радиальной координаты ξ ;

2) на поверхности твердого полупространства ($S=2: \varphi = +\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}$)

$$(12) \quad \Lambda\vartheta = \Lambda_2\vartheta_2 + 2\mu_2 u_{\varphi\varphi}^{(2)} \Big|_{\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}},$$

$$(13) \quad \left. \begin{cases} \frac{h_\eta^{(2)}}{h_\varphi^{(2)}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u_\eta^{(2)}}{h_\eta^{(2)}} \right) + \frac{h_\varphi^{(2)}}{h_\eta^{(2)}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_\varphi^{(2)}}{h_\varphi^{(2)}} \right) = 0 \\ \frac{h_\varphi^{(2)}}{h_\xi^{(2)}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_\varphi^{(2)}}{h_\varphi^{(2)}} \right) + \frac{h_\xi^{(2)}}{h_\varphi^{(2)}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u_\xi^{(2)}}{h_\xi^{(2)}} \right) = 0 \end{cases} \right|_{\varphi=\pi/2; -\pi/2}$$

$$(14) \quad u_\varphi = u_\varphi^{(2)} \Big|_{\varphi=\pi/2; \varphi=-\pi/2},$$

где $h_\xi^{(2)}, h_\eta^{(2)}, h_\varphi^{(2)}$ — масштабные множители координатной системы, связанной с твердым полупространством.

Если в частном случае $\varphi_{0S} = 0^\circ$, то в силу симметрии задачи относительно плоскости XZ из граничных условий (12) — (14) следует равенство нулю коэффициентов $F_{m,n}; G_{m,n}; K_{m,n}$, а соотношения (6), (7) принимают вид

$$(15) \quad \psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{|m|,n} \bar{S}_{m,n}(C_{12}, \eta_2) R_{m,n}^{(1)}(C_{12}, \xi_2) e^{im\varphi_2},$$

$$(16) \quad U_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n H_{|m|,n} \bar{S}_{m,n}(C_{12}, \eta_2) R_{m,n}^{(1)}(C_{12}, \xi_2) e^{im\varphi_2} - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{-1} H_{|m|,n} \bar{S}_{m,n}(C_{12}, \eta_2) R_{m,n}^{(1)}(C_{12}, \xi_2) e^{im\varphi_2}.$$

При переходе от одной координатной системы к другой в граничных условиях используется теорема сложения для волновых сферических функций [1] в виде

$$(17) \quad R_{p,q}^{(1),(3)}(C_j, \xi_j) \bar{S}_{p,q}(C_j, \eta_j) e^{ip\varphi_j} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{Q}_{m,n,p,q}^{(1),(3)}(C_j, C_S; l, \theta_{jS}) \bar{S}_{m,n}(C_S, \eta_S) R_{m,n}^{(1)}(C_S, \xi_S) e^{im\varphi_S},$$

где

$$Q_{m,n,p,q}^{(1),(3)} = 2(-i)^{n-q} \sum_{r=0,1}^{\infty} \sum_{t=0,1}^{\infty} d_r^{pq}(C_j) d_t^{mn}(C_S) \times \\ \times \sum_{\sigma=|r+p-t-m|}^{r+p+t+m} (-i)_{\sigma} \tilde{b}_{\sigma}^{(r+p,p,t+m,m)} z_{\sigma}^{(1),(3)}(kl) \tilde{P}_{\sigma}^{p-m}(\theta_{jS}) e^{i(p-m)\varphi_{jS}},$$

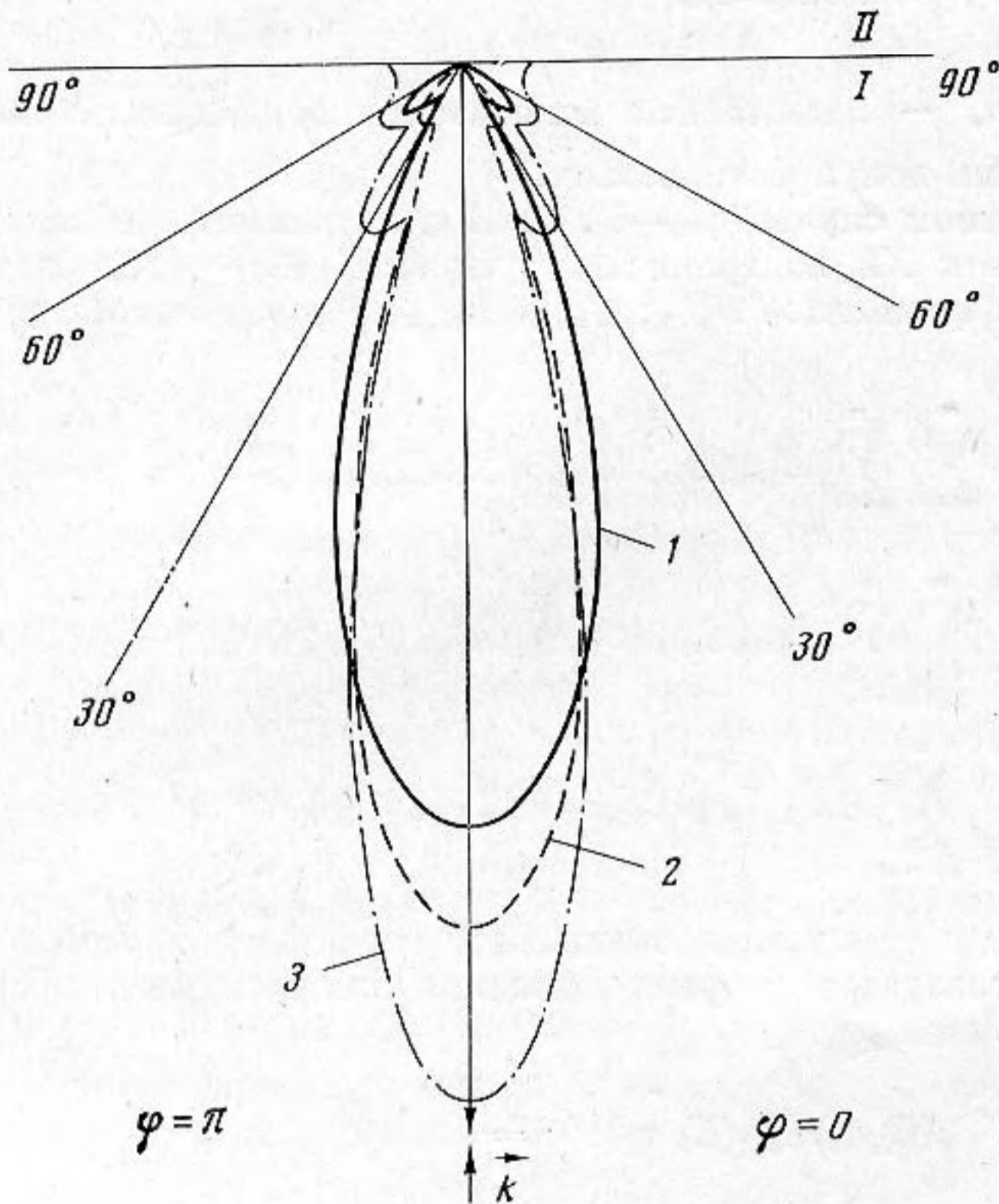
θ_{jS} — полярный угол точки O_S — начала S -й локальной системы координат — в j -й системе, l — расстояние между O_j и O_S ; $d_r^{pq}(C_j), d_t^{mn}(C_S)$ — коэффициенты разложений функций $\bar{S}_{p,q}(C_j, \eta_j)$ и $\bar{S}_{m,n}(C_S, \eta_S)$ по функциям $\tilde{P}_r^p(\eta_j)$ и $\tilde{P}_t^m(\eta_S)$, которые с точностью до постоянного множителя совпадают с нормированными присоединенными функциями Лежандра,

$Z_{\sigma}^{(1)} = j(kl)$ — сферическая функция Бесселя, $z_{\sigma}^{(3)} = h_{\sigma}^{(1)} = h_{\sigma}^{(1)}(kl)$ — сфери-

ческая функция Ханкеля первого рода, коэффициенты $\tilde{b}_{\sigma}^{(r+p,p,t+m)}$ получа-

ются из коэффициентов $b_0^{(r+p, p, l+m, m)}$ [1] с учетом связи $\tilde{P}_l^m(\eta_S)$ и присоединенных функций Лежандра.

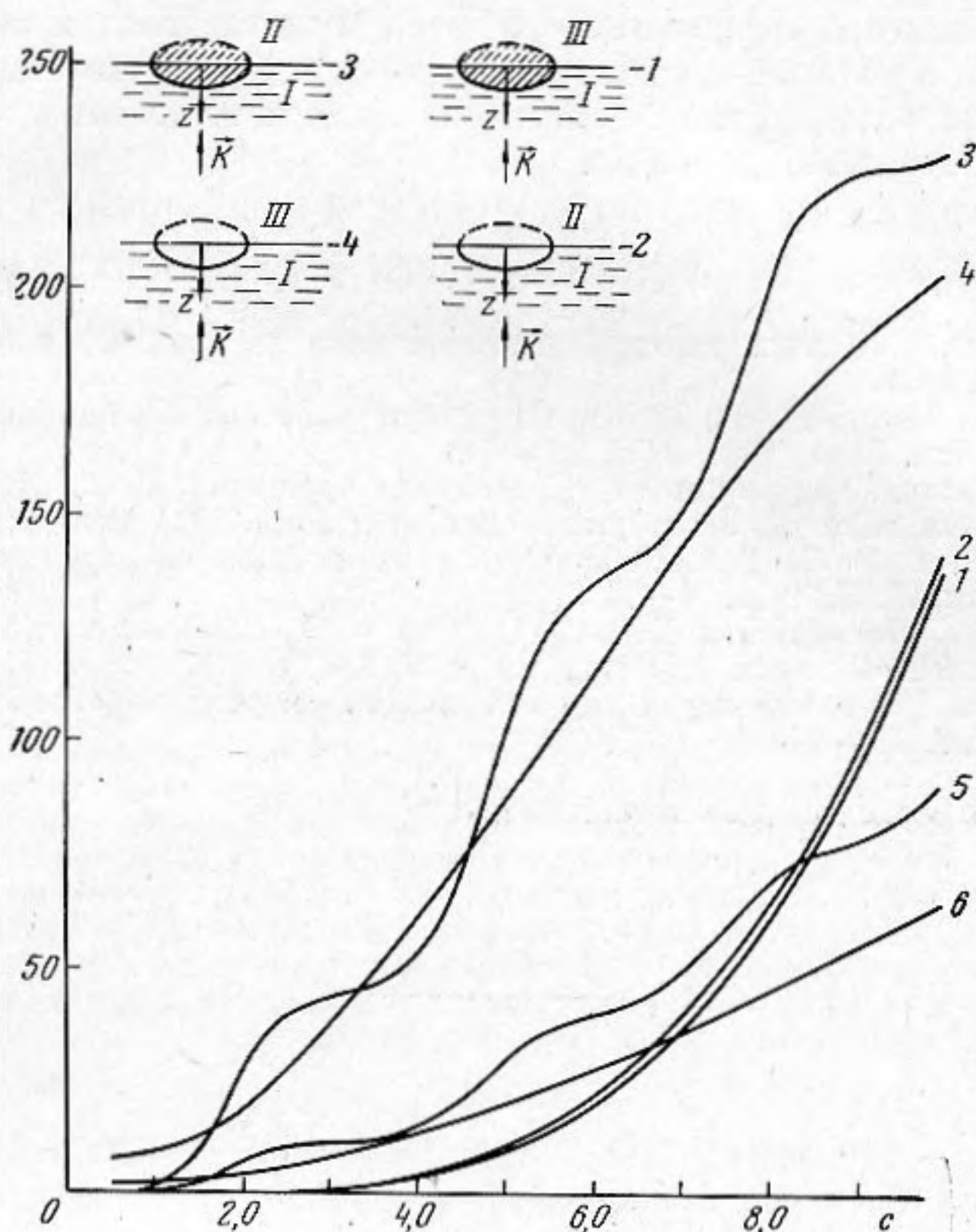
Подставляя разложения потенциалов ψ_S, U_S, V_S ($S=1,2$) сначала в формулы (3), (11), а затем в граничные условия (8)–(10), (12)–(14), мы получим бесконечную систему уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов разложений, которая может быть решена методом усечений, например, как это сделано в работе [6], при вычислении рассеяния



Фиг. 3. Модули угловых характеристик рассеяния твердых и идеальных полутел сфероидальной формы

звука сжатой сфероидальной оболочкой. Решение значительно упрощается, если рассеиватель находится вблизи границы раздела жидкость — идеальная среда (жесткая или мягкая). В этом случае при зеркальном отображении источника и рассеивателя относительно плоской границы раздела мы приходим к задаче рассеяния звука двумя взаимодействующими рассеивателями, находящимися в поле двух источников (фиг. 2). Если на такой границе (жидкость — идеальная среда) поместить полутело, то в итоге получаем рассеиватель (полное тело), облучаемое двумя источниками, при этом волновой вектор мнимого источника представляет собой зеркальное отображение волнового вектора действительного источника, а знак потенциала падающей волны от мнимого источника совпадает со знаком потенциала истинного источника, если жидкость граничит с идеально жесткой средой, и меняется на противоположный, если жидкость граничит с идеально мягкой средой. На фиг. 3 (кривая 1) представлен на основе расчетов, выполненных в работе [6], модуль угловой характеристики рассеяния половины сжатой сфероидальной оболочки, находящейся на границе жидкости (I) с идеально мягкой средой (II) (волновой размер тела $C=7,1$) и облучаемой плоской звуковой волной с волновым вектором k , параллельным ее оси вращения ($\theta_0=0^\circ$). Две другие кривые

Фиг. 3 соответствуют (в ином масштабе) модулям угловых характеристик мягкого сжатого полусфероида, граничащего с мягкой (кривая 2) и жесткой (кривая 3) средами при том же угле облучения $\theta_0=0^\circ$ и волновом размере тела $S=10$; координата внешней поверхности оболочки и тела одинаковая: $\xi_0=0,1005$.



Фиг. 4. Относительные сечения обратного рассеяния σ_0 идеальных сфероидов (в безграничной среде) и полусфероидов (находящихся на границе раздела сред)

На фиг. 4 представлены относительные сечения обратного рассеяния σ_0 полутел, помещенных на границе раздела сред. Сечения σ_0 вычислялись по формуле

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{A} |\psi_{\Sigma}(\eta_0, \varphi_0)|^2,$$

где A — площадь геометрической тени полного тела рассеивателя, $\psi_{\Sigma}(\eta_0, \varphi_0)$ — суммарная угловая характеристика (от истинного и мнимого источников), η_0, φ_0 — угловые координаты волнового вектора \mathbf{k} падающей волны. Кривые фиг. 4 соответствуют осесимметричному облучению ($\theta_0=0^\circ$, $\eta_0=\arccos \cos \theta_0=+1$) сжатого полусфероида (мягкого или жесткого — заштрихованного) с радиальной координатой $\xi_0=0,1005$. Кривые 1 и 3 относятся к жесткому полусфероиду, помещенному на границе с жесткой (1) и мягкой (3) средами (мягкая среда обозначена цифрой II, жесткая — цифрой III). Кривые 2 и 4 соответствуют мягкому полусфероиду, находящемуся на границе с мягкой (2) и жесткой (4) средами. Кривые 5 и 6 дают представление об изменении σ_0 жесткого (5) и мягкого (6) сжатых сфероидов ($\xi_0=0,1005$) в безграничной жидкой среде.

В то время как кривые 5 и 6 асимптотически стремятся к значению для случая геометрической акустики, остальные кривые неограниченно под-

нимаются. Математически это вызвано тем, что σ_0 определяется в данном случае суммой зеркального и теневого лепестков угловой характеристики отражения звука телом. Физическое объяснение этому явлению заключается в том, что рассеянные в поле действительного и мнимого источников волны искажают в данном случае поле стоячей (а не бегущей) волны. С ростом же волнового размера C (т. е. ростом частоты ω) в направлении зеркального лепестка отражения сужается и вытягивается все дальше от полутела зона, в которой преобладающую роль играют потенциал бегущей плоской волны (создаваемой действительным источником) и вызванный им потенциал отраженной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. А. Иванов*. Дифракция электромагнитных волн на двух телах, Минск, «Наука и техника», 1968.
2. *P. Debye*. Das Verhalten von Lichtwellen in der Nähe eines Brennpunktes oder einer Brennline. Ann. Phys., 1909, 30, 4, 755—776.
3. *В. А. Фок*. Теория дифракции от параболоида вращения. В сб.: Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения. М., «Сов. радио», 1957.
4. *Т. Л. Гутман, А. А. Клещев*. Дифракция упругих волн на упругом сфероиде. Тр. ЛОЛКИ, вып. 91, Л., 1974, 31—37.
5. *А. А. Клещев*. Потенциалы Дебая в задаче о трехмерных колебаниях упругой сфероидальной оболочки. Акуст. ж., 1975, 21, 3, 472—475.
6. *А. А. Клещев*. Рассеяние звука упругой сжатой сфероидальной оболочкой. Акуст. ж., 1975, 21, 6, 938—940.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила
17 мая 1976 г.