АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIII 1977 Вып. 3

УДК 534.232

К ТЕОРИИ ГЕНЕРАЦИИ ЗВУКА В ЖИДКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЕЙ ПРИ ПОГЛОЩЕНИИ В НЕМ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С МОДУЛИРОВАННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ

Л. М. Лямшев, Л. В. Седов

В рамках метода малых возмущений теоретически рассмотрено влияние на генерацию звука неровной границы жидкого полупространства при поглощении в нем лазерного излучения с модулированной интенсивностью. Неровности предполагаются пологими, статистически однородными и изотропными, а высота их — малой по сравнению с длиной звуковой волны. Считается, что механизм генерации звука носит тепловой характер и рассматривается установившийся режим генерации. Получены выражения, позволяющие рассчитывать в дальней зоне среднее поле и интенсивность флуктуаций звукового поля. Для некоторых предельных случаев приведены простые соотношения, связывающие среднее звуковое поле с параметром Рэлея, среднеквадратичной высотой и пространственным радиусом корреляции неровностей. Неровности границы двояко влияют на флуктуации звукового поля: во-первых, поле объемных тепловых источников рассеивается на случайных неровностях границы, во-вторых, интенсивность этих источников флуктуирует, поскольку изменяется случайным образом оптическая длина пути луча лазера в жидкости *.

Опубликованные недавно работы [2, 3] посвящены теории генерации звука в жидком полупространстве с неровной границей при поглощении в нем оптического излучения с модулированной интенсивностью. Однако в этих работах рассмотрен лишь случай, когда размеры неровностей границы велики по сравнению с длиной волны генерируемого звука. Между тем в некоторых экспериментах приходится сталкиваться с обратной ситуацией, когда высота неровностей мала по сравнению с длиной звуковой волны. Поэтому представляет определенный интерес рассмотреть задачу оптической генерации звука в полупространстве с малыми неровностями поверхности.

Пусть на свободную неровную границу жидкого полупространства $z\geqslant\zeta(x, y)$ падает луч лазера, распространяющийся в положительном направлении оси z, а неровности границы носят случайный характер и $\overline{\zeta(x, y)}=0$. Здесь и ниже черта сверху означает усреднение по статистическому ансамблю. Предположим, что интенсивность оптического излучения относительно невелика, так что изменения агрегатного состояния вещества в области поглощения света не происходит и механизм генерации звука носит чисто тепловой характер.

Если не интересоваться затуханием звука, что практически не ограничивает общности рассмотрения задачи, то для описания звукового поля в жидкости можно использовать решение уравнения

$$\Delta p-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=-\frac{\varkappa}{c_p}\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (1)$$

* По материалам доклада [1].

где p — звуковое давление, c — скорость звука, $\varkappa$ и c_p — коэффициент теплового объемного расширения и удельная теплоемкость жидкости соответственно, $H(x, y, z, t)$ — плотность мощности тепловых источников, обусловленных поглощением в жидкости энергии оптического излучения.

Решение уравнения (1) должно удовлетворять граничному условию

$$p\,|_{z=\zeta(x,\,y)}=0$$

и условию погашаемости на бесконечности.

Для плотности мощности тепловых источников можно написать

$$H(x, y, z, t)=A\mu I(x, y)\exp\{-\mu[z-\zeta(x, y)]\}\cdot(1+m\cos\omega t).$$

Здесь $I(x, y)$ — функция, описывающая поперечное распределение интенсивности в лазерном пучке, m — индекс модуляции $0\leqslant m\leqslant 1$, μ — коэффициент поглощения оптического излучения в жидкости, A — коэффициент прохождения света через границу жидкости. Ограничимся рассмотрением пологих неровностей границы и будем предполагать, что A не зависит от угла наклона границы в месте падения луча. Оценки показывают, что это предположение вполне оправдано.

Для удобства дальнейших выкладок представим $\partial H/\partial t$ в комплексной форме

$$\partial H/\partial t=-i\omega mA\mu I(x, y)\exp\{-\mu[z-\zeta(x, y)]\}\cdot\exp(-i\omega t),$$

опуская в дальнейшем фактор $\exp(-i\omega t)$.

Теперь уравнение (1) принимает вид

$$\Delta p+k^2p=\frac{i\omega m\varkappa}{c_p}A\mu I(x,y)\exp\{-\mu[z-\zeta(x,y)]\}, \tag{2}$$

где $k=\omega/c$ — волновое число звука в жидкости.

Пользуясь принципом взаимности [4], напишем решение уравнения (2) в виде

$$p(\mathbf{r}_0)=-\frac{i\omega m\varkappa A\mu}{c_p}\int\limits_V I(x,y)\exp\{-\mu[z-\zeta(x,y)]\}G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,dV, \tag{3}$$

где $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ — функция, удовлетворяющая условию

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\,|_{z=\zeta(x,\,y)}=0. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ — радиус-вектор точки наблюдения, $\mathbf{r}(x, y, z)$ — радиус-вектор текущей точки и интегрирование в (3) проводится по части полупространства $z\geqslant\zeta(x, y)$, где существуют тепловые источники.

Функция $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ представляет собой решение задачи о поле точечного источника, расположенного в той точке $\mathbf{r}_0$ полупространства с неровной границей, где необходимо определить поле излучения.

Как известно, точное аналитическое представление для $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ пока получить не удается. Поэтому, сделав определенные предположения относительно параметров задачи, будем пользоваться приближенным выражением для $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$.

Будем интересоваться звуковым полем в дальней зоне*. В этом случае функцию $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ можно представить как решение задачи о дифракции плоской монохроматической волны на неровной границе, сферическое расхождение поля учесть обычным множителем $\exp(ikr_0)/4\pi r_0$ (см., например, [6]). Предположим, что высота неровностей границы мала по сравнению с длиной звуковой волны. Ограничимся также для простоты

* Здесь имеется в виду дальняя зона как по отношению к размерам области эффективного тепловыделения, а значит и эффективной генерации звука, так и по отношению к неровной границе. Условия, определяющие дальнюю зону по отношению к неровной границе, подробно рассмотрены, например, в [5].

рассмотрением пологих, статистически однородных и изотропных неровностей границы.

Задача о рассеянии плоской звуковой волны на границе с малыми пологими неровностями подробно рассмотрена в литературе (см., например, [5, 7]) и в дальнейшем в части представления решения $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ будем в основном следовать этим работам.

Разложим граничное условие (4) в ряд по степеням малого параметра $k\sigma$, где σ — среднеквадратичная высота неровностей, и удержим в ряду лишь члены не выше второго порядка малости. Тогда точное граничное условие заменяется приближенным при $z=0$. Представим поле, описываемое функцией $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ в виде суммы среднего поля $G_{\text{ср}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ и случайной добавки $G_{\text{сл}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_{\text{ср}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + G_{\text{сл}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0),$$

где $\overline{G_{\text{сл}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}=0$. Для функции $G_{\text{ср}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ напишем, сохраняя члены не выше второго порядка малости по $k\sigma$, приближенное выражение

$$G_{\text{ср}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\exp(ikr_0)}{4\pi r_0} \exp[i(k_x x + k_y y)]\{\exp(-ik_z z) + v \exp(ik_z z)\}, \tag{5}$$

где (k_x, k_y, k_z) — компоненты волнового вектора $\mathbf{k}$, совпадающего по направлению с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$, а v — средний коэффициент отражения плоской звуковой волны от неровной границы, который, как можно показать, выражается через нормированную функцию корреляции статистически однородных и изотропных неровностей $N(\rho)$, где ρ — расстояние по горизонтали между двумя точками на границе, следующим образом: $v=-1+\eta \cos\theta$, а

$$\eta = 2ik\sigma^2 \int_0^\infty N(\rho) J_0(k\rho \sin\theta) \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\exp(ik\sqrt{\rho^2+z^2})}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right]\Bigg|_{z=0} \rho\, d\rho. \tag{6}$$

В выражении (6) θ — угол между осью z и радиус-вектором $\mathbf{r}_0$, $J_0(k\rho\sin\theta)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Таким образом, имеем

$$G_{\text{ср}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + O(k^2\sigma^2),$$

где

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\exp(ikr_0)}{4\pi r_0} \exp[i(k_x x + k_y y)]\{\exp(-ik_z z) - \exp(ik_z z)\}. \tag{7}$$

Слагаемое $G_{\text{сл}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ в рамках сделанных выше допущений имеет вид

$$G_{\text{сл}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\exp(ikr_0)}{4\pi r_0} \Psi(x, y, z), \tag{8}$$

где $\Psi(x, y, z)$ — случайная составляющая поля рассеяния плоской монохроматической звуковой волны, падающей под углом θ на статистически неровную границу полупространства.

Функцию $\Psi(x, y, z)$, как известно (см. [7]), можно представить в виде двойного интеграла Фурье

$$\Psi(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha, \beta) \exp[i(\alpha x + \beta y + \gamma z)]\, d\alpha\, d\beta, \tag{9}$$

где $\gamma=\sqrt{k^2-\alpha^2-\beta^2}$, а выражение для случайной амплитуды $A(\alpha, \beta)$ имеет вид

$$(10)\qquad A(\alpha,\beta)=\frac{i}{2\pi^2}k\cos\theta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\zeta(x,y)\times$$

$$\times\exp\{-i[(\alpha-k_x)x+(\beta-k_y)y]\}\,dx\,dy.$$

Сделаем еще одно предположение. Пусть $\mu\sigma\ll1$ и представим $\exp[\mu\zeta(x, y)]$ в виде ряда, сохраняя члены не выше второго порядка малости по $\mu\sigma$:

$$(11)\qquad \exp[\mu\zeta(x,y)]=1+\mu\zeta(x,y)+\frac{\mu^2}{2}\zeta^2(x,y).$$

Такое допущение оказывается здесь вполне естественным, поскольку, как это уже отмечалось в работе [8], наиболее эффективное преобразование оптической энергии в звуковую происходит при $k\sim\mu$ и, следовательно, этот случай наиболее практически интересен.

На основании соотношений (3)—(11) получаем, сохраняя члены не выше второго порядка малости по $k\sigma$ и $\mu\sigma$, приближенное выражение, описывающее решение $p(\mathbf{r}_0)$:

$$(12)\qquad p(\mathbf{r}_0)=-\frac{i\omega m\varkappa A\mu}{c_p}\int\limits_V I(x,y)\exp(-\mu z)\times$$

$$\times\left\{G_{\text{ср}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)+\mu\zeta(x,y)G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)+\frac{\mu^2}{2}\zeta^2(x,y)G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)+\right.$$

$$\left.+G_{\text{сл}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)+\mu\zeta(x,y)G_{\text{сл}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\right\}dV.$$

Перейдем в (12) от интегрирования по объему $V(z\geqslant\zeta(x, y))$ к интегрированию по объему V_0 $(z\geqslant0)$ и оценим допускаемую при этом ошибку. Нетрудно видеть, что эта ошибка Δ будет равна

$$(13)\qquad \Delta=-\frac{i\omega m\varkappa A\mu}{c_p}\int\limits_0^{\zeta(x,y)}\int\limits_{S_0}F(x,y,z)\,dz\,dS,$$

где $F(x, y, z)$ обозначает подынтегральное выражение в (12), а S_0 — площадка в плоскости (x, y), ограничивающая объем, занятый тепловыми источниками. Учитывая принятые выше ограничения, представим $F(x, y, z)$ в (13) приближенно в виде

$$F(x,y,z)=F(x,y,0)+\left.\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0}z.$$

Интегрирование по z в (13) теперь легко выполняется. В результате получаем

$$\Delta=-\frac{i\omega m\varkappa A\mu}{c_p}\int\limits_{S_0}\left\{F(x,y,0)\zeta(x,y)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0}\zeta^2(x,y)\right\}dS.$$

Подставляя сюда значение $F(x, y, z)$ из (12), используя (5)—(9) и сохраняя члены не выше второго порядка малости по $k\sigma$ и $\mu\sigma$, окончательно получаем, что при замене в (12) интегрирования по объему V интегрированием по V_0, в правую часть выражения (12) необходимо добавить слагаемое

$$(14)\qquad \Delta=\frac{\omega m\varkappa A}{c_p}k\mu\cos\theta\frac{\exp(ikr_0)}{4\pi r_0}\int\limits_{S_0}\zeta^2(x,y)I(x,y)\times$$

$$\times\exp[i(k_xx+k_yy)]dS.$$

Выражения (12) и (14) определяют с точностью до членов второго порядка малости по $k\sigma$ звуковое поле, генерируемое лазерным источником, в жидкости, занимающей полупространство с неровной границей, при условии, что высота неровностей мала по сравнению с длиной звуковой волны.

Представим это поле в виде суммы среднего поля $p_{\text{ср}}(\mathbf{r}_0)$ и случайной добавки $p_{\text{сл}}(\mathbf{r}_0)$:

$$p(\mathbf{r}_0)=p_{\text{ср}}(\mathbf{r}_0)+p_{\text{сл}}(\mathbf{r}_0)$$

так, что $\overline{p_{\text{сл}}(\mathbf{r}_0)}=0$.

Рассмотрим теперь для определенности конкретный вид распределения интенсивности света $I(x, y)$ в лазерном пучке. Обычно считают, что реальное распределение близко к гауссовому, поэтому примем

$$(15)\qquad I(x,y)=I_0\exp[-(x^2+y^2)/a^2].$$

Подставляя (15) в (12) и (14) и усредняя по ансамблю реализаций функции $\zeta(x, y)$, получаем для среднего поля выражение

$$(16)\qquad p_{\text{ср}}(\mathbf{r}_0)=-\frac{\omega m\varkappa A}{c_p}a^2\frac{I_0\exp(ikr_0)}{2r_0}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{k^2a^2}{4}\sin^2\theta\right)\frac{k\mu\cos\theta}{\mu^2+k^2\cos^2\theta}f(\theta).$$

Здесь

$$(17)\qquad f(\theta)=1-\frac{\eta}{2}\cos\theta+i\frac{\mu}{k}\frac{\eta}{2}-\frac{(k\sigma\cos\theta)^2}{2}-$$

$$-\mu(\mu^2+k^2\cos^2\theta)\int\limits_0^\infty G(\chi)\chi\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\chi\,d\psi}{\mu-i\sqrt{k^2-(\chi\cos\psi+k\sin\theta)^2-\chi^2\sin^2\psi}},$$

где функция $G(\chi)$ представляет собой пространственный спектр статистически однородных и изотропных неровностей границы. Пространственный спектр связан с функцией корреляции неровностей известным соотношением

$$\sigma^2N(\rho)=2\pi\int\limits_0^\infty G(\chi)J_0(\chi\rho)\chi\,d\chi.$$

Функция $f(\theta)$ характеризует влияние неровностей границы на звуковое поле в жидком полупространстве. При отсутствии неровностей $f(\theta)=1$ и выражение (16) описывает поле, генерируемое оптическим источником в полупространстве с ровной границей. Оно совпадает с соответствующим выражением, полученным в [8].

Выражения (16), (17) и (6) позволяют вычислить параметры средней составляющей звукового поля в полупространстве по известным характеристикам неровностей границы.

Отметим некоторые частные случаи, когда удается несколько упростить выражение (17). Пусть $k\rho_0\gg1$, где ρ_0 — радиус корреляции неровностей. Рассмотрим двойной интеграл в (17). На существенном участке интегрирования $\chi \ll k$ и положим приближенно $\chi=0$ в знаменателе подынтегрального выражения. Поскольку $\int\limits_0^\infty G(\chi)\chi\,d\chi=\sigma^2/2\pi$, получаем

$$f(\theta)=1-\frac{\eta}{2}\cos\theta+i\frac{\mu}{k}\frac{\eta}{2}-\frac{(k\sigma\cos\theta)^2}{2}-(\mu\sigma)^2-i\mu k\sigma^2\cos\theta.$$

Если, кроме того, рассматривать нескользящие углы наблюдения

$(k\rho_0\cos^2\theta \gg 1)$, то $\eta=2(k\sigma)^2\cos\theta$ и $f(\theta)=1-3P^2/8-(\mu\sigma)^2$,

где $P=2k\sigma\cos\theta$ — параметр Рэлея. Таким образом, в данном случае ослабление среднего поля по сравнению с полем в полупространстве с ровной границей определяется не только параметром Рэлея, как при отражении плоской волны от неровной границы, но и величиной $\mu\sigma$. Отметим, что последняя не зависит от угла наблюдения.

При скользящих углах наблюдения, таких, что $k\rho_0\cos^2\theta \ll 1$, хотя $k\rho_0 \gg 1$,

$$\eta=-\frac{(2k\sigma)^2}{\sqrt{2\pi k\rho_0}}e^{i\pi/4}\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\tilde{x}}}\frac{dN(\tilde{x})}{d\tilde{x}}d\tilde{x},$$

где $N(\tilde{x})$ — нормированная функция корреляции неровностей границы, а $\tilde{x}$ — расстояние, нормированное на радиус корреляции. В частности, при $N(\tilde{x})=\exp(-\tilde{x}^2)$ получаем

$$f(\theta)=1-1{,}2k\sigma^2\frac{\mu+k\cos\theta}{\sqrt{\pi k\rho_0}}-\frac{(k\sigma\cos\theta)^2}{2}-(\mu\sigma)^2+$$
$$+i\left(1{,}2k\sigma^2\frac{\mu-k\cos\theta}{\sqrt{\pi k\rho_0}}-\mu k\sigma^2\cos\theta\right).$$

В случае мелкомасштабных неровностей границы $(k\rho_0 \ll 1)$ $\eta=-2i\cdot\frac{k\sigma^2}{\rho_0}\int\limits_0^\infty\frac{1}{\tilde{x}}\frac{dN(\tilde{x})}{d\tilde{x}}d\tilde{x}$ и, если, как и выше, $N(\tilde{x})=\exp(-\tilde{x}^2)$, то из (17) получаем

$$f(\theta)=1-\sqrt{\pi}\frac{\mu\sigma^2}{\rho_0}-\frac{(k\sigma\cos\theta)^2}{2}-i\sqrt{\pi}\cos\theta\frac{k\sigma^2}{\rho_0}-$$
$$-\mu(\mu^2+k^2\cos^2\theta)\frac{\sigma^2\rho_0^2}{4\pi}\int\limits_0^\infty\exp\left(-\frac{\rho_0^2\chi^2}{4}\right)\chi\times$$
$$\times\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\chi\,d\psi}{\mu-i\sqrt{k^2-(\chi\cos\psi+k\sin\theta)^2-\chi^2\sin^2\psi}}$$

Здесь интеграл упростить не удается и удобнее его считать численно.

Интересно отметить, что в рассматриваемом приближении, хотя модуль среднего коэффициента отражения плоской звуковой волны от границы с мелкомасштабными неровностями $(k\rho_0 \ll 1)$ равен единице, модуль функции $f(\theta)$ меньше единицы.

Итак, можно видеть, что средняя составляющая звукового поля зависит от характеристик неровностей границы и, в частности, от параметра

Рэлея и пространственной корреляции неровностей. В случае крупномасштабных неровностей и при углах наблюдения, близких к нормальному, средняя составляющая поля описывается простым аналитическим выражением. В других случаях для определения параметров среднего звукового поля необходимы детальные расчеты.

Рассмотрим случайную составляющую поля $p_{сл}(\mathbf{r}_0)$. Из выражения (12) для $p_{сл}(\mathbf{r}_0)$ имеем

$$p_{сл}(\mathbf{r}_0)=-\frac{i\omega m \varkappa A\mu}{c_p}\left\{\int_{V_0} I(x,y)\exp(-\mu z)G_{сл}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,dV+\right.$$
$$\left.+\mu\int_{V_0}\zeta(x,y)I(x,y)\exp(-\mu z)G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,dV\right\}. \tag{18}$$

Из этого выражения можно видеть, что в рамках метода малых возмущений случайная составляющая поля представляется суммой двух интегралов, каждый из которых описывает по отдельности различные механизмы влияния неровностей на генерацию звука при поглощении лазерного излучения. Так, первый интеграл в (18) представляет случайную составляющую поля стационарных тепловых объемных источников звука в полупространстве с неровной границей, второй интеграл — случайную составляющую поля тепловых объемных источников звука, интенсивность которых меняется случайным образом в полупространстве с ровной границей. Флуктуации интенсивности тепловых объемных источников здесь обусловлены тем, что меняется случайным образом оптическая длина пути при распространении лазерного луча в жидкости до определенной точки полупространства.

Умножая выражение (18) на комплексно-сопряженное и используя соотношения (7) и (8), нетрудно получить формулу для расчета дисперсии флуктуаций звукового поля

$$\overline{|p_{сл}(\mathbf{r}_0)|^2}=\left[\frac{\omega m\varkappa A\mu}{4\pi c_p r_0}\right]^2\left\{\int_{V_0}\int_{V_0} I(x,y)I(x_1,y_1)\times\right.$$
$$\times\exp(-\mu z-\mu z_1)\overline{\Psi(x,y,z)\Psi^*(x_1,y_1,z_1)}\,dV\,dV_1-$$
$$-2i\frac{\mu k\cos\theta}{\mu^2+k^2\cos^2\theta}\left[\int_{S_0}\int_{V_0} I(x,y)I(x_1,y_1)\exp(ik_x x+ik_y y-\mu z_1)\times\right.$$
$$\times\overline{\zeta(x,y)\Psi^*(x_1,y_1,z_1)}\,dS\,dV_1-\int_{V_0}\int_{S_0} I(x,y)I(x_1,y_1)\times$$
$$\left.\times\exp(-ik_x x_1-ik_y y_1-\mu z)\overline{\zeta(x_1,y_1)\Psi(x,y,z)}\,dV\,dS_1\right]+$$
$$+\left[\frac{2\mu k\cos\theta}{\mu^2+k^2\cos^2\theta}\right]^2\int_{S_0}\int_{S_0} I(x,y)I(x_1,y_1)\times$$
$$\left.\times\exp[ik_x(x-x_1)+ik_y(y-y_1)]\overline{\zeta(x,y)\zeta(x_1,y_1)}\,dS\,dS_1\right\}. \tag{19}$$

Флуктуации звукового поля представлены выше в виде суммы двух случайных функций, следовательно, дисперсия флуктуаций должна представляться суммой дисперсий каждой из этих функций плюс перекрестные члены.

Первый интеграл в (19) описывает дисперсию флуктуаций поля стационарных объемных тепловых источников в полупространстве с неровной границей. Сомножитель $\overline{\Psi(x, y, z)\Psi^*(x_1, y_1, z_1)}$ в подынтегральном выражении есть не что иное, как функция корреляции случайной составляющей рассеянного поля при падении на неровную границу плоской звуковой волны. Эта функция подробно исследована в литературе.

Последний интеграл в (19) представляет дисперсию флуктуаций поля, обусловленных флуктуациями интенсивности тепловых объемных источников. Заметим, кстати, что точно таким же интегралом описывается (см. работу [8]) дисперсия случайной составляющей звукового поля, возникающего при поглощении лазерного излучения в полупространстве с ровной границей, обусловленной случайными флуктуациями поперечного распределения интенсивности света в лазерном пучке, если принять, что относительная флуктуация этого распределения равна $\mu\zeta(x, y)$.

Остальные два интеграла в (19) представляют собой перекрестные члены, причем они отличны от нуля, поскольку случайные функции, описывающие флуктуации звукового поля, статистически не независимы.

В случае статистически однородных и изотропных неровностей из выражения (19), используя соотношения (9), (10), (15), получаем

$$\frac{\overline{|p_{\text{сл}}(\mathbf{r}_0)|^2}}{p_{\text{ср}}^2(\mathbf{r}_0)} = (\mu^2+k^2\cos^2\theta)^2 \int_0^\infty G(\chi)\exp\left(-\frac{\chi^2 a^2}{2}\right)\chi\times$$
$$\times\int_0^{2\pi} \exp(-k\chi a^2\sin\theta\cos\psi)\left\{\frac{1-\dfrac{\mu}{\mu^2+k^2\cos^2\theta}[2\mu-i(q-q^*)]}{(\mu-iq)(\mu+iq^*)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\mu^2}{(\mu^2+k^2\cos^2\theta)^2}\right\}d\chi\, d\psi. \tag{20}$$

Здесь $q=\sqrt{k^2\cos^2\theta-\chi^2-2k\chi\sin\theta\cos\psi}$, q^* — величина, комплексно-сопряженная q. Если интересоваться полем под источником $(\theta=0)$, получаем

$$\left.\frac{\overline{|p_{\text{сл}}(\mathbf{r}_0)|^2}}{p_{\text{ср}}^2(\mathbf{r}_0)}\right|_{\theta=0} =$$
$$=2\pi(\mu^2+k^2)^2\left\{\int_0^k G(\chi)\left[\frac{1-\dfrac{2\mu^2}{\mu^2+k^2}}{\mu^2+k^2-\chi^2}+\frac{\mu^2}{(\mu^2+k^2)^2}\right]\times\right.$$
$$\times\exp\left(-\frac{\chi^2a^2}{2}\right)\chi\, d\chi+\int_k^\infty G(\chi)\left[\frac{1-\dfrac{2\mu}{\mu^2+k^2}(\mu+\sqrt{\chi^2-k^2})}{(\mu+\sqrt{\chi^2-k^2})^2}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\mu^2}{(\mu^2+k^2)^2}\right]\exp\left(-\frac{\chi^2a^2}{2}\right)\chi\, d\chi\right\}. \tag{21}$$

Выражения (20) и (21) позволяют рассчитывать дисперсию флуктуаций интенсивности звукового поля для различных видов пространственного спектра неровностей. Отметим, что даже для простых видов $G(\chi)$ не удается получить удобных аналитических выражений, но (20) и (21) относительно легко вычисляются численно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. М. Лямшев.* О влиянии неровной границы на оптическое возбуждение звука в жидкости. Тезисы докладов 8-й Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике. Тбилиси, «Мецниереба», 1976, 2, 196.
2. *А. И. Божков, Ф. В. Бункин, Л. Л. Гырдев.* Влияние волнения поверхности жидкости на звуковое поле, возбуждаемое в ней лазерным излучением с модулированной интенсивностью. Квантовая электроника, 1976, *3*, 7, 1494—1500.
3. *С. Г. Касоев, Л. М. Лямшев.* Генерация звука при поглощении модулированного лазерного излучения в жидком полупространстве с крупномасштабными неровностями границы. Акуст. ж., 1977, *23*, 265—272.
4. *Л. М. Лямшев.* К вопросу о принципе взаимности в акустике. ДАН СССР, 1959, *125*, 6, 1231—1234.
5. *Ю. П. Лысанов.* Рассеяние звука неровными поверхностями. В кн.: Акустика океана, под ред. Л. М. Бреховских. М., «Наука», 1974, 231—330.
6. *Л. М. Лямшев.* К расчету акустического излучения турбулентного аэродинамического потока. Акуст. ж., 1960, *6*, 4, 472—478.
7. *Ф. Г. Басс, И. М. Фукс.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М., «Наука», 1972.
8. *А. И. Божков, Ф. В. Бункин.* Генерация звука в жидкости при поглощении в ней лазерного излучения с модулированной интенсивностью. Квантовая электроника, 1975, *2*, 8, 1763—1776.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
4 августа 1976 г.