

УДК 532.5.071.4.062.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТНО-ВОЛНОВОГО СПЕКТРА
ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ*Е. Б. Кудашев, Л. Р. Яблоник*

Рассматривается возможность практической реализации измерения волнового спектра турбулентных пульсаций давления акустическим преобразователем с распределением локальной чувствительности по приемной поверхности по закону косинуса. Предложена конструкция преобразователя волнового спектра и получены количественные оценки чувствительности акустического преобразователя в турбулентном пограничном слое к волновому спектру.

Систематическое экспериментальное исследование двухточечных моментов турбулентного давления позволило в основном определить на корреляционном уровне структуру поля пульсаций в турбулентном пограничном слое. Имеющаяся информация была достигнута вначале измерением пространственно-временной корреляции $R(\epsilon, \tau)$, а затем — взаимного спектра $\Gamma(\epsilon, \omega)$. В работе [1] предлагалось с помощью решетки элементарных преобразователей измерять и третью, формально-эквивалентную им, статистическую характеристику пульсационного давления — частотно-волновой спектр $E(\kappa, \omega)$. Хотя это предложение до сих пор и не нашло конкретного воплощения, на данном этапе значительный прогресс в изучении турбулентных давлений в пограничных слоях возможен, по-видимому, лишь на основе прямых измерений $E(\kappa, \omega)$.

Преимущества представления структуры поля пульсаций в виде частотно-волнового спектра обусловлены возможностью наглядной интерпретации данных в виде распределения турбулентной энергии по масштабам и фазовым скоростям [2, 3]. Кроме того, такое представление наиболее эффективно в приложениях — при расчете вибраций конструкций под действием пульсационного давления [4–6] и шума пограничного слоя [7, 8]. Известно, что расчетное определение волнового спектра по корреляционным измерениям может приводить к существенным погрешностям и не в состоянии эффективно заменить прямых измерений $E(\kappa, \omega)$. Непосредственное экспериментальное исследование волнового спектра обладает и еще одним достоинством — возможностью использования результатов для улучшения существующих моделей поля турбулентных пульсаций давления в практически важных областях: малые частоты ω и большие волновые числа κ ; $\omega/\kappa > c$ и т. д. Такое улучшение в значительной мере вряд ли возможно за счет усовершенствования корреляционных измерений.

Для прямого определения волнового спектра $E(\kappa, \omega)$ в первую очередь необходимо знать, в какой мере и каким образом электрические сигналы на выходе акустического преобразователя (так называемое измеренное значение спектра) отражают действительный («истинный») частотно-волновой спектр.

Для рассмотрения этого вопроса воспользуемся известным соотношением [9], связывающим сигнал на выходе преобразователя $\Phi_{\text{изм}}(\omega)$ с по-

лем пульсаций давления

$$(1) \quad \Phi_{\text{изм}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon, \omega) d\varepsilon,$$

где

$$(2) \quad \theta(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) K(x + \varepsilon) dx$$

— функция влияния преобразователя; $K(x)$ — импульсная характеристика имеет здесь физический смысл локальной чувствительности. Действительная в рассматриваемом случае функция $K(x)$ является формой колебаний приемника [10].

Соотношение (1) может быть представлено в виде

$$(3) \quad \Phi_{\text{изм}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\kappa) E(\kappa, \omega) d\kappa,$$

в котором волновая характеристика преобразователя

$$(4) \quad S(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\varepsilon) \exp(-i\kappa\varepsilon) d\varepsilon$$

является фурье-преобразованием функции влияния $\theta(\varepsilon)$. Соотношение (3), вообще говоря, не дает возможности элементарного расчета волнового спектра по результатам измерений и показывает отсутствие прямой связи между электрическим сигналом $\Phi_{\text{изм}}(\omega)$ и частотно-волновым спектром $E(\kappa, \omega)$.

Измеренное значение спектра $\Phi_{\text{изм}}(\omega)$ может совпасть с $E(\kappa, \omega)$ лишь в случае измерения преобразователем с волновой характеристикой $S(\kappa) = \delta(\kappa - \kappa_0)$. Однако это равенство в принципе не может быть выполнено, так как волновая характеристика является четной функцией в силу своего определения. Поэтому даже у «идеального» датчика частотно-волнового спектра функция

$$(5) \quad S(\kappa) = \delta(\kappa - \kappa_0) + \delta(\kappa + \kappa_0)$$

и вследствие этого измеренный спектр определяется суммой

$$(6) \quad \Phi_{\text{изм}}(\omega) = E(\kappa_0, \omega) + E(-\kappa_0, \omega).$$

Таким образом, в случае такого идеализированного измерения волновая фильтрация может быть реализована только одновременно для волновых векторов κ_0 и $-\kappa_0$.

Соотношение (6) показывает, что восстановление значения волнового спектра $E(\kappa, \omega)$ по измеренному сигналу $\Phi_{\text{изм}}(\omega)$ невозможно без привлечения априорной информации между величинами $E(\kappa, \omega)$ и $E(-\kappa, \omega)$. Действительно, чувствительность акустического преобразователя к частотно-волновому спектру (коэффициент пересчета)

$$(7) \quad \chi(\kappa, \omega) = \Phi_{\text{изм}}(\omega) / E(\kappa, \omega)$$

в данном случае равна

$$(8) \quad \chi = 1 + E(-\kappa, \omega) / E(\kappa, \omega).$$

Применительно к турбулентному пограничному слою в качестве априорной информации может быть использовано условие четности волнового спектра $E(\kappa, \omega) = E(-\kappa, \omega)$, что имеет место в перпендикулярных направлении среднего течения волнах. Тогда чувствительность преобразовате-

ля χ оказывается постоянной величиной, равной двум. В области максимальных значений частотно-волнового спектра $E(\kappa, \omega) \gg E(-\kappa, \omega)$ и тогда чувствительность $\chi=1$.

Рассмотрим возможность практической реализации волновой фильтрации акустическим преобразователем. Нетрудно убедиться, что волновая характеристика $S(\kappa)$ из выражения (5) реализуется при распределении локальной чувствительности $K(x)$ по приемной поверхности преобразователя по косинусоидальному закону

$$(9) \quad K(\mathbf{r}) = \cos[\kappa_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)],$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, \mathbf{r}_0 — произвольный вектор на поверхности преобразователя.

Такое распределение позволяет рассматривать акустический преобразователь как бесконечную последовательность плотно уложенных бесконечно длинных полосок шириной $l_x = n\pi/\kappa_0$, ориентированных перпендикулярно вектору κ_0 . Из фиг. 1 видно, что локальная чувствительность изменяется лишь по ширине каждой полоски — одинаково по абсолютной величине, но с чередующимся знаком. Конструктивно такое распределение может быть реализовано противоположным — встречным и согласным подключением совокупности элементарных полосок к общему выходу акустического преобразователя.

Для прямых измерений волнового спектра можно использовать акустический преобразователь с ограниченным числом полосок N при косинусоидальном по ширине распределением локальной чувствительности $K(x)$ и конечной длине l_y . В этом случае

$$(10) \quad K(x, y) = \begin{cases} A \cos \pi x/l_x \dots \frac{-l_x}{2} \leq x \leq \frac{l_x}{2} + N; & 0 \leq y \leq l_y \\ 0 \dots \dots x < -l_x/2; & x > \frac{l_x}{2} + N \\ & y < 0; & y > l_y. \end{cases}$$

Используя соотношения (2) и (4), можно рассчитать для такого преобразователя функцию $\theta(\varepsilon)$:

$$(11) \quad \theta(\varepsilon) = \frac{A^2 l_x}{2\pi} (l_y - |\varepsilon_y|) \left[\left(N\pi - \frac{|\varepsilon_x| \pi}{l_x} \right) \cos \frac{\varepsilon_x \pi}{l_x} - \sin \frac{\varepsilon_x \pi}{l_x} \right]$$

и соответствующую волновую характеристику $S(\kappa)$:

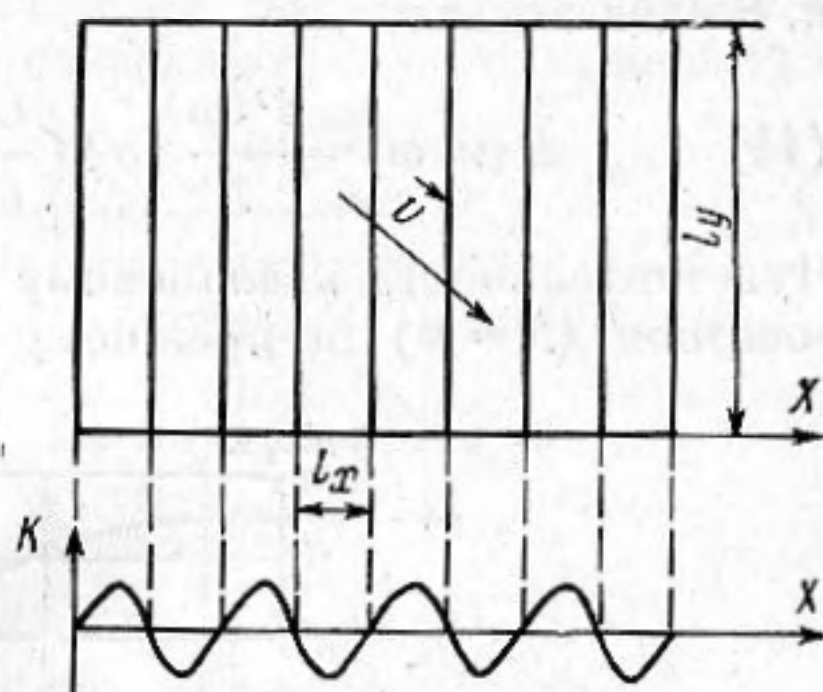
$$(12a) \quad S(\kappa) = \frac{16A^2 \pi^2 \sin^2(\kappa_y l_y/2) \cos^2(N\kappa_x l_x/2)}{l_x^2 \kappa_y^2 [\kappa_x^2 - (\pi/l_x)^2]^2}$$

при N — нечетном и

$$(12b) \quad S(\kappa) = \frac{16A^2 \pi^2 \sin^2(\kappa_y l_y/2) \sin^2(N\kappa_x l_x/2)}{l_x^2 \kappa_y^2 [\kappa_x^2 - (\pi/l_x)^2]^2}$$

при четном N . Отметим, что соотношения (7) — (12) и выполненные выше оценки чувствительности преобразователя к волновому спектру получены без привлечения информации о конкретных свойствах поля турбулентных пульсаций давления.

Для количественных оценок чувствительности χ , позволяющих восстановить истинное значение $E(\kappa, \omega)$ по измеренному сигналу $\Phi_{\text{изм}}(\omega)$,



Фиг. 1. Датчик волнового спектра

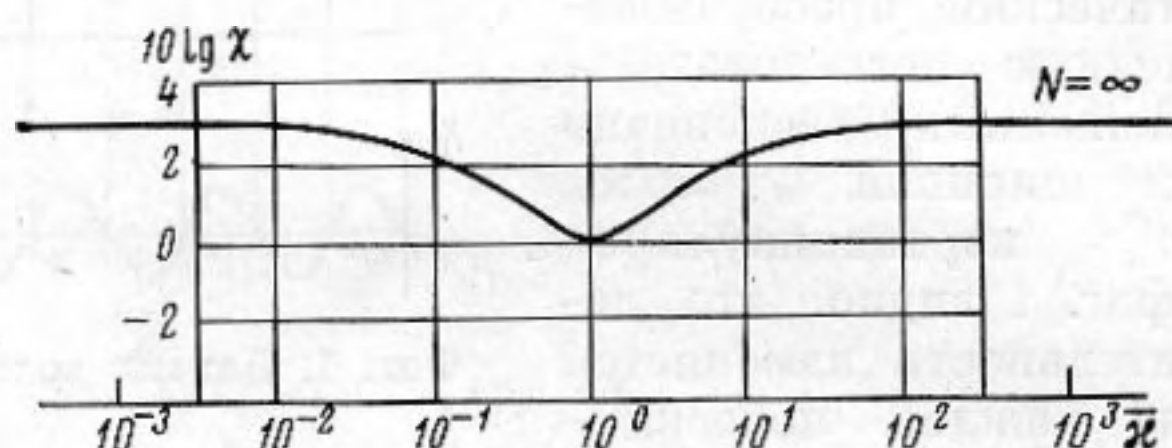
используем модель поля пульсаций давления в турбулентном пограничном слое, предложенную Коркосом [9]. Эта модель применялась ранее при исследовании влияния свойств приемной поверхности акустического преобразователя на результаты измерений частотного спектра мощности $P(\omega)$. В модельном поле Коркоса принимаем [11]

$$(13) \quad \Gamma(\varepsilon, \omega) = P(\omega) \exp\left(-\frac{\alpha\omega|\varepsilon_x|}{U_c} - i\omega\frac{\varepsilon_x}{U_c}\right) \exp\left(-\beta\frac{\omega|\varepsilon_y|}{U_c}\right)$$

и, следовательно,

$$(14) \quad E(\kappa, \omega) = \frac{P(\omega)}{\pi^2} \alpha\beta \left(\frac{U_c}{\omega}\right)^2 \frac{1}{[\alpha^2 + (\bar{\kappa}_x - 1)^2][\beta^2 + \bar{\kappa}_y^2]}$$

Чувствительность к волновому спектру $\chi(\kappa)$ для «идеального» преобразователя ($N=\infty$) по-прежнему будет определяться формулой (8). Под-



Фиг. 2. Чувствительность χ для идеального датчика частотно-волнового спектра

ставляя соотношения (13) и (14) в формулу (8), находим, что чувствительность

$$\chi = 1 + \frac{\alpha^2 + (\bar{\kappa}_x - 1)^2}{\alpha^2 + (\bar{\kappa}_x + 1)^2}$$

зависит только от безразмерной продольной компоненты волнового вектора $\bar{\kappa}_x = \kappa_x U_c / \omega$.

Результаты расчета функции $\chi(\bar{\kappa}_x)$ для идеального датчика показаны на фиг. 2. Видно, что в этом случае в диапазоне значений $\bar{\kappa}_x = 10^{-1} - 10^1$ для чувствительности $\chi(\kappa)$ с достаточной для практики точностью может быть принято значение $+1$ дб. Вне этого диапазона чувствительность можно принять равной 3 дб.

Значительно более интересным для практических исследований волнового спектра является определение чувствительности $\chi(\kappa)$ для преобразователя с конечным числом полосок. В этом случае подстановка соотношений (13) и (14) в формулу (1) позволяет найти сигнал на выходе преобразователя и рассчитать чувствительность к волновому спектру. Ниже представлены результаты расчета безразмерной чувствительности к волновому спектру

$$\bar{\chi}(\kappa) = [2l_x / \pi^2 \gamma(\omega)]^2 \chi(\kappa),$$

где $\gamma(\omega)$ — чувствительность одной полоски к когерентному воздействию определяется акустической градуировкой.

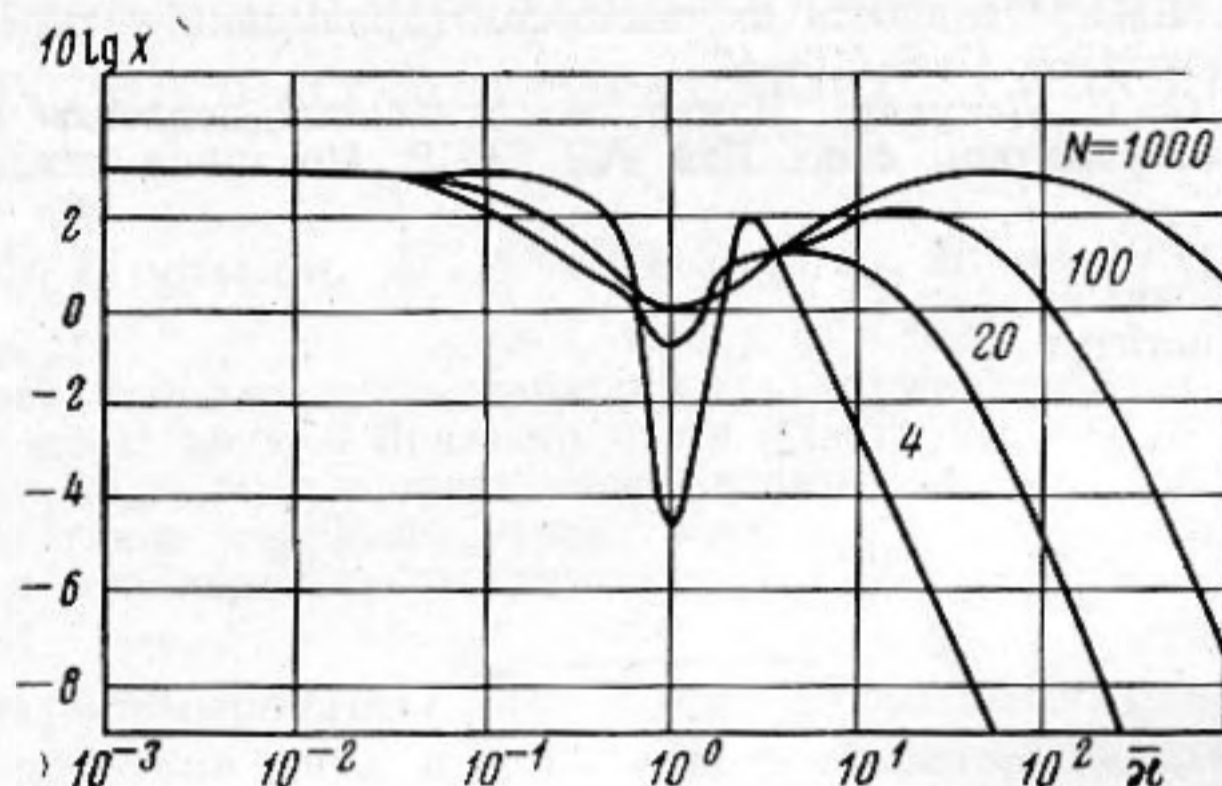
Опуская промежуточные преобразования, приводим выражение для расчета чувствительности квадратного акустического преобразователя к частотно-волновому спектру. Это соотношение получено для преобразователя с N полосками, измеряющего продольный волновой спектр (полоски ориентированы при этом перпендикулярно направлению потока):

$$\bar{\chi}(\bar{\kappa}) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\pi}{\bar{\kappa}}\right)^2 [\alpha^2 + (\bar{\kappa} - 1)^2] \left[\frac{1}{b} + \frac{1}{Nb^2} (1 - \exp(Nb)) \right] \times$$

$$\times \operatorname{Re} \left[\left(1 + \frac{i}{N\pi} \right) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + \frac{1}{N} \left(\frac{1 - \exp a_1 N}{a_1^2} + \frac{1 - \exp a_2 N}{a_2^2} \right) - \frac{i}{N\pi} \left(\frac{\exp a_1 N}{a_1} + \frac{\exp a_2 N}{a_2} \right) \right],$$

$$a_{1,2} = \pi \left[-\frac{\alpha \pm i}{\bar{\kappa}} + i \right]; \quad b = -\frac{\beta \pi}{\bar{\kappa}}; \quad \alpha = 0,55/2\pi; \quad \beta = 3,5/2\pi$$

Результаты расчета $\chi(\bar{\kappa})$, представленные на фиг. 3 и выполненные в широком диапазоне волновых чисел $\bar{\kappa}$, позволяют сделать вывод, что



Фиг. 3. Чувствительность квадратного акустического преобразователя к волновому спектру

увеличение числа полосок до $N=100$ дает возможность добиться приблизительно равномерной характеристики чувствительности преобразователя к волновому спектру в области $\bar{\kappa}=10^{-1}-10^1$. Из фиг. 3 видно, что в этом случае, так же как и для идеального датчика, можно принять значение $\bar{\chi}(\bar{\kappa}) = +1$ дб. Меньшее число полосок приводит к значительной неравномерности характеристики $\bar{\chi}(\bar{\kappa})$.

Представленные результаты, основанные на общей теории преобразователей турбулентных пульсаций давления [9, 10], позволяют оценивать количественные характеристики частотно-волнового спектра пульсаций давления по измерениям акустическим преобразователем с косинусоидальным распределением чувствительности. При этом из рассмотренных выше соотношений нетрудно получить, что в области энергонесущих масштабов $\kappa U_c / \omega \sim 1$ сигнал на выходе преобразователя ($\Phi_{\text{изм}}$) на 5–7 дб превышает сигнал с одиночного датчика при эквивалентном когерентном воздействии, так что

$$10 \lg \Phi_{\text{изм}}(\omega) / \gamma^2 P(\omega) = 5-7$$

уже при $N \geq 20$. Это свидетельствует о практической реализуемости непосредственных измерений частотно-волнового спектра рассмотренным преобразователем. Предлагаемый подход аналогичным образом эффективно применяется для любых других преобразователей частотно-волнового спектра и для других моделей поля пульсаций давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Maidanik, D. W. Jorgensen. Boundary wave-vector filters for the study of the pressure field in a turbulent boundary layer. J. Acoust. Soc. Amer., 1967, 42, 2, 494–501.
2. J. A. B. Wills. Measurements of the wave number/phase velocity spectrum of wall pressure beneath a turbulent boundary layer. J. Fluid Mech., 1970, 45, 1, 65–90.

3. P. Bradshaw. Inactive motion and pressure fluctuations in turbulent boundary layers. J. Fluid Mech., 1967, 30, 2, 241-258.
4. R. Kraichnan. Pressure fluctuations in turbulent flow over a flat plate. J. Acoust. Soc. Amer., 1956, 28, 1, 378-390.
5. В. А. Пальмов. Тонкие оболочки под действием широкополосной случайной нагрузки. ПММ, 1965, 29, 4, 763-770.
6. Б. М. Ефимцов. Колебания пластин при различных видах случайного нагружения. Тр. ЦАГИ. Авиационная акустика. 1975, вып. 1655, 33-47.
7. И. И. Долгова. К вопросу об излучении звука пограничным слоем. Акуст. ж., 1969, 15, 1, 128-131.
8. И. Я. Мунювич, А. Д. Перник, В. С. Петровский. Гидродинамические источники звука, ч. 3. Л., «Судостроение», 1972.
9. G. Corcos. On the resolution of pressure in turbulence. J. Acoust. Soc. Amer., 1963, 35, 2, 192-199.
10. Е. Б. Кудашев. Избирательность акустического приемника в турбулентном потоке. Инж.-физ. ж., 1969, 17, 3, 416-422.
11. Ю. Г. Блюдзе, О. Н. Докучаев. Измерение пульсаций давления и скорости в турбулентном пограничном слое. Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1969, 5, 175-182.

Северо-западный заочный
политехнический институт
Ленинград

Поступила
14 января 1976 г.