3. *В. Е. Накоряков, В. В. Соболев, И. Р. Шрейбер* Длинноволновые возмущения в газожидкостной среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, 5, 71—76.
4. *Б. С. Когарко.* Одномерное неустановившееся движение жидкости с возникновением и развитием кавитации. ДАН СССР, 1964, *155*, 4, 779—782.
5. *Ю. Я. Богуславский.* К вопросу о возникновении и развитии кавитационной волны разрежения. Акуст. ж., 1967, *13*, 4, 538—540.
6 *А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин.* Теория колебаний, М., Физматгиз, 1959.

Институт физики высоких давлений
Академии наук СССР

Поступила
30 июля 1975 г.

Примечание при корректуре. За время нахождения статьи в редакции опубликована работа В. В. Гончарова, К. А. Наугольных, С. А. Рыбака «Стационарные возмущения в жидкости, содержащей пузырьки газа» (ПМТФ, 1976, 6, 90—96).

УДК 534.26

ОБ ОЦЕНКЕ РАЗМЕРА ИЗЛУЧАТЕЛЯ В МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ГАШЕНИЯ ПОЛЯ

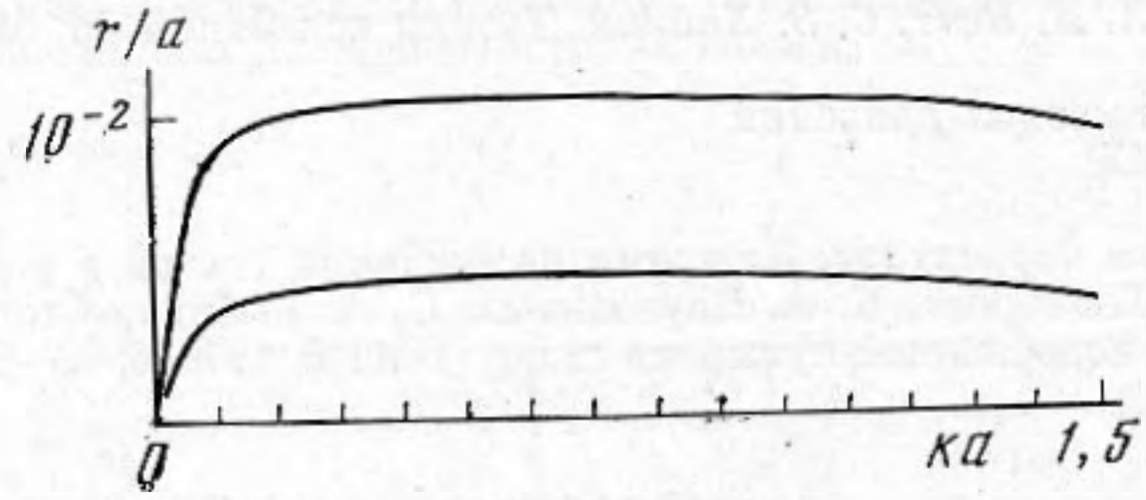
А. И. Бойко

Задача активного гашения отраженных акустических полей рассматривалась в ряде работ, в частности в работе [1]. В ней был предложен метод решения этой задачи, получивший развитие в работах [2, 3] и экспериментально подтвержденный для случая одномодового волновода [4]. В указанных работах предполагалось, что излучатели, гасящие поле, представляют собой точечные источники, не взаимодействующие с падающим на них полем. В этой связи была предложена другая постановка задачи гашения [5, 6], отличающаяся от метода работы [1] тем, что гашение поля осуществляется дискретной системой излучателей с отличными от нуля размерами. Такая постановка дает возможность оценить вклад поля дифракции на излучателях в полное поле и тем самым определить допустимые размеры этих излучателей в зависимости от параметров задачи.

В качестве реализации такой возможности рассмотрим следующий пример. Пусть в акустически жестком одномодовом волноводе ширины $2a$ с осью, совпадающей с осью x, распространяется плоская волна $v=\exp\{ikx\}$, где k — волновое число, $ka<\pi/2$. Внутри волновода помещен излучатель монопольного типа S, представляющий собой круг радиуса r с центром в начале координат. Полное поле p внутри волновода удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, однородным условиям на стенках, условию $\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_L = f$ на излучателе S (L — окружность радиуса r) и условию погашаемости Малюжинца: $\sup|p-v|<\infty$ при $\operatorname{Im} k>0$.

Задача гашения плоской волны v или звукоизоляции волновода в положительном направлении оси x заключается в следующем. Для достаточно малого $\varepsilon>0$ требуется подобрать амплитуду и фазу излучателя S (функцию $f_0 = f - \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_L$) так, чтобы, начиная с некоторого расстояния $d(\varepsilon)>r$, выполнялось условие $|p(x, y)|\leqslant\varepsilon$ при $x\geqslant d(\varepsilon)$.

Будем искать функцию p в виде $p=u+v$, где u представляет собой поле, создаваемое излучателем S. По условию функция $f_0 = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_L$ не зависит от угла. С помощью резольвенты соответственного интегрального уравнения для плотности объемной скорости, возбуждающей поле u, можно представить u как функцию от f_0. При этом надлежащим выбором f_0 достигается полное гашение распространяющейся моды поля p. Однако поиск такого значения f_0 крайне затруднителен, так как отсутствует явный вид аналитической зависимости резольвенты от параметров задачи. Имеются работы, например [7], в которых решение подобной задачи дифракции сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений. Поэтому положим $f_0=k^2aH_1^{(1)}(kr)$, $H_1^{(1)}(kr)$ — цилиндрическая функция. При этом значении f_0 поле u, без учета дифракции на S, имеет при $x>r$ распространяющуюся моду, равную $-v$. Тогда полное поле p при $x>r$ можно написать в виде $p=u_1+u_2$, где поле u_1 есть бесконечный набор затухающих волн, возбуждаемых f_0, а u_2 — поле дифракции волны v и поля u на излучателе вместе с повторными отражениями от стенок волновода. При этом $u_2=O(kr)$. Соответствующим выбором расстояния $d(\varepsilon)$ и радиуса r можно добиться того, что $|u_1|\leqslant\varepsilon/2$ при $x\geqslant d(\varepsilon)$, а $|u_2|\leqslant\varepsilon/2$ при достаточно малом kr. Откуда $|p|\leqslant\varepsilon$ при $x\geqslant d(\varepsilon)$.



Графики решения уравнения (4) при двух различных значениях ε

Для поля u_1 при $x>r$ справедливо выражение

$$u_1(x, y)=4ki\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n{}^{-1}\exp\{-x\delta_n\}\cos(y\pi n/a),$$

где $\delta_n=\sqrt{(\pi n/a)^2-k^2}$. Пользуясь этим выражением, найдем $d(\varepsilon)$:

$$d(\varepsilon)\geqslant(2\delta_1)^{-1}|\ln(1-\exp\{-\varepsilon\delta_1/4k\})|.$$

Поле u_2 можно написать в следующей форме:

$$(1)\qquad u_2(x, y)=\int_L\mu(\xi, \eta)\,G(k[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1/2})\,ds.$$

Здесь $\mu(\xi, \eta)$ — неизвестная плотность объемной скорости на излучателе S, G — функция Грина волновода:

$$G=\frac{i}{\pi}\int_c\frac{\exp\{i\alpha(x-\xi)\}}{\tau(\alpha)\sin[2a\tau(\alpha)]}\{\cos[(2a-|\eta-y|)\tau(\alpha)]+\cos[(\eta+y)\tau(\alpha)]\}\,d\alpha,$$

где $\tau(\alpha)=\sqrt{k^2-\alpha^2}$ контур c при $\operatorname{Im}k>0$ есть вещественная ось, у функции $\tau(\alpha)$ выбирается ветвь, которая при $\operatorname{Im}\alpha=0$, $\operatorname{Re}\alpha\to\infty$ стремится к $i\alpha$. Удовлетворяя краевым условиям для поля u_2 на S, получим:

$$(2)\qquad \frac{i}{2}\int_L\mu(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial n}G(k[(\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2]^{1/2})\,ds-$$
$$-\mu(\xi_1, \eta_1)=\frac{i}{2}f_1(\xi_1, \eta_1),$$

где $\partial/\partial n$ — производная по нормали к контуру L в точке (ξ_1, η_1), а функция $f_1(\xi_1, \eta_1)$ равна

$$f_1(\xi_1, \eta_1)=ka[2\pi rJ_0(kr)]^{-1}\int_L\frac{\partial}{\partial n}W(k[(\xi_1-\xi)^2+$$
$$+(\eta_1-\eta)^2]^{1/2})\,ds+\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_L.$$

Здесь принято обозначение $W(z)=G(z)-H_0^{(1)}(z)$. Будем искать решение интегрального уравнения (2) в виде

$$\mu=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l\mu_l.$$

Учитывая, что функция $\frac{a}{r}\int\limits_L \frac{\partial W}{\partial n}\,ds$ не зависит от параметра r/a, определим неизвестные функции μ_l из рекуррентной последовательности интегральных уравнений:

$$\mu_0-\frac{i}{2}\int\limits_L \mu_0\frac{\partial}{\partial n}H_0^{(1)}\,ds=-\frac{i}{2}f_1,$$

$$\mu_l-\frac{i}{2}\int\limits_L \mu_l\frac{\partial}{\partial n}H_0^{(1)}\,ds=\frac{i}{2}\frac{a}{r}\int\limits_L \mu_{l-1}\frac{\partial}{\partial n}W\,ds,\qquad l=1,2,3,\ldots.$$

Пусть для радиуса r выполняется условие $r<a[F_1(r)]^{-1}$, где

$$\frac{1}{2}\frac{a}{r}\int\limits_L\left|\frac{\partial}{\partial n}W\right|ds\leqslant F_1(r)=\frac{2\pi ka}{\sin ka}-2\ln\operatorname{th}(ka\sqrt{3})+\pi\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{a}\right).$$

Тогда для $f_1(\xi_1,\eta_1)$ справедлива оценка

$$|f_1|\leqslant kF_2=k\left[\frac{2ka}{\sin ka}-\frac{2}{\pi}\ln\operatorname{th}(ka\sqrt{3})+1\right],$$

а плотность μ, являющаяся решением уравнения (2), удовлетворяет неравенству

$$|\mu|\leqslant\frac{ka}{2}F_2[a-rF_1(r)]^{-1}. \tag{3}$$

Подставим оценку (3) в выражение (1), потребуем выполнения условия $|u_2(x,y)|\leqslant\leqslant\varepsilon/2$ при $x\geqslant d(\varepsilon)$ и получим для определения допустимого радиуса r следующее соотношение:

$$\pi rF_2[a-rF_1(r)]^{-1}=\varepsilon/2. \tag{4}$$

На фигуре приведено отношение r/a, вычисленное по формуле (4), при двух различных значениях ε и изменении параметра ka от 0 до 1,5. Верхний график соответствует значению $\varepsilon=0{,}25$, нижний — $\varepsilon=0{,}1$. Резкое спадение кривых при $ka\to0$ вызвано наличием у функции $\frac{\partial}{\partial n}W$ особенности вида $\ln ka$.

Автор благодарит В. П. Иванова за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Д. Малюжинец.* Нестационарные задачи дифракции для волнового уравнения с финитной правой частью. Тр. Акуст. ин-та, 1971, вып. XV, 124—139.
2. *М. В. Федорюк.* Об одном методе активного гашения звука. Акуст. ж., 1974, *20*, 5, 809—810.
3. *М. П. Завадская, А. В. Попов, Б. Л. Эгельский.* Об одном приближенном решении задачи активного гашения звуковых полей по методу Малюжинца. Акуст. ж., 1975, *21*, 6, 882—887.
4. *А. А. Мазаников, В. В. Тютекин.* Экспериментальное исследование активного гашения акустических полей. Акуст. ж., 1974, *20*, 5, 807—808.
5. *А. И. Бойко, В. П. Иванов.* О гашении поля излучающего цилиндра. Радиотехника и электроника, 1974, *19*, 3, 494—500.
6. *А. И. Бойко, В. П. Иванов.* О гашении поля системой цилиндрических излучателей. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, *16*, 1, 152—161.
7. *Г. Ш. Кеванишвили.* Дифракция волны H_{10} на индуктивном стержне. Радиотехника и электроника, 1975, *20*, 9, 1810—1817.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
21 июня 1976 г.
После исправления
28 декабря 1976 г.