3. *Р. Ш. Школьникова.* Воздухоструйные генераторы акустических колебаний для коагуляции аэрозолей. Акуст. ж., 1963, *9*, 3, 368–375.
4. *В. М. Ануфриев, В. В. Комаров, В. М. Купцов, Д. А. Мельников, А. А. Сергиенко.* Дискретная составляющая в спектре шума сверхзвуковых струй. Механика жидкостей и газа, 1969, *5*, 162–165.

Поступила
10 января 1977 г.

УДК 539.3 : 539.32

СКОРОСТИ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ, КОЭФФИЦИЕНТЫ ПУАССОНА И ВОЗМОЖНАЯ ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ КРИСТАЛЛОВ

В. Н. Любимов

Интервал возможных значений модулей упругости кристалла определяется условиями устойчивости, обеспечивающими положительную определенность упругой энергии при любых деформациях. Сводка таких условий для кристаллов различных классов симметрии приведена в работе [1].

Для изотропных тел, характеризующихся двумя независимыми модулями упругости c_{11} и c_{44}, из условий устойчивости $0<\varkappa<{}^3/_4$ $\varkappa=c_{44}/c_{11}$, $c_{11}>0$ автоматически следует, что для любых направлений распространения скорости поперечных волн (t, t') меньше скорости продольных (l) волн: $V_l^2=1$, $V_t^2=V_{t'}^2=\varkappa$ и $V_t^2=V_{t'}^2<V_l^2$. Здесь используются безразмерные скорости $V^2=\rho v^2/c_{11}$ (где v — обычная скорость, ρ – плотность среды). В то же время фактически интервал значений модулей упругости реальных веществ оказывается у́же и определяется условием положительности коэффициента Пуассона $\sigma=(1-2\varkappa)/2(1-\varkappa)$. Это условие, сводящееся к неравенству $\varkappa<{}^1/_2$, вытекает из того факта, что известные в природе тела при растяжении уменьшают свои поперечные размеры [2].

Опыт показывает, что и в кристаллах выполняются аналогичные условия для скоростей [1] и коэффициента Пуассона. Эти условия не вытекают из условий устойчивости и фактически сужают интервал возможных значений модулей упругости кристаллов. В принципе, однако, возможны и исключения *. В связи с этим представляет интерес выявить те области значений модулей упругости, в которых выполняются указанные условия для скоростей и коэффициента Пуассона, и определить тем самым интервал наиболее вероятных значений модулей упругости кристаллов.

В кристаллах разделение волн на продольные и поперечные в общем случае не имеет места. Однако для отдельных направлений распространения – продольных нормалей [1] – такое разделение возможно. Как показано в работе [1], даже в триклинном кристалле существуют по крайней мере две продольные нормали. В произвольной ортогональной системе координат матрица модулей упругости триклинного кристалла является матрицей общего вида и содержит 21 независимую постоянную. Если изменять ориентацию системы координат относительно исходной системы, то по крайней мере для двух различных ориентаций $c_{34}'=c_{35}'=c_{45}'=0$. При этих условиях ось x_3' будет продольной нормалью. Вдоль этого направления может распространяться чисто продольная волна ($V_l^2=c_{33}'/c_{11}'$) и чисто поперечные волны ($V_t^2=c_{44}'/c_{11}'$, $V_{t'}^2=c_{55}'/c_{11}'$). Скорости поперечных волн меньше скорости продольных волн, если c_{44}', $c_{55}'<c_{33}'$. Положение продольных нормалей в триклинном кристалле не фиксировано элементами симметрии (такие оси могут быть и в кристаллах других сингоний [1, 5]).

В кристаллах всех сингоний, кроме триклинной, имеются продольные нормали, положение которых фиксировано элементами симметрии [1, 5]. В ромбических кристаллах существуют три такие продольные нормали – это направления всех трех осей кристаллофизической системы координат, совпадающие с осями симметрии 2-го порядка. Скорости поперечных волн меньше скоростей продольных волн, если c_{55}, $c_{66}<c_{11}$; c_{66}, $c_{44}<c_{22}$; c_{44}, $c_{55}<c_{33}$.

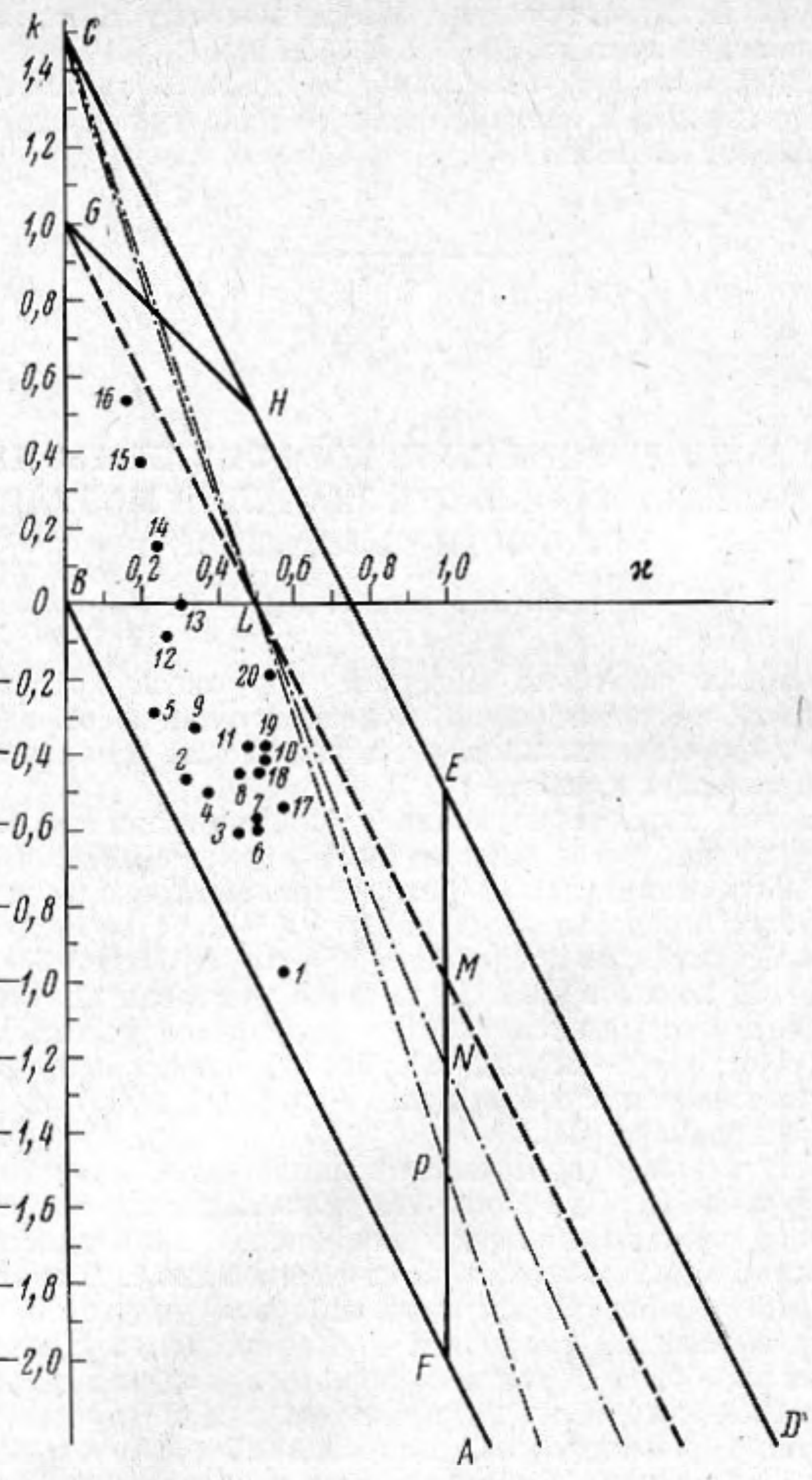
Остановимся подробнее на случае кубических кристаллов, упругостные свойства которых характеризуются всего тремя независимыми постоянными c_{11}, c_{44} и c_{12}. Этот случай интересен тем, что допускает сравнительно простую геометрическую интерпретацию (см. ниже фигуру).

Для кубических кристаллов условия устойчивости можно написать в виде

$$0<\varkappa+({}^1/_2)k<{}^3/_4,\quad \varkappa>0,\quad \varkappa=c_{44}/c_{11},$$
$$k=(c_{11}-c_{12}-2c_{44})/c_{11},\quad c_{11}>0. \tag{1}$$

---

* Здесь следует указать на необычное соотношение скоростей в тетрагональных кристаллах парателлурита, у которых $c_{66}<c_{11}$ [3], и на отрицательность коэффициентов Пуассона в кварце [4].



Возможная область значений модулей упругости кубических кристаллов. По осям отложены: $\varkappa = c_{44}/c_{11}$ и $k = (c_{11} - c_{12} - 2c_{44})/c_{11}$. *ABCD* – область устойчивости. *EF* и *GH* – линии, на которых разность $V_l - V_t$ (или $V_l - V_{t'}$) переходит через нуль и изменяет знак при распространении вдоль осей симметрии четвертого порядка (*EF*) и осей третьего и второго порядков (*GH*). *GLM*, *CLN* и *CLP* – линии, на которых коэффициент Пуассона переходит через нуль и изменяет знак при растяжении вдоль осей симметрии четвертого (*GLM*), третьего (*CLP*) и второго (*CLN*) порядков. *FBGLP* – область наиболее вероятных значений упругих постоянных. Точки соответствуют следующим кристаллам: *1* – Na, *2* – Pb, *3* – Cu, *4* – Ag, *5* – Au, *6* – Ni, *7* – Fe, *8* – InSb, *9* – InS, *10* – Ge, *11* – Si, *12* – Al, *13* – W, *14* – Mo, *15* – PbS, *16* – KCl, *17* – LiF, *18* – GaAs, *19* – MgO, *20* – алмаз

В этих кристаллах существует всего 13 продольных нормалей – это направления всех осей симметрии [1, 5]. Для скоростей волн, распространяющихся вдоль этих осей, имеем

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&V_l^2(4) = 1, \quad V_t^2(4) = V_{t'}^2(4) = \varkappa;\\
&V_l^2(3) = 1 - (2/3)\,k, \quad V_t^2(3) = V_{t'}^2(3) = \varkappa + (1/3)\,k;\\
&V_l^2(3) = 1 - (1/2)\,k, \quad V_t^2(2) = \varkappa, \quad V_{t'}^2(2) = \varkappa + (1/2)\,k.
\end{aligned}
$$

Заметим, что случай $k=0$ соответствует изотропной среде. Из (2) можно получить, что внутри области устойчивости (1) скорость поперечных волн меньше скорости продольных волн, если $\varkappa < 1$ (при распространении вдоль осей симметрии четвертого порядка) и если $\varkappa + k < 1$ (при распространении вдоль осей симметрии третьего и второго порядков).

Рассмотрим далее коэффициент Пуассона произвольного кристалла. Направление, вдоль которого приложено растягивающее напряжение, выберем за ось x_3. По определению, коэффициент Пуассона – это отношение поперечного сжатия к продольному растяжению: $\sigma = -(\gamma_1 + \gamma_2)/2\gamma_3$ (здесь γ_α – деформация). Это выражение для σ не зависит от угла поворота осей x_1 и x_2 вокруг x_3 *. В рассматриваемой системе координат матрица модулей упругости любого кристалла будет, вообще говоря, матрицей общего вида. Из условий равенства нулю напряжений $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_4=\sigma_5=\sigma_6=0$, сводящихся к системе уравнений

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{41} & c_{42} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1/\gamma_3 \\ \gamma_2/\gamma_3 \\ \gamma_4/\gamma_3 \\ \gamma_5/\gamma_3 \\ \gamma_6/\gamma_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{43} \\ c_{53} \\ c_{63} \end{pmatrix},$$

можно выразить σ через упругостные постоянные кристалла. Заметим, что определитель этой системы уравнений в силу условий устойчивости положителен.

В частном случае ромбического кристалла при растяжении вдоль кристаллофизической оси x_3

$$\sigma = \frac{1}{2(c_{11}c_{22}-c_{12}^2)}\left[(c_{11}-c_{12})c_{23}+(c_{22}-c_{12})c_{13}\right].$$

Условие положительности σ сводится к требованию положительности выражения в квадратных скобках (стоящий перед ними множитель положителен вследствие условий устойчивости). При растяжении вдоль других кристаллофизических осей коэффициент Пуассона получается из приведенной формулы в результате простой замены матричных индексов.

Для кубических кристаллов при растяжении вдоль осей симметрии четвертого, третьего и второго порядков соответственно имеем

$$\sigma(4) = \frac{1-2\varkappa-k}{2(1-\varkappa)-k}, \qquad \sigma(3) = \frac{3(1-2\varkappa)-2k}{6(1-\varkappa)-4k}, \tag{3}$$

$$\sigma(2) = \frac{8(1-2\varkappa)\varkappa+3k(1-4\varkappa)-2k^2}{16(1-\varkappa)\varkappa+2k(3-8\varkappa)-4k^2}.$$

Условие положительности коэффициентов Пуассона сводится в данном случае к требованию положительности числителей выражений (3) (все знаменатели больше нуля в силу условий устойчивости).

Результаты, полученные для кубических кристаллов, графически представлены на фигуре. Координаты точек, соответствующих конкретным кристаллам, определены на основе экспериментальных данных, приведенных в работах [6, 7]. В результате из *бесконечно* протяженной области устойчивости *ABCD* удалось выделить *конечную*, достаточно узкую область наиболее вероятных значений упругостных постоянных *FBGLP*. В эту область как раз и попадают постоянные реальных кристаллов, данные о которых взяты из работ [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. И. Федоров.* Теория упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 44, 1965.
2. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц,* Теория упругости. М., «Наука», 1965.
3. *G. Arlt, S. Schweppe.* Paratellurite, a new piezoelectric material. Solid State, Commun., 1968, *6*, 11, 783–784.
4. *В. Г. Зубов, М. М. Фирсова.* Об особенностях упругого поведения кварца в области $\alpha-\beta$-перехода. Кристаллография, 1962, *7*, 3, 469–471.
5. *А. Г. Хаткевич.* Об особых направлениях для упругих волн в кристаллах. Кристаллография, 1964, *9*, 5, 690–694.
6. *Дж. Фарнелл.* Свойства упругих поверхностных волн. Физическая акустика. Под ред. У. Мэзона, Р. Терстона. М., «Мир», 1973, *6*, 139–202.
7. *О. Андерсон.* Определение и некоторые применения изотропных упругих постоянных поликристаллических систем, полученных из данных для монокристаллов. Физическая акустика. Под ред. У. Мэзона. М., «Мир», 1968, *3Б*, 62–121.

Научно-исследовательский
физико-химический институт
им. Л. Я. Карпова

Поступила
2 сентября 1976 г.

---

* Так, определенный коэффициент Пуассона характеризует изменение среднего поперечного размера цилиндрического стержня (его поперечное сечение может иметь произвольную форму), к торцам которого приложены растягивающие силы.