АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIII 1977 Вып. 6

УДК 534.38

ОБ АКТИВНОМ ГАШЕНИИ ЗВУКА ОГРАНИЧЕННОЙ ЧАСТОТЫ В ВОЛНОВОДАХ

А. А. Мазаников, А. Т. Уколов, М. В. Федорюк

Рассмотрена задача об активном гашении звука ограниченной частоты в волноводе. Если пренебречь затухающими нормальными волнами высших порядков, то гашение поля можно осуществить с помощью конечного числа приемников и излучателей.

Чтобы погасить произвольное акустическое поле в волноводе, необходимо использовать непрерывно распределенные по сечению излучатели и приемники [1]. В том случае, когда существует лишь нулевая нормальная волна, гашение можно осуществить с помощью дискретной системы излучателей и приемников [2]. Рассмотренная ниже дискретная система позволяет гасить акустическое поле в случае, когда может распространяться конечное число нормальных волн.

Рассмотрим бесконечно протяженный волновод $W(-\infty<x<\infty)$ сечением $\mathscr{D}$ с идеальными (мягкими или жесткими) стенками, заполненный идеальной средой. Звуковое давление $p(\mathbf{R})$, $\mathbf{R}=(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\left(\Delta+\frac{\omega^2}{c^2}\right)p(\mathbf{R})=f(\mathbf{R}), \quad \mathbf{R}\in W, \tag{1}$$

одному из краевых условий

$$\frac{\partial p(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{n}}=0, \quad \mathbf{R}\in\partial W \tag{2а}$$

$$p(\mathbf{R})=0, \mathbf{R}\in\partial W \tag{2б}$$

и условию погашаемости на бесконечности.

Предполагается, что функция $f(\mathbf{R})$ финитна. Пусть $f(\mathbf{R})\equiv0$ при $x>-\varepsilon<0$, $\omega^1<\omega^2<\ldots<\omega^N<\ldots$ — критические частоты волновода. Если $\omega^N<\omega<\omega^{N+1}$, то поле может быть представлено в следующем виде:

$$p(\mathbf{R})=p^+(\mathbf{R})+\tilde{p}(\mathbf{R}), \ \forall x>-\varepsilon, \tag{3}$$

где $\tilde{p}(\mathbf{R})$ — сумма неоднородных волн экспоненциально затухающих с увеличением x

$$p^+(\mathbf{R})=\sum_{j=1}^{N}A_j\varphi_j(\mathbf{r})e^{ik_jx}, \quad \mathbf{r}=(y, z). \tag{4}$$

Здесь A_j — известные амплитуды, $\varphi_j(\mathbf{r})$ — соответственные функции поперечного сечения $\mathscr{D}$, нормированные условием

$$\int\limits_{\mathscr{D}}|\varphi_j|^2\,d\mathbf{r}=1, \quad k_j=\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\omega^j}{\omega}\right)^2},$$

продольная компонента волнового вектора j-й нормальной волны. Если собственное значение вырождено, то в сумму (4) входят все соответственные собственные функции, образующие ортонормированный базис собственного подпространства.

Расположим в сечении $\mathscr{D}_0(x=0)$ волновода N_1 точечных монопольных и N_2 дипольных излучателей с амплитудами a_j и b_j соответственно; оси диполей ориентируем перпендикулярно к $\mathscr{D}_0$. Пусть

$$\{\mathbf{r}_j^a\} \text{ и } \{\mathbf{r}_j^b\}$$

координаты монополей и диполей соответственно. Эти излучатели создадут поле

$$p_s(\mathbf{R})=p_s^0(\mathbf{R})+\tilde{p}_s(\mathbf{R}),\ \forall x, \tag{5}$$

где p_s^0 и $\tilde{p}_s$ — суммы однородных и неоднородных волн.

Рассмотрим следующую задачу: найти такие амплитуды a_j, b_j, чтобы

$$p_s^0(\mathbf{R})=\begin{cases} 0, & x<0 \\ -p^+, & x>0. \end{cases} \tag{6}$$

Нужно выяснить также, при каких минимальных значениях N_1 и N_2 и при каком расположении излучателей эта задача разрешима.

Поле монопольного излучателя, помещенного на $\mathscr{D}_0$ в точке $\mathbf{r}=\mathbf{r}_l^a$ имеет вид

$$G(\mathbf{R},\mathbf{R}_l^a)=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2ik_j}\varphi_j(\mathbf{r})\varphi_j(\mathbf{r}_l^a)e^{ik_j|x|}+\tilde{G}, \tag{7}$$

где $\tilde{G}$ — сумма неоднородных волн. Аналогично поле дипольного излучателя имеет вид

$$G^1(\mathbf{R},\mathbf{R}_l^b)=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\varphi_j(\mathbf{r})\varphi_j(\mathbf{r}_l^b)e^{ik_j|x|}\operatorname{sgn}(-x)+\tilde{G}^1. \tag{8}$$

Для поля $p_s^0(R)$ получаем следующее представление:

$$p_s^0(\mathbf{R})=\sum_{l=1}^{N_1}a_lG(\mathbf{R},\mathbf{R}_l^a)+\sum_{l=1}^{N_2}b_lG^1(\mathbf{R},\mathbf{R}_l^b)=\sum_{j=1}^{N}\mathscr{D}_j\varphi_j(\mathbf{r})e^{ik_j|x|}, \tag{9}$$

$$\mathscr{D}_j=\sum_{l=1}^{N_1}\frac{a_l\varphi_j(\mathbf{r}_l^a)}{2ik_j}+\sum_{l=1}^{N_2}\frac{b_l\varphi_j(\mathbf{r}_l^b)}{2}\operatorname{sgn}(-x).$$

Подставляя в формулу (6) выражения для p_s^0 и p^+, получаем систему из $2N$ линейных уравнений с N_1+N_2 неизвестными a_j, b_j

$$\begin{aligned}
&a_1\frac{\varphi_1(\mathbf{r}_1^a)}{2ik_1}+\ldots+a_{N_1}\frac{\varphi_1(\mathbf{r}_{N_1}^a)}{2ik_1}+b_1\frac{\varphi_1(\mathbf{r}^b_1)}{2}+\ldots+b_{N_2}\frac{\varphi_1(\mathbf{r}_{N_2}^b)}{2}=0,\\
&a_1\frac{\varphi_N(\mathbf{r}_1^a)}{2ik_N}+\ldots+a_{N_1}\frac{\varphi_N(\mathbf{r}_{N_1}^a)}{2ik_N}+b_1\frac{\varphi_N(\mathbf{r}^b_1)}{2}+\ldots+b_{N_2}\frac{\varphi_N(\mathbf{r}_{N_2}^b)}{2}=0,\\
&a_1\frac{\varphi_1(\mathbf{r}_1^a)}{2ik_1}+\ldots+a_{N_1}\frac{\varphi_1(\mathbf{r}_{N_1}^a)}{2ik_1}-b_1\frac{\varphi_1(\mathbf{r}^b_1)}{2}-\ldots-b_{N_2}\frac{\varphi_1(\mathbf{r}_{N_2}^b)}{2}=-A_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_1\frac{\varphi_N(\mathbf{r}_1^a)}{2ik_N}+\ldots+a_{N_1}\frac{\varphi_N(\mathbf{r}_{N_1}^a)}{2ik_N}-b_1\frac{\varphi_N(\mathbf{r}^b_1)}{2}-\ldots-b_{N_2}\frac{\varphi_N(\mathbf{r}_{N_2}^b)}{2}=-A_N.
\end{aligned} \tag{10}$$

Очевидно, что минимальное число излучателей равно $2N=N_1+N_2$. Далее будем предполагать количество излучателей именно таким.

Решение системы (10) выглядит следующим образом:

$$(11)\qquad a_j=\frac{\Delta_{aj}}{\Delta_s},\quad b_j=\frac{\Delta_{bj}}{\Delta_s},$$

где Δ_s — определитель системы (10), Δ_{aj}, Δ_{bj} — определители, получающиеся из Δ_s заменой соответственного столбца на столбец правой части. Преобразуем определитель Δ_s. Вместо l строки ($l=1, 2, \ldots, N$) напишем сумму l и $N+l$ строк, а вместо $N+l$ строки — разность l и $N+l$ строк. Теперь нетрудно видеть, что $\Delta_s=0$, если $N_1\neq N_2$. Следовательно, минимальное число источников $N_1=N_2=N$. В противном случае система (10) может быть неразрешимой. Пусть $N_1=N_2=N$, тогда

$$(12)\qquad \Delta_s=(-i)^N(k_1k_2\ldots k_N)^{-1}\begin{vmatrix}\varphi_1(\mathbf{r}_1^a)\ldots\varphi_1(\mathbf{r}_N^a)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_N(\mathbf{r}_1^a)\ldots\varphi_N(\mathbf{r}_N^a)\end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}\varphi_1(\mathbf{r}_1^b)\ldots\varphi_1(\mathbf{r}_N^b)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_N(\mathbf{r}_1^b)\ldots\varphi_N(\mathbf{r}_N^b)\end{vmatrix}=(-i)^N(k_1k_2\ldots k_N)^{-1}\Delta_{sm}\Delta_{sd}.$$

Условие $\Delta_s\neq 0$ является ограничением на расположение излучателей. Любопытно, что определители Δ_{sm}, Δ_{sd} имеют ту же структуру, что и волновая функция системы квантовомеханических частиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака [3].

Перейдем к решению задачи приема. Пусть $f(\overline{\mathbf{R}})=f_1(\overline{\mathbf{R}})+f_2(\overline{\mathbf{R}})$, где $f_1(\overline{\mathbf{R}})\equiv 0$ при $x>-\varepsilon<0$, $f_2(\overline{\mathbf{R}})\equiv 0$ при $x<\varepsilon$.

Тогда поле $p(\overline{\mathbf{R}})$ имеет вид

$$(13)\qquad p(\overline{\mathbf{R}})=p^+(\overline{\mathbf{R}})+p^-(\overline{\mathbf{R}})+\tilde{p}\qquad |x|<\varepsilon,$$

где p^+, p^- — однородные волны, бегущие направо и налево соответственно, $\tilde{p}$ — сумма неоднородных волн. При этом

$$(14)\qquad \begin{aligned}p^+&=\sum_{j=1}^{N}A_j\varphi_j(\mathbf{r})e^{ik_jx}\\ &\qquad |x|<\varepsilon\\ p^-&=\sum_{j=1}^{N}B_j\varphi_j(\mathbf{r})e^{-ik_jx}.\end{aligned}$$

В сечении волновода $\mathscr{D}_{-\delta}(x=-\delta,\ 0<\delta<\varepsilon)$ расположим N монопольных и N дипольных приемников в точках $\mathbf{r}_j^m$, $\mathbf{r}_k^d$ соответственно. Приемники предполагаются акустически прозрачными. Требуется вычислить A_j по измеренным приемникам значениям поля, т. е. найти амплитуды волн, распространяющиеся слева направо, иными словами, требуется решить задачу об однонаправленном приеме. В силу сделанных предположений A_j есть решение следующей системы уравнений:

$$(15)\qquad \begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{N}A_j\varphi_j(\mathbf{r}_l^m)e^{-ik_j\delta}+\sum\limits_{j=1}^{N}B_j\varphi_j(\mathbf{r}_l^m)e^{ik_j\delta}=m_l,\\ \sum\limits_{j=1}^{N}A_j\varphi_j ik_j(\mathbf{r}_l^d)e^{-ik_j\delta}-\sum\limits_{j=1}^{N}B_j ik_j\varphi_j(\mathbf{r}_l^d)e^{ik_j\delta}=d_l\\ l=1, 2, \ldots, N,\end{cases}$$

где m_l, m_d — показания приемников. Решение системы дается формулой

$$(16)\qquad A_j=\frac{\Delta_j}{\Delta_r}e^{ik_j\delta},$$

где Δ_r — определитель системы (15), Δ_j получается из Δ_r заменой соответственного столбца на столбец из правых частей. Преобразуя определитель Δ_r, получим

$$\Delta_r=(-i)^N 2^{2N}(k_1k_2\ldots k_N)\det\|\varphi_i(\mathbf{r}_j^m)\|\times\det\|\varphi_i(\mathbf{r}_k^d)\|. \tag{17}$$

Если приемники расположены так, что $\Delta_r\neq 0$, то формула (16) дает решение рассматриваемой задачи.

Подчеркнем, что при решении этой задачи мы использовали только следующую информацию: 1) значения ω, c; 2) геометрию волновода; 3) обращение в нуль функций f_1 и f_2 при $x>-\varepsilon$, $x<\varepsilon$ соответственно. Никакой другой информации об источниках f_i, как и в случае непрерывного распределения приемников [1], не было использовано. Точно так же, как и выше, можно показать, что число приемников является минимальным и что число монопольных приемников должно быть равно числу дипольных приемников.

Пусть теперь в волноводе есть два источника f_1 и f_2, про которые известно только, что $f_1(\overline{\mathbf{R}})\equiv 0$ при $x>-\varepsilon$, $f_2(\overline{\mathbf{R}})\equiv 0$ при $x<\varepsilon$. Требуется погасить, с точностью до неоднородных волн, поле p_1, созданное излучателем f_1 в области $x>0$.

Из изложенного выше следует, что на $\mathscr{D}_0(x=0)$ можно расположить излучатели, поле которых гасит p_1 с требуемой точностью, но для этого предварительно нужно найти неизвестные амплитуды в разложении p_1 по нормальным волнам. Для этого в сечении $\mathscr{D}_{-\delta}(0<\delta<\varepsilon)$ расположим приемники, описанным только что способом. Если числа δ и $\varepsilon-\delta$ достаточно велики, т. е. расстояние между приемниками и излучателями порядка нескольких длин волн, то поле неоднородных волн, измеряемое приемниками, будет мало и амплитуды распространяющихся волн можно вычислить с достаточной точностью.

Определим теперь запреты, налагаемые на расположение приемников и излучателей.

Рассмотрим плоский волновод $W=\{-\infty<x<\infty\}\{0\leqslant y\leqslant h\}$ с идеально жесткими стенками. Собственные функции поперечного сечения имеют вид

$$\varphi_1(y)=\frac{1}{\sqrt{h}};\quad \varphi_j(y)=\sqrt{\frac{2}{h}}\cos(j-1)\frac{\pi y}{h},\quad j=2,3,\ldots,N.$$

Выясним, какие ограничения налагаются в таком волноводе на расположение приемников и излучателей, необходимых для решения задачи гашения. Для этого достаточно исследовать определитель Δ_{sm}, который пропорционален определителю

$$\Delta=\det\left\|\cos(j-1)\frac{\pi y_l}{h}\right\|,\quad j=1,2,\ldots,N.$$

Каждый элемент j-ой строки $\cos(j-1)\dfrac{\pi y_l}{h}$ можно представить в виде

$$\cos(j-1)\frac{\pi y_l}{h}=2^{j-2}\left(\cos\frac{\pi y_l}{h}\right)^{j-1}+\sum_k C_k\left(\cos\frac{\pi y_l}{h}\right)^{j-1-2k},$$

где C_k — постоянные коэффициенты, такие, что $C_k\equiv 0$ при $j-1-2k<0$. Каждый член суммы можно представить в виде линейной комбинации из соответственных элементов предыдущих строк, поэтому

$$\det\left\|\cos(j-1)\frac{\pi y_l}{h}\right\|=2^{\sum_1^N(j-2)}\det\left\|\cos^{j-1}\frac{\pi y_l}{h}\right\|=2^{\sum_1^N(j-2)}\widetilde{\Delta},$$

где $\tilde{\Delta}$ — определитель Вандермонда

$$\tilde{\Delta}=\prod_{p>q}\left(\cos\frac{\pi y_p}{h}-\cos\frac{\pi y_q}{h}\right)=\prod_{p>q}2\sin\frac{\pi}{2h}(y_p+y_q)\sin\frac{\pi}{2h}(y_p-y_q).$$

Из этого равенства ясно, что Δ может обращаться в нуль только в том случае, когда $y_p=y_q$, т. е. какие-то два однотипных элемента расположены в одной точке. Таким образом, в данном случае имеется только один запрет на расположение излучателей: нельзя в одной точке помещать однотипные излучатели. Аналогичный запрет имеет место и для приемников.

В следующих примерах рассматриваются пространственные волноводы с постоянной скоростью звука. Запреты на расположение излучателей (соответственно приемников) состоят в том, что их нельзя располагать на линиях, на которых $\sum_{j=1}^{N} c_j\varphi_j(\mathbf{r})\equiv 0$, где $c_1, \ldots, c_N$ — некоторые константы. Однако этот критерий малоэффективен. Ниже приведены более эффективные критерии для конкретных примеров.

1. Волновод с идеально мягкими стенками, $N=1$. В этом случае определитель Δ_{sm} пропорционален первой собственной функции $\varphi_1(x, y)$, и запрет состоит в том, что излучатели (соответственно приемники) нельзя располагать в узлах этой собственной функции. При $N=2$ условие $\Delta_s\neq 0$ приводится к условию

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\mathbf{r}^1) & \varphi_1(\mathbf{r}^2) \\ \varphi_2(\mathbf{r}^1) & \varphi_2(\mathbf{r}^2) \end{vmatrix}\neq 0.$$

Излучатели (приемники) нельзя располагать на линии уровня функции $\frac{\varphi_1(\mathbf{r})}{\varphi_2(\mathbf{r})}$ (т. е. линии $\frac{\varphi_1(\mathbf{r})}{\varphi_2(\mathbf{r})}\equiv\text{const}$).

2. Волновод с идеально жесткими стенками, $N=2$. В этом случае определитель Δ_{sm} пропорционален определителю

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \varphi_2(\mathbf{r}^1) & \varphi_2(\mathbf{r}^2) \end{vmatrix}=\varphi_2(\mathbf{r}^2)-\varphi_2(\mathbf{r}^1).$$

Излучатели (приемники) в этом случае нельзя располагать на линии уровня $\varphi_2(\mathbf{r})\equiv\text{const}$ второй собственной функции.

3. Волновод с идеально жесткими стенками, имеющий форму кругового цилиндра радиуса a. Собственные функции поперечного сечения волновода имеют вид

$$\varphi_0\equiv\text{const},$$
$$\varphi_{mn}=C_{mn}\mathcal{J}_m\left(\frac{\mu_{mn}}{a}r\right)e^{\pm im\theta},$$

где (r, θ) — полярные координаты поперечного сечения, μ_{mn} — занумерованные в порядке возрастания нули функции $\mathcal{J}_m'(r)$, C_{mn} — нормировочные константы. При $\omega/c<\mu_{11}$ в волноводе имеется одна распространяющаяся слева направо нормальная волна, при $\mu_{11}<\frac{\omega}{c}<\mu_{21}$ имеются три такие волны, так как собственное значение μ_{11}, как и все собственные зна-

чения μ_{mn} ($m \neq 0$), двукратно вырождено. Условие запрета $\Delta_{sm} \neq 0$ эквивалентно трансцендентному уравнению

$$A_1 A_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + A_2 A_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) + A_3 A_1 \sin(\theta_3 - \theta_1) = 0.$$

Здесь $A_j = \mathcal{J}_1\left(\frac{\mu_{11} r_j}{a}\right)$ и $(r_j \theta_j)$ — координаты точек, в которых расположены излучатели (приемники).

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Федорюк.* О гашении звука в волноводах активным методом. Акуст. ж., 1975, *21*, 2, 281—285.
2. *M. Swinbanks.* The active control of sound propagation in long ducts. J. sound and vibration, 1973, *27*, 3, 411—436.
3. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория, гл. IX, М., «Наука», 1974.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
4 мая 1976 г.