АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIII 1977 Вып. 6

УДК 534.2–16

ПРОХОЖДЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН ЧЕРЕЗ СЛОИСТУЮ СРЕДУ ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Ф. И. Солянник

На основе анализа распространения волн деформации в кристаллах, проведенного Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем, с использованием матричного метода Томсона, изложен метод определения коэффициентов, характеризующих прохождение плоских волн в слоистой среде, состоящей из анизотропных материалов. В качестве иллюстрации для слоя из ортотропного материала приведены выражения коэффициентов матрицы перехода, частным случаем которых являются выражения, полученные Томсоном для изотропного материала.

Решение проблемы отражения и прохождения плоских волн через слоистую среду, состоящую из анизотропных материалов, имеет важное практическое и теоретическое значение. К настоящему времени можно отметить лишь работу [1], в которой предложен метод решения указанной проблемы для слоистой среды, состоящей из материалов, обладающих анизотропией упругих свойств наиболее общего типа (характеризующейся 21 упругой постоянной). Метод Шёнберга дает строгое решение, но является весьма громоздким, особенно для случая косого падения волн на слоистую среду. Ниже рассматривается более компактный метод расчета коэффициентов отражения и прохождения плоских волн через слоистую анизотропную среду при произвольных углах распространения, позволяющий полностью использовать логику программ вычисления коэффициентов для произвольного числа слоев, состоящих из изотропных материалов [2]. Метод основан на анализе волн в кристаллах, проведенном в работе [3], и позволяет в явном виде получить выражения коэффициентов матрицы перехода, связывающей колебательные скорости и напряжения на обеих границах упругого анизотропного слоя.

Пусть имеется система плоскопараллельных слоев, состоящих из однородных материалов, обладающих анизотропией упругостных свойств самого общего типа. Для исследования особенностей распространения плоских волн через такую систему рассмотрим произвольный слой. Для него уравнения движения частиц материала можно написать в виде [3]

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\lambda_{iklm}\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k\,\partial x_l}, \tag{1}$$

где ρ и λ_{iklm} — плотность и тензор постоянных упругости материала, u_j — проекция вектора смещения частиц материала слоя на оси координат. Уравнения (1) получаются в результате подстановки в общие уравнения движения выражения тензора напряжений через тензор деформаций.

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в слое под произвольным углом, приняв решение уравнения (1) в виде

$$u_j=U_{0j}\exp[i(\mathbf{kr}-\omega t)]. \tag{2}$$

Подставляя выражение (2) в уравнение (1) и положив $u_i=\delta_{im}u_m$, где δ_{im} — символ Кронекера, получим

$$(\rho\omega^2\delta_{im}-\lambda_{iklm}k_k k_l)\,u_m=0. \tag{3}$$

Это — система трех линейных однородных уравнений относительно неизвестных проекций смещений частиц на оси координат u_x, u_y, u_z. Отличные от нуля решения этой системы будут существовать тогда, когда детерминант, составленный из коэффициентов при u_m, будет равен нулю, т. е.

$$|\lambda_{iklm}k_k k_l-\rho\omega^2\delta_{im}|=0. \tag{4}$$

Выберем систему декартовых координат так, чтобы ось z была нормальна к слоям и вектор $\mathbf{k}$ находился в плоскости xz. Тогда $k_y=0$, в произведении $k_k k_l$ будут содержаться только проекции k_x и k_z, и уравнение (4) можно рассматривать как уравнение третьей степени по k_z^2 (уравнение (4) содержит только четные степени k_x и k_z ввиду симметрии констант упругости в обобщенном законе Гука). Решая его, мы получим в общем случае три различных выражения k_z^2 в зависимости от параметров ω, k_x, ρ, λ_{iklm}.

Три значения k_z^2 представляют три скорости распространения возмущения в однородной анизотропной среде. При этом каждой скорости соответствует пара проекций волнового числа $\pm k_z$, характеризующая взаимно противоположные направления распространения волн.

Подставляя поочередно каждый из трех пар корней k_z в однородные уравнения (3), мы получим три соотношения между проекциями смещения частиц материала u_x, u_y, u_z для распространения плоской волны в сторону положительных значений z и три соотношения для распространения в сторону отрицательных z. Векторы смещения частиц $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$, соответствующие трем скоростям распространения возмущения, взаимно перпендикулярны [3], так что можно говорить о трех типах волн, из которых каждый характеризуется углом между волновым вектором $\mathbf{k}$ и вектором смещения частиц $\mathbf{u}$ (в однородной изотропной среде это — поперечные и продольные волны).

Вследствие отражений от границ в рассматриваемом слое будет существовать система волн трех типов, распространяющихся в сторону положительных и отрицательных z. Фазовый множитель в каждой из шести волн определяется соответственным значением k_z и общим для всех значением проекции k_x. Необходимо отметить, что удобство решения дисперсионного уравнения (4) по k_z проявляется именно в случае слоистой среды, поскольку в соответствии с законом Снеллиуса k_x будет константой для всех типов волн, существующих в этих слоях. Амплитуда каждой из этих волн ввиду взаимных превращений на границах одних типов волн в другие будет установлена в соответствии с характером граничных условий.

Таким образом, необходимо располагать в общем случае шестью уравнениями граничных условий для определения шести неизвестных амплитуд. Такими условиями являются три проекции вектора скорости смещения границы v_x, v_y, v_z и три составляющих тензора напряжений — нормальную к границе σ_{zz} и две тангенциальных σ_{xz} и σ_{yz}. Отсюда видно, что для решения поставленной задачи нет необходимости определять амплитуды векторов смещения частиц в волне каждого типа, а достаточно ограничиться определением их проекций. При этом поскольку из уравнений движения после подстановки в них k_z определяются соотношения между проекциями, то для определения амплитуд проекций смещения в каждой волне необходимо определить всего одну независимую переменную, которой по выбору может быть любая из трех проекций. В связи с тем, что в монохроматической волне скорость колебания частиц среды пропорциональна смещению ($v=-i\omega u$), все приведенные выше рассуждения при-

годны для определения проекций колебательных скоростей границ слоя, равных сумме соответственных проекций колебательных скоростей частиц среды в каждой из шести волн. Например, считая для всех волн независимой переменной $v_{y\nu}$, получим три выражения для граничных условий

$$(5)\qquad v_y=\sum_{\nu=1}^{6} v_{y\nu},\quad v_x=\sum_{\nu=1}^{6} M_{x\nu}v_{y\nu},\quad v_z=\sum_{\nu=1}^{6} M_{z\nu}v_{y\nu},$$

где $v_{y\nu}$ — мгновенные значения проекции на ось y колебательной скорости частиц в ν-й волне; $M_{x\nu}=u_{x\nu}/u_{y\nu}$, $M_{z\nu}=u_{z\nu}/u_{y\nu}$ определяются из уравнений движения частиц (1) после подстановки в них ν-го значения k_z. Подставляя выражения (5) в формулы, выражающие тензор напряжений через деформации, получим еще три выражения σ_{ik} через шесть неизвестных величин $v_{y\nu}$.

Поскольку нас интересуют интегральные эффекты, характеризующие прохождение плоских волн через совокупность слоев, то неизвестные амплитуды проекции колебательных скоростей частиц $v_{y\nu}$ необходимо исключить из рассмотрения. Для этого необходимо, следуя [4], выразить $v_{y\nu}$ через величины колебательных скоростей и напряжений на одной границе анизотропного слоя и затем подставить их в аналогичные выражения на другой границе, поскольку эти амплитуды $v_{y\nu}$ одинаковы в любом сечении рассматриваемого слоя. Таким образом, получим матрицу перехода для одного слоя и, перемножая такие матрицы для всей совокупности слоев, получим результирующую матрицу, с помощью которой определяются коэффициенты отражения и прохождения волн через рассматриваемую совокупность слоев.

В качестве иллюстрации предложенного метода определим коэффициенты матрицы перехода слоя, состоящего из ортотропного материала, у которого оси симметрии совпадают с выбранными осями координат. Написав уравнения движения в форме (1), получим

$$(6)\qquad \begin{aligned}&(k_x^2\lambda_{xxxx}+k_z^2\lambda_{xzxz}-\omega^2\rho)\,u_x+k_xk_z(\lambda_{xxzz}+\lambda_{xzxz})\,u_z=0,\\&k_xk_z(\lambda_{xxzz}+\lambda_{xzxz})\,u_x+(k_x^2\lambda_{xzxz}+k_z^2\lambda_{zzzz}-\omega^2\rho)\,u_z=0,\\&(k_x^2\lambda_{xyxy}+k_z^2\lambda_{xzxz}-\omega^2\rho)\,u_y=0.\end{aligned}$$

Эта система уравнений для рассматриваемого вида симметрии распалась на две части — для составляющих u_x и u_z в одной и u_y в другой.

Составляя дисперсионные уравнения и определяя из них k_z^2, получим

$$(7)\qquad \begin{aligned}k_{z(1\div2)}^2&=\\&=\left[\frac{(\lambda_{xxzz}+\lambda_{xzxz})^2k_x^2+\lambda_{zzzz}(\omega^2\rho-k_x^2\lambda_{xxxx})+\lambda_{xzxz}(\omega^2\rho-k_x^2\lambda_{xzxz})}{2\lambda_{xzxz}\lambda_{zzzz}}\right]\pm\\&\pm\left\{[\ldots]^2-\frac{(\omega^2\rho-k_x^2\lambda_{xzxz})(\omega^2\rho-k_x^2\lambda_{xxxx})}{\lambda_{xzxz}\lambda_{zzzz}}\right\}^{1/2},\\k_{z3}^2&=\frac{\omega^2\rho-k_x^2\lambda_{xyxy}}{\lambda_{xzxz}}.\end{aligned}$$

В случае изотропного материала полученные выражения переходят в общеизвестные выражения для проекций скоростей поперечных и продольных волн.

Ограничим рассмотрение случаем, когда слоистая среда выполнена из ортотропных материалов с таким же расположением осей симметрии (изотропные материалы являются частным случаем такой симметрии) упругостных свойств. Тогда дальнейший анализ можно вести только для двух типов волн, определяющих колебания в плоскости xz (колебания

частиц в третьем типе волн происходят вдоль оси y и исходя из геометрии задачи могут рассматриваться независимо).

Определим соотношения между проекциями колебательных скоростей частиц слоя для двух типов волн. Для удобства вычислений подставим выражение для k_{z1} во второе уравнение системы (6). Тогда, считая независимой переменной v_{x1}, получим

$$v_{z1} = \pm \frac{k_x k_{z1} (\lambda_{xxzz} + \lambda_{xzxz})}{\omega^2 \rho - k_x^2 \lambda_{xzxz} - k_{z1}^2 \lambda_{zzzz}} v_{x1} = \pm M_{z1} v_{x1}. \tag{8}$$

Далее подставим выражение для k_{z2} в первое уравнение системы (6). Считая независимой переменной v_{z2}, получим

$$v_{x2} = \pm \frac{k_x k_{z2} (\lambda_{xxzz} + \lambda_{xzxz})}{\omega^2 \rho - k_x^2 \lambda_{xxxx} - k_{z2}^2 \lambda_{xzxz}} v_{z2} = \pm M_{x2} v_{z2}. \tag{9}$$

В выражениях (8) и (9) знаки $\pm$ соответствуют распространению каждого типа волны в сторону положительных или отрицательных значений z. В результате проекции колебательных скоростей границ слоя определятся в виде

$$v_x = [V'_{0x1} e^{ik_{z1}z} + V''_{0x1} e^{-ik_{z1}z} + M_{x2} (V'_{0z2} e^{ik_{z2}z} - V''_{0z2} e^{-ik_{z2}z})] e^{i(k_x x - \omega t)}, \tag{10}$$

$$v_z = [M_{z1} (V'_{0x1} e^{ik_{z1}z} - V''_{0x1} e^{-ik_{z1}z}) + V'_{0z2} e^{ik_{z2}z} + V''_{0z2} e^{-ik_{z2}z}] e^{i(k_x x - \omega t)},$$

где $V_{0i\nu}$ — амплитуда i-й проекции колебательной скорости в ν-м типе волны, а один или два штриха при символе $V_{0i\nu}$ соответствуют волне, распространяющейся в сторону положительных или отрицательных z. Подставляя выражение (10) в формулы для нормального и тангенциального компонент σ_{zz}, σ_{xz} тензора напряжений

$$\sigma_{zz} = \frac{i}{\omega} \left(\lambda_{xxzz} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda_{zzzz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \tag{11}$$

$$\sigma_{xz} = \frac{i}{\omega} \lambda_{xzxz} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

и поступая указанным выше способом, получим следующие выражения коэффициентов матрицы перехода от скоростей и напряжений, определенных на границе слоя с индексом 0 к аналогичным величинам на границе 1

$$\begin{bmatrix} v_x^{(1)} \\ v_z^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} \\ \sigma_{xz}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^{(0)} \\ v_z^{(0)} \\ \sigma_{zz}^{(0)} \\ \sigma_{xz}^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$a_{11} = \frac{k_{z2} \lambda_{zzzz} + k_x M_2 \lambda_{xzxz}}{\lambda_{zzzz} (k_{z2} - k_{z1} M_1 M_2)} (\cos k_{z1} h - \cos k_{z2} h) + \cos k_{z2} h,$$

$$a_{12} = i \frac{(k_{z1} + k_x M_1) M_2 \sin k_{z2} h - (k_x + k_{z2} M_2) \sin k_{z1} h}{k_{z1} - k_{z2} M_1 M_2},$$

$$a_{13} = \frac{\omega M_2 (\cos k_{z1} h - \cos k_{z2} h)}{\lambda_{zzzz} (k_{z2} - k_{z1} M_1 M_2)},$$

$$a_{14} = -i \frac{\omega (\sin k_{z1} h - M_1 M_2 \sin k_{z2} h)}{\lambda_{xzxz} (k_{z1} - k_{z2} M_1 M_2)},$$

$$a_{21}=i\frac{(k_{z2}\lambda_{zzzz}+k_xM_2\lambda_{xxzz})M_1\sin k_{z1}h-(k_x\lambda_{xxzz}+k_{z1}M_1\lambda_{zzzz})\sin k_{z2}h}{\lambda_{zzzz}(k_{z2}-k_{z1}M_1M_2)},$$

$$a_{22}=\cos k_{z1}h+\frac{k_{z1}+k_xM_1}{k_{z1}-k_{z2}M_1M_2}(\cos k_{z2}h-\cos k_{z1}h),$$

$$a_{23}=i\omega\frac{M_1M_2\sin k_{z1}h-\sin k_{z2}h}{\lambda_{zzzz}(k_{z2}-k_{z1}M_1M_2)},$$

$$a_{24}=\frac{\omega M_1(\cos k_{z2}h-\cos k_{z1}h)}{\lambda_{xzxz}(k_{z1}-k_{z2}M_1M_2)},$$

$$a_{31}=\frac{(k_{z2}\lambda_{zzzz}+k_xM_2\lambda_{xxzz})(k_x\lambda_{xxzz}+k_{z1}M_1\lambda_{zzzz})}{\omega\lambda_{zzzz}(k_{z2}-k_{z1}M_1M_2)}(\cos k_{z2}h-\cos k_{z1}h),$$

$$a_{32}=i\frac{\begin{gathered}(k_x+k_{z2}M_2)(k_x\lambda_{xxzz}+k_{z1}M_1\lambda_{zzzz})\sin k_{z1}h-\\-(k_{z1}+k_xM_1)(k_{z2}\lambda_{zzzz}+k_xM_2\lambda_{xxzz})\sin k_{z2}h\end{gathered}}{\omega(k_{z1}-k_{z2}M_1M_2)},$$

$$a_{33}=\cos k_{z1}h+\frac{k_{z2}\lambda_{zzzz}+k_xM_2\lambda_{xxzz}}{\lambda_{zzzz}(k_{z2}-k_{z1}M_1M_2)}(\cos k_{z2}h-\cos k_{z1}h),$$

$$a_{34}=i\frac{(k_x\lambda_{xxzz}+k_{z1}M_1\lambda_{zzzz})\sin k_{z1}h-(k_{z2}\lambda_{zzzz}+k_xM_2\lambda_{xxzz})M_1\sin k_{z2}h}{\lambda_{xzxz}(k_{z1}-k_{z2}M_1M_2)},$$

$$a_{41}=-\frac{i\lambda_{xzxz}}{\omega}\left[\frac{(k_{z1}+k_xM_1)(k_{z2}\lambda_{zzzz}+k_xM_2\lambda_{xxzz})\sin k_{z1}h}{\lambda_{zzzz}(k_{z2}-k_{z1}M_1M_2)}-\right.$$

$$\left.-\frac{(k_x+k_{z2}M_2)(k_x\lambda_{xxzz}+k_{z1}M_1\lambda_{zzzz})\sin k_{z2}h}{\lambda_{zzzz}(k_{z2}-k_{z1}M_1M_2)}\right],$$

$$a_{42}=\frac{\lambda_{xzxz}(k_x+k_{z2}M_2)(k_{z1}+k_xM_1)}{\omega(k_{z1}-k_{z2}M_1M_2)}(\cos k_{z1}h-\cos k_{z2}h),$$

$$a_{43}=i\frac{\lambda_{xzxz}[(k_x+k_{z2}M_2)\sin k_{z2}h-(k_{z1}+k_xM_1)M_2\sin k_{z1}h]}{\lambda_{zzzz}(k_{z2}-k_{z1}M_1M_2)},$$

$$a_{44}=\cos k_{z2}h+\frac{k_{z1}+k_xM_1}{k_{z1}-k_{z2}M_1M_2}(\cos k_{z1}h-\cos k_{z2}h).$$

В приведенных выражениях h — толщина слоя, $M_1=M_{z1}$ и $M_2=M_{x2}$.

Для частного случая изотропного материала слоя выражения коэффициентов матрицы полностью переходят в известные выражения [2, 4].

Необходимо заметить, что если оси симметрии ортотропного материала не совпадают с выбранными осями координат, то существуют известные методы приведения технических постоянных упругости из одной системы координат в другую, изложенные в ряде монографий и учебников, например в работе [5]. Однако уравнения (6), построенные для этого случая, не будут распадаться, и в результате для решения задачи необходимо определить три проекции для скоростей смещения границ и три составляющих напряжений, так что матрица перехода будет квадратной матрицей шестого порядка, что усложнит анализ, но не представит существенных трудностей при использовании ЦВМ.

Автор благодарит В. Г. Савина и С. А. Рыбака за полезные советы и обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Schoenberg.* Plane wave propagation in stratified anisotropic media. J. Acoust. Soc. America, 1974, *55*, 5, 922—925.
2. *Б. Д. Тартаковский, О. Г. Швилкина.* О прохождении плоских волн через твердые слои. Сб. «Вибрации и шумы», М., «Наука», 1969, 55—72.
3. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория упругости, М., «Наука», 1965.
4. *W. T. Thomson.* Transmission of elastic waves through a stratified solid material. J. Appl. Phys., 1950, *21*, 2, 89–93.
5. *П. М. Огибалов, М. А. Колтунов.* Оболочки и пластины. Изд-во МГУ, 1969.

Поступила
1 апреля 1976 г.
После окончательного исправления
24 мая 1977 г.