АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 1

УДК 534.121

О ВЛИЯНИИ ПОТЕРЬ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В ОРЕБРЕННОЙ ПЛАСТИНЕ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

Б. П. Белинский, В. А. Вешев, И. И. Клюкин, Д. П. Коузов

Рассмотрено возбуждение изгибных волн в оребренной пластине нормальной гармонической силой, равномерно распределенной по некоторому поперечному сечению пластины. Введением мнимой добавки в модули Юнга учитываются потери в материалах пластины и ребер. Найден спектр возбуждаемых нормальных волн и определены доли колебательной энергии, переносимые отдельными волнами.

Исследуем возбуждение изгибных колебаний пластины ($-a\leqslant x\leqslant +a$, $-\infty<y<+\infty$, $z=0$) нормальной гармонической силой $Fe^{-i\omega t}\delta(y)$, равномерно распределенной по линии ($-a\leqslant x\leqslant +a$, $y=0$, $z=0$), предполагая, что пластина по краям ($x=\pm a$, $-\infty<y<+\infty$, $z=0$) подкреплена одинаковыми ребрами жесткости ($x=\pm a$, $-\infty<y<+\infty$, $0\leqslant z\leqslant b$). В целях простоты не будем учитывать продольно-сдвиговые колебания несущей пластины.

Изгибное смещение пластины $\zeta(x, y)$ является решением неоднородного уравнения Кирхгофа

$$(\Delta^2-\varkappa_0^4)\zeta(x,y)=\frac{F}{\mathscr{D}_0}\delta(y) \quad (-a<x<+a,\ -\infty<y<+\infty), \tag{1}$$

удовлетворяющим граничным условиям

$$\begin{gathered}-\mathscr{D}_0\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\sigma_0\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]=-i\omega Z_1\frac{\partial\zeta}{\partial x}\operatorname{sign}x\\ (x=\pm a,\ -\infty<y<+\infty).\\ \mathscr{D}_0\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}+(2-\sigma_0)\frac{\partial^3\zeta}{\partial y^2\partial x}\right]=-i\omega Z_2\zeta\operatorname{sign}x\end{gathered} \tag{2}$$

Множитель $e^{-i\omega t}$, задающий зависимость процессов от времени t, всюду опускаем. Единственное решение выделяется на основе принципа предельного поглощения.

В формулах (1), (2) введены обозначения: $\varkappa_0(\rho_0H_0\omega^2/\mathscr{D}_0)^{1/4}$ — волновое число изгибных колебаний, $\mathscr{D}_0=E_0^*H_0^3/12(1-\sigma_0^2)$ — цилиндрическая жесткость, ρ_0 — плотность, H_0 — толщина, $E_0^*=E_0(1-i\eta_0)$, E_0 — модуль Юнга, η_0 — коэффициент потерь, σ_0 — коэффициент Пуассона, относящиеся к пластине; ω — круговая частота, Z_1 и Z_2 — крутильный и изгибный импеданцы ребер жесткости. Эти импеданцы в общем случае являются дифференциальными операторами по переменной y с постоянными коэффициентами. В частном случае, когда все процессы в системе зависят от y по закону $e^{i\mu y}$, действие этих операторов сводится к умножению на числа.

Выражения для импеданцев Z_1 и Z_2 получены в работе [1]. При этом рассмотрены две модели ребра: тонкая упругая пластина, способная к изгибным и продольно-сдвиговым колебаниям, и стержень прямоуголь-

ного сечения $b\times H$, $b\gg H$, который может совершать крутильные и изгибные колебания.

В случае малой высоты ребра ($\varkappa b\ll 1$, $\mu b\ll 1$) можно пользоваться второй моделью, для которой

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
Z_1&=\frac{1}{i\omega}\left(\rho I\omega^2-K\mu^2\right),\\
Z_2&=\frac{1}{i\omega}\left(\rho bH\omega^2-E^*I\mu^4\right).
\end{aligned}
$$

Здесь $I=b^3H/3$ — момент инерции сечения ребра относительно оси вращения, расположенной на нижней кромке ребра, $K=E^*H^3b/6(1+\sigma)$ — крутильная жесткость ребра, $E^*=E(1-i\eta)$, величины $\varkappa$, ρ, H, E, η, σ имеют прежний смысл, но относятся к ребру.

Процедура решения задачи (1), (2) аналогична изложенной в работах [2, 3] для пластины без ребер. В итоге получается следующее представление поля смещений в виде ряда по нормальным волнам:

$$
\zeta(x,y)=\frac{iF}{\mathscr{D}_0}\sum_{l\geqslant 0}\frac{e^{i\mu_l|y|}U(\mu_l,x)}{(\mu_l^4-\varkappa_0^4)\dfrac{d}{d\mu}\Delta(\mu_l)},
$$

$$
\begin{aligned}
U(\mu,x)=&\operatorname{ch}(\alpha_+x)\left\{c_-\alpha_-^2\frac{i\omega}{\mathscr{D}_0}Z_2-\alpha_-s_-\left[\left(\frac{i\omega}{\mathscr{D}_0}\right)^2Z_1Z_2+\sigma_0\mu^2A_1\right]\right\}+\\
&+\operatorname{ch}(\alpha_-x)\left\{\alpha_+s_+\left[\left(\frac{i\omega}{\mathscr{D}_0}\right)^2Z_1Z_2+\sigma_0\mu^2A_2\right]-c_+\alpha_+^2\frac{i\omega}{\mathscr{D}_0}Z_2\right\},
\end{aligned}
$$

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\Delta(\mu)=&2\frac{i\omega}{\mathscr{D}_0}Z_2\varkappa_0^2c_+c_-+2\frac{i\omega}{\mathscr{D}_0}Z_1\varkappa_0^2\alpha_+s_+\alpha_-s_-+\\
&+c_+\alpha_-s_-\left[\left(\frac{i\omega}{\mathscr{D}_0}\right)^2Z_1Z_2-A_1^2\right]-\alpha_+s_+c_-\left[\left(\frac{i\omega}{\mathscr{D}_0}\right)^2Z_1Z_2-A_2^2\right],
\end{aligned}
$$

$$
A_{1,2}=\pm\varkappa_0^2+\mu^2(1-\sigma_0),\quad \alpha_\pm=\sqrt{\mu^2\pm\varkappa_0^2},
$$

$$
c_\pm=\operatorname{ch}(\alpha_\pm a),\quad s_\pm=\operatorname{sh}(\alpha_\pm a).
$$

Суммирование распространяется на нули μ_l функции $\Delta(\mu)$, расположенные в верхней полуплоскости.

Выражение для среднего (по периоду) потока энергии, переносимой l-й волной, распространяющейся в положительном или отрицательном направлении оси y, имеет вид

$$
(5)\qquad \Pi^l(y)=(\Pi_0^l+\Pi_1^l+\Pi_2^l)e^{-2|y|\operatorname{Im}\mu_l},
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_0^l=\omega\Bigg\{&\int_{-a}^{+a}\left[\operatorname{Re}\mu_l\operatorname{Re}(\mathscr{D}_0\mu_l^2)|V_l|^2+\operatorname{Re}(\mathscr{D}_0\mu_l)|V_l'|^2+\right.\\
&\left.+\sigma_0\operatorname{Im}\mu_l\operatorname{Im}\mathscr{D}_0|V_l'|^2\right]dx-\sigma_0\operatorname{Re}\mu_l\operatorname{Re}(\mathscr{D}_0\overline{V}_lV_l')\Big|_{x=-a}^{x=+a}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\Pi_1^l=\omega\operatorname{Re}(\mu_lK)|V_l'|^2|_{x=a},
$$

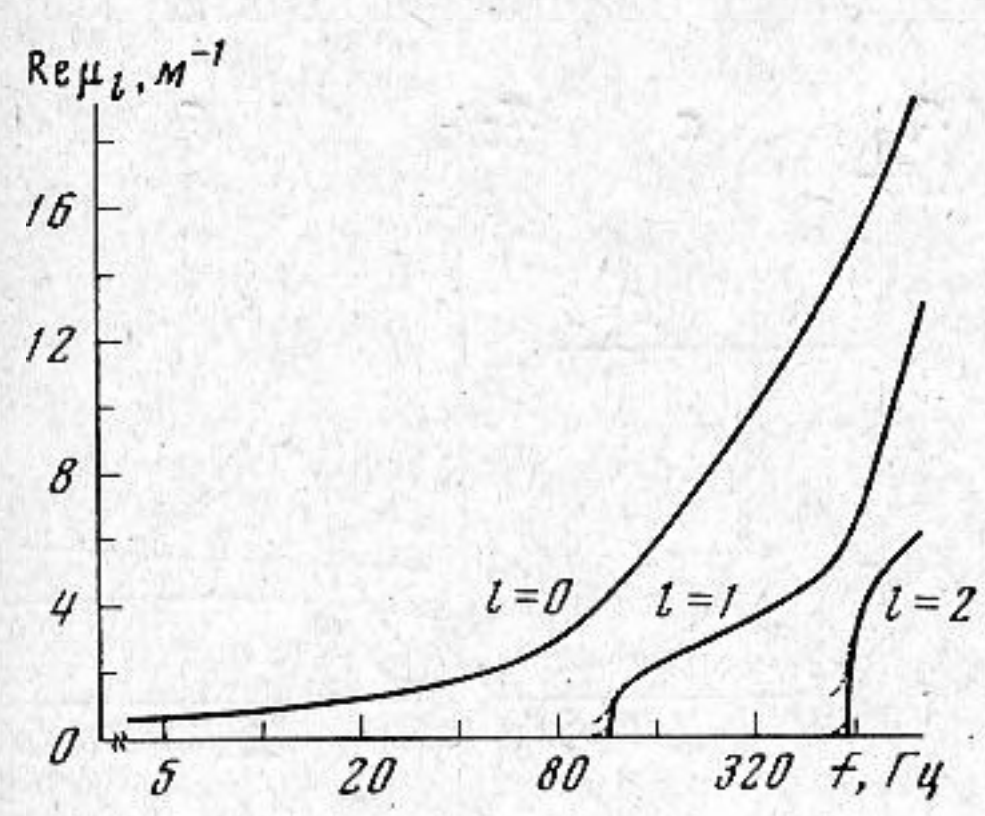
$$
\Pi_2^l=2\omega\operatorname{Re}\mu_l\operatorname{Re}(\mu_l^2E^*I)|V_l|^2|_{x=a},
$$

$$
V_l(x)=\frac{F}{\mathscr{D}_0}\frac{U(\mu_l,x)}{(\mu_l^4-\varkappa_0^4)\dfrac{d}{d\mu}\Delta(\mu_l)},\quad V_l'=\frac{dV_l}{dx}.
$$

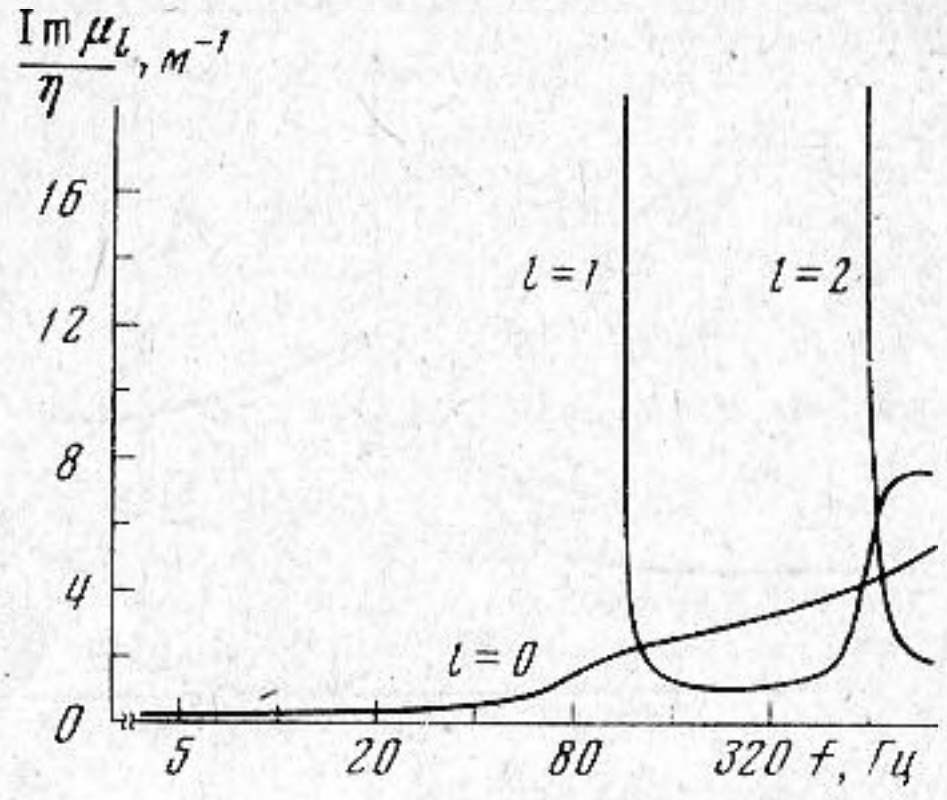
Черта — знак комплексного сопряжения. Здесь Π_0^l — поток энергии, переносимой изгибными колебаниями пластины [3, 4], а Π_1^l и Π_2^l — крутильными и изгибными колебаниями ребер.

Учет потерь приводит к тому, что Π^l зависит от y, а именно экспоненциально спадает с увеличением расстояния от источника, тогда как без учета потерь Π^l не зависел от y.

Полный поток энергии складывается из потоков Π^l отдельных мод. Потоки энергии взаимодействия мод обращаются в нуль в силу некоторого соотношения ортогональности, аналогичного полученным в [3, 4]



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Частотные зависимости $\mathrm{Re}\,\mu_l$. Сплошные кривые соответствуют случаю отсутствия потерь ($\eta=0$), штриховые — $\eta=0{,}01$; штрихпунктирные — $\eta=0{,}08$

Фиг. 2. Частотные зависимости отношений $\mathrm{Im}\,\mu_l/\eta$

для пластины без ребер. Заметим, что в недавно вышедшей работе [5] формула для потока энергии, переносимой в сходной конструкции, ошибочна.

Численные расчеты проводились нами для стальных пластины и ребер ($\sigma_0=\sigma=0{,}3$; $E_0=E=2{,}06\cdot10^{11}$ *н/м*^{2}; $\rho_0=\rho=7{,}8\cdot10^3$ *кг/м*^{3}) одинаковой толщины $H_0=H=0{,}01$ *м*. Ширина пластины $2a=0{,}6$ *м*, высота ребер $b=0{,}067$ *м*. Коэффициенты потерь предполагались одинаковыми и принимали значения $\eta_0=\eta=0{,}003$; 0,01; 0,08. Диапазон частот $f=\omega/2\pi=5$–800 *гц* выбирался из условия применимости приближенных формул для импеданцев (3).

Частотные зависимости $\mathrm{Re}\mu_l$ и $\mathrm{Im}\mu_l/\eta$ (l — номер моды) для распространяющихся нормальных волн, т. е. для тех корней функции $\Delta(\mu)$, которые при отсутствии потерь являются вещественными и положительными, приведены на фиг. 1 и 2. Оказывается, что $\mathrm{Re}\mu_l$, а следовательно, и фазовые скорости распространения нормальных волн практически не зависят от величины коэффициента потерь. Различие наблюдается лишь вблизи частот зарождения ненулевых мод: $f_1=114$ *гц*, $f_2=598$ *гц*. Но на этих частотах ненулевые моды затухают намного быстрее нулевой нормальной волны (см. фиг. 2) и поэтому несущественны.

Величина $\mathrm{Im}\mu_l$, т. е. быстрота затухания волн, прямо пропорциональна коэффициенту потерь η. В некоторых диапазонах частот (для первой моды от 130 до 610 *гц*) ненулевые моды затухают медленнее, чем нулевая мода, и их учет особенно важен.

На фиг. 3 и 4 приведены частотные зависимости нормированных потоков энергии

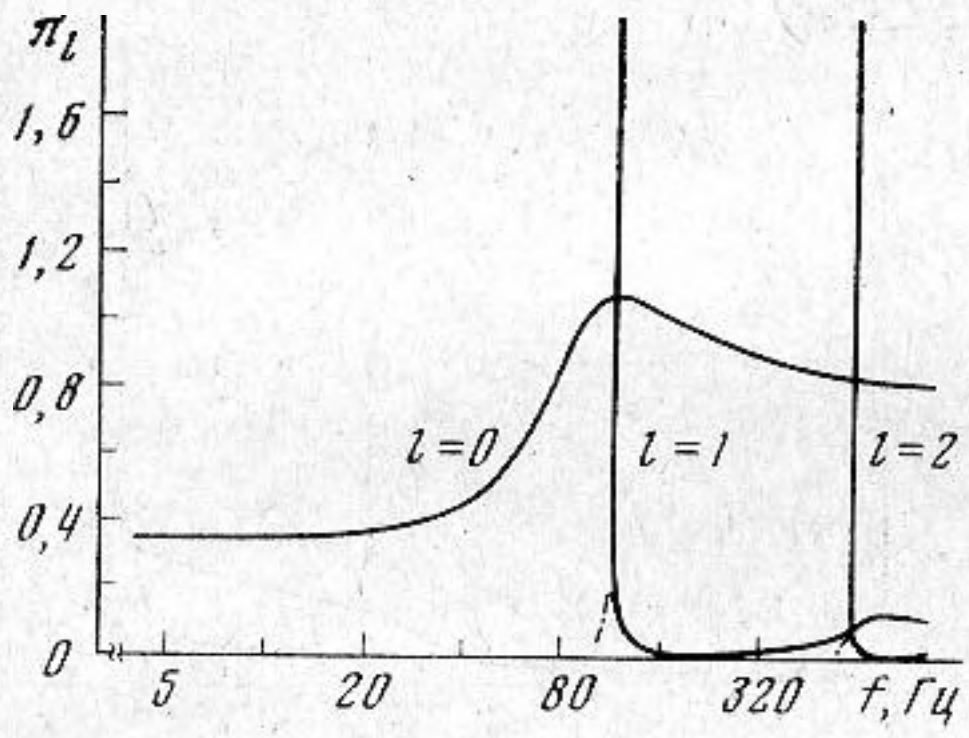
$$\pi_l=\Pi^l(y=0)/\Pi^\infty(y=0),$$

$$\Pi^\infty(y)=e^{-2|y|\mathrm{Im}\,\varkappa_0}\frac{\omega a F^2\,\mathrm{Re}\,\varkappa_0\,\mathrm{Re}(\mathscr{D}_0\varkappa_0^2)}{8|\mathscr{D}_0|^2|\varkappa_0|^6}$$

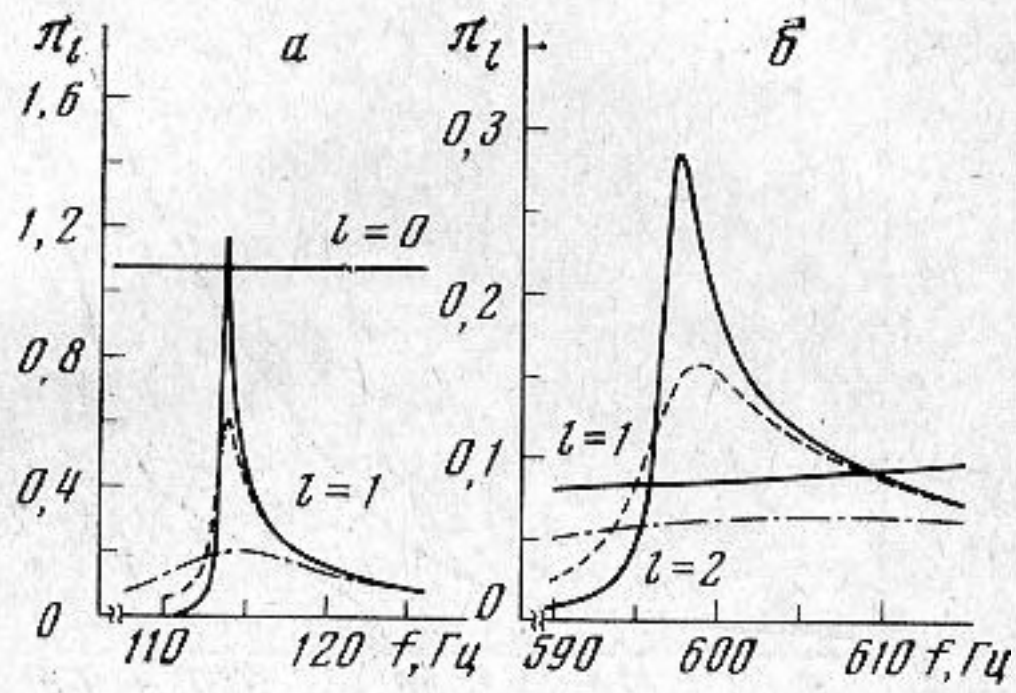
Здесь $\Pi^{\infty}(y)$ — поток энергии, приходящийся на мысленно выделенный участок ширины $2a$ в бесконечной упругой пластине ($-\infty<x$, $y<+\infty$), возбуждаемой нормальной гармонической силой $Fe^{-i\omega t}\delta(y)$, равномерно распределенной по линии ($-\infty<x<+\infty$, $y=0$).

Величины π_l характеризуют распределение вводимой энергии по нормальным волнам в месте действия источника. Следует иметь в виду, что при удалении от источника доли энергии, приходящиеся на отдельные моды, будут изменяться в виду различия в затухании этих мод (фиг. 2).

Для нулевой моды изменение η практически не меняет значений потока π_0. Различия в потоках π_l для ненулевых мод при различных коэф-



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Частотные зависимости нормированных потоков энергии π_l. Сплошные кривые соответствуют случаю отсутствия потерь ($\eta=0$); штрихпунктирные — $\eta=0{,}08$

Фиг. 4. Частотные зависимости нормированных потоков энергии π_l вблизи частот зарождения первой (*а*) и второй (*б*) нормальных волн. Сплошные кривые соответствуют $\eta=0{,}003$; штриховые — $\eta=0{,}01$; штрихпунктирные — $\eta=0{,}08$

фициентах потерь наблюдаются лишь вблизи частот зарождения этих мод. При отсутствии потерь потоки $\pi_{1,2}$ на частотах зарождения $f_{1,2}$ обращаются в бесконечность, т. е. вблизи этих частот практически вся энергия источника переносится только что зародившейся модой (резонанс). Учет потерь приводит к тому, что максимумы на резонансах $\pi_{1,2}$ становятся конечными и немного сдвигаются в область высоких частот (фиг. 3, 4).

Обращение π_1 в нуль при $f\approx180$ *гц*, а π_2 — при $f=750$ *гц* объясняется тем, что на данных частотах импеданцы ребер $Z_{1,2}$ для этих мод близки к нулю, т. е. практически отсутствует влияние ребер. В случае же пластины со свободными краями потоки энергии ненулевых мод при рассматриваемом способе возбуждения очень малы [6].

Распределение потоков энергий мод по различным механизмам переноса энергии — изгибные колебания самой пластины, изгибные и крутильные колебания ребер — остается практически тем же, что и в случае отсутствия потерь. В частности, поток энергии нулевой моды π_0 на низких частотах ($f<70$ *гц*) переносится в основном изгибными колебаниями ребер, а на высоких ($f>110$ *гц*) — изгибными колебаниями самой пластины, причем большая часть энергии этих колебаний распространяется в средней части пластины. На высоких частотах остальная (менее 8%) часть потока π_0 переносится крутильными колебаниями ребер, а доля изгибных колебаний ребер пренебрежимо мала.

Вследствие этого $\mathrm{Re}\mu_0$ (фиг. 1) и $\mathrm{Im}\mu_0/\eta$ (фиг. 2) на низких частотах ($f<70$ *гц*) близки к соответствующим значениям $\mathrm{Re}\varkappa_2$ и $\mathrm{Im}\varkappa_2/\eta$ для волнового числа изгибных колебаний ребра ($\varkappa_2^4=\rho bH\omega^2/E^*I$), а на высоких ($f>110$ *гц*) — к значениям $\mathrm{Re}\varkappa_0$ и $\mathrm{Im}\varkappa_0/\eta$ для волнового числа изгибных колебаний пластины.

В диапазоне 140—600 *гц* поток энергии π_1 переносится в основном изгибными колебаниями ребер, а на более низких и более высоких час-

тотах — изгибными колебаниями самой пластины. Поэтому в диапазоне 140—600 *гц* значения $\mathrm{Re}\mu_1$ и $\mathrm{Im}\mu_1/\eta$ близки к значениям $\mathrm{Re}\varkappa_2$ и $\mathrm{Im}\varkappa_2/\eta$.

Поскольку $\mathrm{Im}\varkappa_2<\mathrm{Im}\varkappa_0$, т. е. изгибные колебания в ребре затухают медленнее, чем изгибные колебания в несущей пластине, нулевая мода при $f<70$ *гц* в оребренной пластине затухает существенно слабее, чем в пластине без ребер. По этой же причине первая мода в диапазоне 130—610 *гц* затухает медленнее нулевой (фиг. 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белинский Б. П., Вешев В. А., Клюкин И. И., Коузов Д. П.* О влиянии ребер на распространение изгибных волн в пластине конечной ширины. Изв. АН СССР. Мех. тв. тела, 1977, 5, 166—170.
2. *Коненков Ю. К., Наумкина Н. И., Тартаковский Б. Д.* Исследование вынужденных изгибных колебаний упругой полосы. Акуст. ж., 1965, *11*, 3, 341—350.
3. *Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д.* Колебания упругой полосы. В сб.: Методы виброизоляции машин и присоединенных конструкций. М., «Наука», 1975, стр. 12—42.
4. *Коузов Д. П., Лукьянов В. Д.* О векторе потока энергии для изгибных колебаний пластины. ПММ, 1976, *40*, 6, 1131—1135.
5. *Fahy F. J., Lindqvist E.* Wave Propagation in Damped, Stiffened Structures. Characteristic of Ship Construction. J. Sound and Vibration, 1976, *45*, 1, 115—138.
6. *Вешев В. А., Клюкин И. И., Коузов Д. П., Лукьянов В. Д.* О распространении колебательной энергии в тонкой упругой пластине постоянной ширины. Акуст. ж., 1977, *23*, 2, 228—233.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова,
физический факультет
Научно-исследовательский физический институт

Поступила
24 марта 1977 г.