АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 1

УДК 534.222

О ПОГЛОЩЕНИИ И ДИСПЕРСИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ

Ю. Я. Богуславский

Теоретически исследованы поглощение и дисперсия звуковых волн в мелкодисперсной двухфазной системе в предположении, что длина волны звука велика по сравнению с размерами неоднородностей. Показано, что при низких частотах, когда длина температурной волны δ много больше размеров неоднородностей, поглощение пропорционально квадрату частоты. В этом случае дисперсия скорости мала. При высоких частотах, когда δ много меньше размеров неоднородностей, поглощение пропорционально корню квадратному из частоты. При этом скорость звуковых волн обнаруживает сильную дисперсию.

В настоящей работе исследованы поглощение и дисперсия звуковых волн в мелкодисперсной двухфазной системе, представляющей собой жидкость с распределенными в ней мелкими пузырьками пара, пар со взвешенными в нем мелкими капельками жидкости или смесь фаз различных кристаллических модификаций. Длина волны звука предполагается большой по сравнению с размерами неоднородностей, так что система находится в однородном переменном поле давления $\delta p=\delta p_0 \exp(i\omega t)$. При распространении звуковой волны изменение температуры на границе соприкосновения фаз, обусловленное переменным звуковым давлением, определяется из уравнения Клапейрона — Клаузиса

$$\delta T=T(V_2-V_1)\,\delta p/q,$$

где q — теплота перехода из одной фазы в другую, V_1, V_2 — удельные объемы соответственно фаз 1 и 2.

Следовательно, в результате прохождения звуковой волны от границ соприкосновения фаз внутрь каждой фазы будут распространяться температурные волны. Естественно, что «макроскопически» сжатия и разрежения будут происходить по закону адиабаты. Однако при низких частотах разности температур на расстояниях порядка размеров неоднородностей будут успевать выравниваться (длина температурной волны больше размеров неоднородностей системы) — процесс будет «микроскопически» изотермичен. При высоких же частотах (длина температурной волны меньше размеров неоднородностей) выравнивания температур не будет происходить и процесс будет идти почти адиабатически и «микроскопически». Критической частотой является здесь такая частота, при которой длина температурной волны имеет порядок размеров неоднородностей. При переходе через эту частоту скорость звука должна обнаруживать сильную дисперсию. Кроме того, здесь следует ожидать и повышенного затухания с различными частотными зависимостями коэффициента поглощения по обе стороны от критической частоты.

Пусть x — доля по массе фазы 2 в системе. Тогда удельная энтропия s и плотность ρ системы есть

$$s=(1-x)s_1+xs_2;\quad \rho^{-1}=(1-x)V_1+xV_2, \tag{1}$$

где индексы 1 и 2 отличают величины, относящиеся к чистым фазам 1 и 2.

Исходим из уравнения

$$\ddot{\rho}'=\Delta p', \tag{2}$$

получающегося из линеаризованных уравнений Эйлера и неразрывности. Далее из (1) для усредненного изменения плотности и энтропии следует

$$\rho'=\{xV_2+(1-x)V_1\}^{-2}[xV_2'+(1-x)V_1'+(V_2-V_1)x'], \tag{3}$$

$$s'=(1-x)s_1'+xs_2'+(s_2-s_1)x'=0. \tag{4}$$

Значения V_2', V_1', s_2', s_1' найдутся как результат усреднения по объему, малому по сравнению с длиной звуковой волны, но включающему достаточное число разнородных участков обеих фаз, чтобы усредненные характеристики этого объема были теми же, что и для всей среды в целом. Рассматривая изменения объема и энтропии в каждой точке как функции давления и температуры, получим

$$\begin{aligned}
V_2'&=(\partial V_2/\partial p)_T\delta p+(\partial V_2/\partial T)_p\frac{1}{v_2}\int\limits_{v_2}T_2dv_2,\\
V_1'&=(\partial V_1/\partial p)_T\delta p+(\partial V_1/\partial T)_p\frac{1}{v_1}\int\limits_{v_1}T_1dv_1,\\
s_2'&=-(\partial V_2/\partial T)_p\delta p+\frac{C_{p2}}{T_0}\frac{1}{v_2}\int\limits_{v_2}T_2dv_2\\
s_1'&=-(\partial V_1/\partial T)_p\delta p+\frac{C_{p1}}{T_0}\frac{1}{v_1}\int\limits_{v_1}T_1dv_1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь v_1 и v_2 — объемы, занимаемые фазами; T_1, T_2 — приращения температуры, вызванные переменным звуковым давлением и теплопроводностью; T_0 — равновесная температура среды; C_{p1}, C_{p2} — теплоемкости при постоянном давлении фаз 1 и 2. Пространственное распределение температур T каждой фазы найдем из соответствующего уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\varkappa}{\rho C_p}\Delta T-\frac{T_0(\partial V/\partial T)}{C_p}\frac{\partial p}{\partial t}=0.$$

Для звуковой волны с частотой ω имеем $T=e^{i\omega t}T'$, где T' зависит только от координат. Опуская штрих, получим для фазы 1

$$\Delta T_1-2in_1^2T_1+\frac{2in_1^2T_0}{C_{p1}}\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p\delta p_0=0. \tag{6}$$

Для второй фазы

$$\Delta T_2-2in_2^2T_2+\frac{2in_2^2T_0}{C_{p2}}(\partial V_2/\partial T)_p\delta p_0=0. \tag{7}$$

Здесь

$$(1+i)n_1=(1+i)\left(\frac{\omega\rho_1C_{p1}}{2\varkappa_1}\right)^{1/2},\quad (1+i)n_2=(1+i)\left(\frac{\omega\rho_2C_{p2}}{2\varkappa_2}\right)^{1/2}$$

— комплексные волновые числа температурных волн фаз 1 и 2, ρ_1, ρ_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — соответственно плотности и теплопроводности.

Произвольные постоянные в решении уравнений (6), (7) определяются из условия, что на границе соприкосновения фаз должно выполняться равенство

$$T_1=T_2=T_0(V_2-V_1)\delta p_0/q. \tag{8}$$

Из выражений (3)–(5) по найденным интегралам уравнений (6), (7), удовлетворяющим условию (8), получим комплексное усредненное изменение плотности среды:

$$\rho'=-\frac{1}{\{xV_2+(1-x)V_1\}^2}\Big\{x\Big[\Big(\frac{\partial V_2}{\partial p}\Big)_T\delta p+\Big(\frac{\partial V_2}{\partial T}\Big)_p\frac{1}{v_2}\int\limits_{v_2}T_2dv_2\Big]+(1-x)\Big[\Big(\frac{\partial V_1}{\partial p}\Big)_T\delta p+\Big(\frac{\partial V_1}{\partial T}\Big)_p\frac{1}{v_1}\int\limits_{v_1}T_1dv_1\Big]-\frac{V_2-V_1}{s_2-s_1}x\Big[-\Big(\frac{\partial V_2}{\partial T}\Big)_p\delta p+\frac{C_{p2}}{T_0}\cdot\frac{1}{v_2}\int\limits_{v_2}T_2dv_2\Big]-\frac{V_2-V_1}{s_2-s_1}(1-x)\times\Big[-\Big(\frac{\partial V_1}{\partial T}\Big)_p\delta p+\frac{C_{p1}}{T_0}\frac{1}{v_1}\int\limits_{v_1}T_1dv_1\Big]\Big\}. \tag{9}$$

Вычислив ρ', из уравнения (1) определим комплексное волновое число

$$k-i\Gamma=\omega\sqrt{\rho'/p'}, \tag{10}$$

мнимая часть которого дает коэффициент затухания, а действительная — скорость звуковой волны ($k=\omega/c$, где c — скорость звука).

Рассмотрим в качестве простейшего примера одномерную задачу, считая, что фазы расположены чередующимися слоями толщины $2h$ (фаза 2) и $2H$ (фаза 1). Толщины слоев считаем малыми по сравнению с длиной звуковой волны. Если принять за плоскость $z=0$ середину слоя фазы 2, то за исследуемую двухфазную систему можно принять участок, расположенный между плоскостями $z=-H-h$ и $z=H+h$, так как распределение температуры в других слоях будет периодически повторяться. В уравнениях (6), (7) нужно положить $\Delta=d^2/dz^2$. После этого, используя граничные условия (8) и

$$\left.\frac{dT_1}{dz}\right|_{z=-H-h}=\left.\frac{dT_1}{dz}\right|_{z=H+h}=\left.\frac{dT_2}{dz}\right|_{z=0}=0,$$

получим решения уравнений (6), (7):

при $-h\leqslant z\leqslant h$ (11)

$$T_2=\frac{T_0(\partial V_2/\partial T)_p}{C_{p2}}\delta p_0+\Big[\frac{T_0(V_2-V_1)}{q}-\frac{T_0(\partial V_2/\partial T)_p}{C_{p2}}\Big]\times\delta p_0\frac{\operatorname{ch}(1+i)n_2z}{\operatorname{ch}(1+i)n_2h},$$

при $-2H-h\leqslant z\leqslant -h$

$$T_1=T_0\frac{\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p}{C_{p1}}\delta p_0+\left[\frac{T_0(V_2-V_1)}{q}-\frac{T_0\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p}{C_{p1}}\right]\times\delta p_0\frac{e^{2(1+i)n_1(h+H)}e^{(1+i)n_1z}+e^{-(1+i)n_1z}}{e^{(1+i)n_1(2H+h)}+e^{(1+i)n_1h}},$$

при $h\leqslant z\leqslant h+2H$

$$T_1=T_0\frac{\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p}{C_{p1}}\delta p_0+\left[\frac{T_0(V_2-V_1)}{q^2}-\frac{T_0\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p}{C_{p1}}\right]\times\delta p_0\frac{e^{(1+i)n_1z}+e^{2(1+i)n_1(h+H)}e^{-(1+i)n_1z}}{e^{(1+i)n_1(2H+h)}+e^{(1+i)n_1h}}$$

Далее найдем, согласно (9) и (10),

$$k-i\Gamma=\omega\Big[\rho^2 x\Big[-\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T-\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p^2\frac{T_0}{C_{p2}}+ \tag{12}$$

$$+\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{q^2}\frac{C_{p\sigma 2}}{C_{p2}}\frac{\operatorname{th}(1+i)n_2h}{(1+i)n_2h}\Big]+$$

$$+\rho^2(1-x)\Big[-\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T-\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p^2\frac{T_0}{C_{p1}}+$$

$$+\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{q^2}\frac{C_{p\sigma 1}^2}{C_{p1}}\frac{\operatorname{th}(1+i)n_1H}{(1+i)n_1H}\Big]\Big]^{1/2},$$

где $C_{p\sigma 1}$, $C_{p\sigma 2}$ — теплоемкости фаз 1 и 2 вдоль кривой фазового равновесия

$$C_{p\sigma}=C_p-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\frac{q}{V_2-V_1}.$$

Исследование выражения (12) проведем вначале для случая, когда $H=h$. Для малых частот (когда $n_1h=2\pi h/\delta_1\ll 1$, $n_2h=2\pi h/\delta_2\ll 1$, т. е. длина температурной волны много больше толщины слоев) скорость звука определяется следующим выражением:

$$\frac{1}{c^2}=-\frac{V_1}{V_2+V_1}\rho^2\Big[\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p^2\frac{T_0}{C_{p2}}- \tag{13}$$

$$-\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{q^2}\frac{C_{p\sigma 2}^2}{C_{p2}}\frac{1}{1+{}^1/_2(n_2h)^4}\Big]-\frac{V_2}{V_2+V_1}\rho^2\Big[\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T+$$

$$+\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p^2\frac{T_0}{C_{p1}}-\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{q^2}\frac{C_{p\sigma 1}^2}{C_{p1}}\cdot\frac{1}{1+{}^1/_2(n_1h)^4}\Big].$$

Поскольку $n_1h\ll 1$, $n_2h\ll 1$, дисперсия скорости мала и выражение (13) в этом случае практически совпадает с формулой, полученной в работе [1]. Считая затухание малым, получим коэффициент затухания для малых частот

$$\Gamma=\frac{1}{6}\rho^2 c\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{q^2}\Big[\frac{V_1}{V_1+V_2}\cdot\frac{C_{p\sigma 2}^2}{\chi_2 C_{p2}}+\frac{V_2}{V_1+V_2}\frac{C_{p\sigma 1}^2}{\chi_1 C_{p1}}\Big]h^2\omega^2, \tag{14}$$

где $\chi=\varkappa/\rho C_p$.

Здесь имеет место квадратичная частотная зависимость. На больших частотах $n_1h=2\pi h/\delta_1\gg 1$, $n_2h=2\pi h/\delta_2\gg 1$ скорость распространения есть:

$$\frac{1}{c^2}=-\frac{V_1}{V_2+V_1}\rho^2\Big[\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p^2\frac{T_0}{C_{p2}}- \tag{15}$$

$$-\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{2q^2}\frac{C_{p\sigma 2}^2}{C_{p2}n_2h}\Big]-$$

$$-\frac{V_2\rho^2}{V_2+V_1}\Big[\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p^2\frac{T_0}{C_{p1}}-\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{2q^2}\frac{C_{p\sigma 1}^2}{C_{p1}n_1h}\Big].$$

Видно, что на больших частотах скорость звука обнаруживает достаточно сильную дисперсию. Затухание на больших частотах возрастает пропорционально квадратному корню из частоты:

$$\Gamma=\frac{1}{4}c\rho^2\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{q^2}\left[\frac{V_2}{V_1+V_2}\sqrt{2\chi_1}\frac{C_{p\sigma1}^2}{C_{p1}}+\frac{V_1}{V_2+V_1}\sqrt{2\chi_2}\frac{C_{p\sigma2}^2}{C_{p2}}\right]\frac{\sqrt{\omega}}{h}. \tag{16}$$

При $H\gg h$, $x\ll1$ получим из выражения (12) в случае малых частот $n_1H\ll1$

$$\frac{1}{c^2}=-\rho_1^2\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p^2\frac{T_0}{C_{p1}}-\right. \tag{17}$$

$$\left.-\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{q^2}\frac{C_{p\sigma1}^2}{C_{p1}}\cdot\frac{1}{1+{}^1/_2(n_1H)^4}\right];$$

$$\Gamma=\frac{1}{6}c\rho_1^2\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{q^2}\frac{C_{p\sigma1}^2}{C_{p1}\chi_1}H^2\omega^2. \tag{18}$$

Для больших частот ($n_1H\gg1$) находим

$$\frac{1}{c^2}=-\rho_1^2\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T+\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p^2\frac{T_0}{C_{p1}}-\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{2q^2}\frac{C_{p\sigma1}^2}{C_{p1}n_1H}\right], \tag{19}$$

$$\Gamma=\frac{1}{4}c\rho_1^2\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{Hq^2}\frac{C_{p\sigma1}^2}{C_{p1}}\sqrt{2\chi_1\omega}. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь мелкодисперсную среду, состоящую из сферических зародышей фазы 2 в объеме фазы 1. Расчет можно провести при условии, что между зародышами фазы 2 отсутствует тепловое взаимодействие (расстояние между зародышами фазы 2 больше длины температурной волны в фазе 1). Тогда распределение температур вблизи зародышей фазы 2 будет таким же, как и для изолированного зародыша фазы 2 в бесконечной среде фазы 1.

Так как зародыши фазы 2 имеют сферическую форму, то решение уравнений (6), (7) с учетом граничного условия (8) есть:
для фазы 2

$$T_2=\frac{T_0\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p}{C_{p2}}\delta p_0+\frac{R}{r}\left[\frac{T_0(V_2-V_1)}{q}-\frac{T_0\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p}{C_{p2}}\right]\delta p_0\frac{\operatorname{sh}(1+i)n_2r}{\operatorname{sh}(1+i)n_2R}$$

для фазы 1

$$T_1=\frac{T_0\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p}{C_{p1}}\delta p_0+\frac{R}{r}\left[\frac{T_0(V_2-V_1)}{q}-\frac{T_0\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p}{C_{p1}}\right]\delta p_0e^{-(1+i)n_1(r-R)}.$$

Здесь r — расстояние от центра зародыша фазы 2, R — радиус зародыша.

Расчет, проводимый по той же схеме, что и в предыдущем случае, дает

$$k-i\Gamma=\omega\left[\rho^2x\left[-\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T-\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p^2\frac{T_0}{C_{p2}}+\right.\right. \tag{21}$$

$$\left.+\frac{3(V_2-V_1)^2}{R^2q^2}\frac{C_{p\sigma2}^2}{C_{p1}}\frac{[n_2(1+i)R\operatorname{cth}(1+i)n_2R-1]}{2in_2^2}\right]+$$

$$+\rho^2(1-x)\left[-\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T-\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p^2\frac{T_0}{C_{p1}}+\right.$$

$$\left.+N\frac{4\pi RT_0(V_2-V_1)^2C_{p\sigma1}^2}{q^2C_{p1}}\frac{1+(1+i)n_1R}{2in_1^2}\right]\Bigg]^{1/2},$$

где N — концентрация зародышей фазы 2 в системе. При $x\ll1$, $\rho_2\ll\rho_1$ получаем для малых частот $n_1R\ll1$

(22)
$$\frac{1}{c^2}=-\rho_1^2\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T-\rho_1^2\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p^2\frac{T_0}{C_{p1}}+N\frac{2\pi R^2}{n_1}\rho_1^2\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{q^2}\frac{C_{p\sigma1}}{C_{p1}}$$

(23)
$$\Gamma=2\pi Rc\rho_1^2N\chi_1\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{q^2}\frac{C_{p\sigma1}^2}{C_{p1}}\left[1+\sqrt{\frac{\omega}{2\chi_1}}R\right]\approx$$

$$\approx2\pi Rc\rho_1^2N\chi_1\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{q^2}\frac{C_{p\sigma1}^2}{C_{p1}}.$$

Для больших частот ($n_1R\gg1$) находим

(24)
$$\frac{1}{c^2}=\rho_1^2\left[-\left(\frac{\partial V_1}{\partial p}\right)_T-\left(\frac{\partial V_1}{\partial T}\right)_p^2\frac{T_0}{C_{p1}}+\frac{2\pi R^2}{n_1}N\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{q^2}\frac{C_{p\sigma1}^2}{C_{p1}}\right]$$

(25)
$$\Gamma=2\pi Rc\rho_1^2N\chi_1\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{q^2}\frac{C_{p\sigma1}}{C_{p1}}\left[1+\sqrt{\frac{\omega}{2\chi_1}}R\right]\approx$$

$$\approx\pi R^2c\rho_1^2N\frac{T_0(V_2-V_1)^2}{q^2}\frac{C_{p\sigma1}^2}{C_{p1}}\sqrt{2\chi_1\omega}.$$

Отметим, что выражения (22) и (24), (23) и (25) совпадают. Это совпадение естественно, так как расчет проводился при условии: длина температурной волны в фазе 1 меньше расстояния между зародышами фазы 2. Если длина температурной волны в фазе 1 больше расстояния между зародышами фазы 2, то скорость звука определяется выражением, полученным в работе [1]. Поглощение в этом случае пропорционально ω^2:

(26)
$$\Gamma\approx c\rho_1^2\frac{T_0(V_2-V_1)^2C_{p\sigma1}^2}{q^2\chi_1C_{p1}}N^{-2/3}\omega^2.$$

Таким образом, характер зависимости поглощения и дисперсии от параметров среды и частоты тот же, что и в одномерном случае.

Из формул, полученных выше, видно, что в одномерном случае при $x=0$, $x=1$ поглощение, как и скорость звука, испытывает скачок при переходе от однофазной системы к двухфазной. Рассмотрим теперь в качестве примера распространение звуковой волны в воде с распределенными в ней пузырьками пара.

Пусть $N=10$ *см*$^{-3}$, $T_0=373°$ К, $\omega=10^4$ *гц*, $R=5\cdot10^{-3}$ *см*, $\chi_1=10^{-3}$ *см*^{2}/*сек*. Тогда из выражений (24), (25) получим

$$\frac{1}{c^2}\approx5\cdot10^{-11}\ \text{сек}^2/\text{см}^2+6\cdot10^{-12}\ \text{сек}^2/\text{см}^2\approx5\cdot10^{-11}\ \text{сек}^2/\text{см}^2,\quad\Gamma\approx10^{-2}\ 1/\text{см}.$$

Следует отметить, что задача о распространении звуковых волн в жидкости с пузырьками пара, когда расстояние между пузырьками превосходит длину тепловой волны в жидкости, рассматривалась также в работе [2]. Однако ее автор при вычислении сжимаемости парового пузырька не решал внутреннюю тепловую задачу для пузырька и не учел того фак-

та, что сжимаемость определяется движением частиц среды на фазовой границе, а не движением самой границы. Следовательно, формулы, полученные в [2] для сжимаемости парового пузырька и для скорости распространения волны, ошибочны вблизи критической точки.

Из соотношения (21) нашей работы, полагая в нем

$$(\partial V_1/\partial p)_T=0, \quad (\partial V_1/\partial T)_p=0, \quad x\ll 1, \quad xV_2=NV_1{}^4/_3\pi R^3,$$

нетрудно получить правильное выражение для сжимаемости парового пузырька и вблизи критической точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. *Trammel G. T.* Sound waves in water containing vapor bubbles. J. Appl. Phys., 1962, *33*, 5, 1662–1670.

Институт физики высоких давлений
Академии наук СССР

Поступила
6 августа 1976 г.
После повторной переработки
18 мая 1977 г.