АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 1

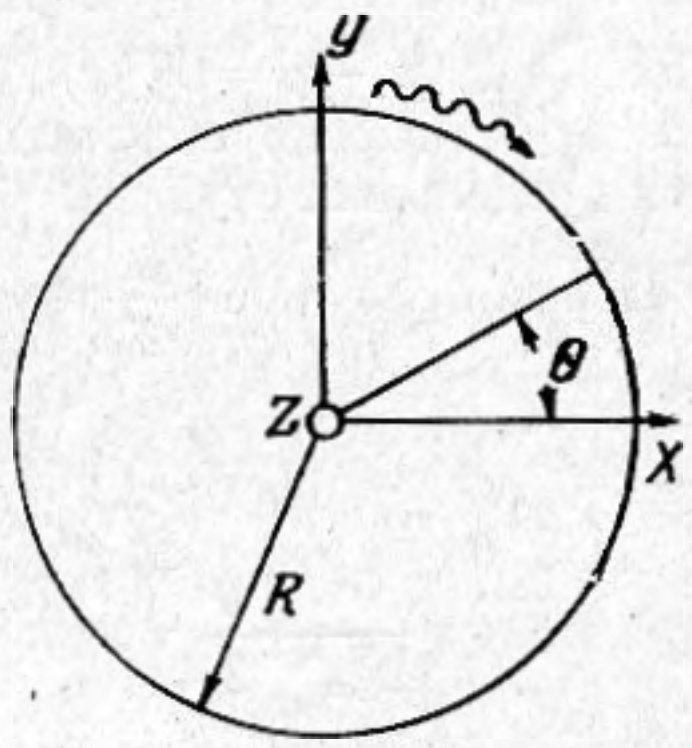
УДК 534.16

О ВЛИЯНИИ ПЬЕЗОЭФФЕКТА НА СВОЙСТВА ПОПЕРЕЧНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ КРИСТАЛЛОВ

И. А. Викторов, П. А. Пятаков

Приведены результаты расчета влияния пьезоэффекта на свойства и характеристики поперечных поверхностных волн на цилиндрических поверхностях кристаллов различных симметрий.

Ультразвуковые поверхностные волны, распространяющиеся по цилиндру в направлении, перпендикулярном образующей, в настоящее время находят широкое применение; в частности, они применяются в циркуляционных ультразвуковых линиях задержки [1, 2]. В работах [3, 4] авторами была показана возможность существования и описаны свойства поперечных поверхностных волн, распространяющихся по указанному направлению в цилиндрах из кристаллов. Было показано, что лишь в отдельных особых случаях решение является изотропным, в остальных же распространение по кристаллическому цилиндру аналогично распространению поверхностных волн в неоднородной среде. Наличие у кристалла пьезосвойств как бы увеличивает его анизотропию и может существенно изменить свойства волн и характеристики распространения. Целью настоящей работы и является рассмотрение влияния пьезоэффекта на поперечные поверхностные волны на цилиндрических поверхностях кристаллов.



Фиг. 1. Геометрия задачи о распространении волн по цилиндру. Ось z перпендикулярна плоскости чертежа

Рассмотрим поперечные поверхностные волны в кубических, гексагональных, тетрагональных кристаллах и текстурах [3], распространяющиеся в направлении, перпендикулярном образующей (фиг. 1). Будем считать, что ось z совпадает с осью симметрии высшего порядка в кристалле. Тогда гармонические (фактор $e^{-i\omega t}$ в дальнейшем изложении мы опускаем) поверхностные волны будут характеризоваться механическим смещением $U(r, \theta)$, направленным по оси z, электрическим потенциалом $\Psi(r, \theta)$ в кристалле (пьезополе) и $\Psi_0(r, \theta)$ — в вакууме. Следуя работе [3], будем рассматривать эти функции в бесконечном угловом интервале $-\infty<\theta<\infty$, считая ось $r=0$ линией разветвления бесконечного порядка.

Производя вычисления, можно показать, что решение, удовлетворяющее уравнениям движения, пьезоэффекта, электростатики, принципу погашаемости и граничным условиям на поверхности $r=R$ цилиндра (отсутствие механических напряжений, непрерывность тангенциальной составляющей электрического поля и нормальной составляющей электрической

индукции) для гексагональных и тетрагональных кристаллов и текстур имеет вид:

$$U(r,\theta)=A\frac{J_p(k_t r)}{J_p(k_t R)}e^{ip\theta}, \tag{1}$$

$$\Psi(r,\theta)=4\pi A\left[\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{J_p(k_t r)}{J_p(k_t R)}+\frac{ie_{14}\varepsilon_{11}-e_{15}}{\varepsilon_{11}(\varepsilon_{11}+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^p\right]e^{ip\theta},$$

$$\Psi_0(R,\theta)=4\pi A\frac{e_{15}+ie_{14}}{\varepsilon_{11}+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{-p}e^{ip\theta}.$$

Здесь обозначено: $J_p(k_t R)$ — функция Бесселя порядка p, A — произвольная постоянная, e_{14}, e_{15} — компоненты тензора пьезоэлектрических постоянных, ε_{11} — компонента тензора диэлектрической проницаемости, $k_t^2=\dfrac{\omega^2\rho}{c_{44}+4\pi e_{15}^2/\varepsilon_{11}}$, ρ — плотность кристалла, c_{44} — компонента тензора модулей упругости, $p=2\pi R/\lambda=kR$ угловое волновое число, λ — длина пространственной периодичности на поверхности цилиндра $k=2\pi/\lambda=\omega/c$ — волновое число.

Связь углового волнового числа p с безразмерным радиусом цилиндра $y=k_t R$ дается следующим дисперсионным уравнением, получаемым из граничных условий:

$$\frac{J_{p+1}(y)}{J_{p-1}(y)}=\frac{1-\delta}{1+\delta}, \tag{2}$$

где $\delta=\dfrac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}+1}\left(\dfrac{K_{15}^2}{\varepsilon_{11}}-K_{14}^2\right)\dfrac{1}{K_{15}^2+1}$, $K_{15}^2=\dfrac{4\pi e_{15}^2}{\varepsilon_{11}c_{44}}$, $K_{14}^2=\dfrac{4\pi e_{14}^2}{\varepsilon_{11}c_{44}}$. При условиях $y\gg1$, $|p_n-y|=O(y^{1/3})$, следуя итерационному методу, изложенному в работе [5], можно получить асимптотические решения уравнения (2) в двух предельных случаях.

Первый случай $\delta\left(\dfrac{y}{2}\right)^{1/3}\ll1$. Здесь решение имеет вид:

$$p_n(y)=y+g_n'\left(\frac{y}{2}\right)^{1/3}+\left(\frac{g_n'}{60}-\frac{1}{10g_n'}\right)\left(\frac{y}{2}\right)^{1/3}-\frac{\delta}{g_n'}\left(\frac{y}{2}\right)^{2/3}+ \tag{3}$$
$$+\frac{\delta^2}{2g_n'^3}\frac{y}{2}+O(y^{-1})+O\left[\delta^2\left(\frac{y}{2}\right)^{1/3}\right],$$

где g_n' — n-й корень производной от функции Эйри $A_i'(g')$, $n=1, 2, 3\ldots$

Второй предельный случай $\left|\delta\left(\dfrac{y}{2}\right)^{1/3}\right|\gg1$. Здесь допустимы две возможности. Если $\delta>0$, то

$$p_1(y)=y\left(1+\frac{\delta^2}{2}-\frac{1}{2\delta y}\right)+O(y^{-1}), \tag{4}$$

(5)

$$p_{n-1}=y+g_n\left(\frac{y}{2}\right)^{1/3}+\frac{g_n^2}{60}\left(\frac{2}{y}\right)^{1/3}-\frac{1}{\delta}+\frac{g_n}{3\delta}\left(1-\frac{1}{\delta^2}\right)\left(\frac{2}{y}\right)^{2/3}+O(y^{-1}),$$

где g_n — n-й корень функции Эйри $A_i(g)$, $n=1, 2, 3\ldots$ Если $\delta<0$, то корня с асимптотикой (4) не существует и все асимптотические решения уравнения (2) даются формулой (5), где p_{n-1} нужно заменить на p_n.

Выражения (1)—(5) описывают поперечные поверхностные волны на цилиндрических поверхностях гексагональных и тетрагональных кристаллов и текстур следующих классов: 1) $4mm$, $6mm$, ∞m ($e_{15}\neq0$, $e_{14}=0$);

2) 422, 622, $\infty 2$ ($e_{15}=0$, $e_{14}\neq 0$); 3) 4, 6, ∞ ($e_{15}\neq 0$, $e_{14}\neq 0$). Как видно из формул, в этих кристаллах существуют волны двух типов: волны с «обычным» пьезоэффектом и волны с существенно «поверхностным» пьезоэффектом. В первых ($e_{14}=0$, $e_{15}\neq 0$) пьезополе слагается из объемной составляющей, пропорциональной деформации в волне (первый член в выражении (1) для Ψ), и поверхностной составляющей (второй член в (1)). Объемная составляющая аналогична пьезополю в объемных волнах. Поверхностная составляющая вызвана связанными поверхностными зарядами, возникающими при деформации в поверхностной волне.

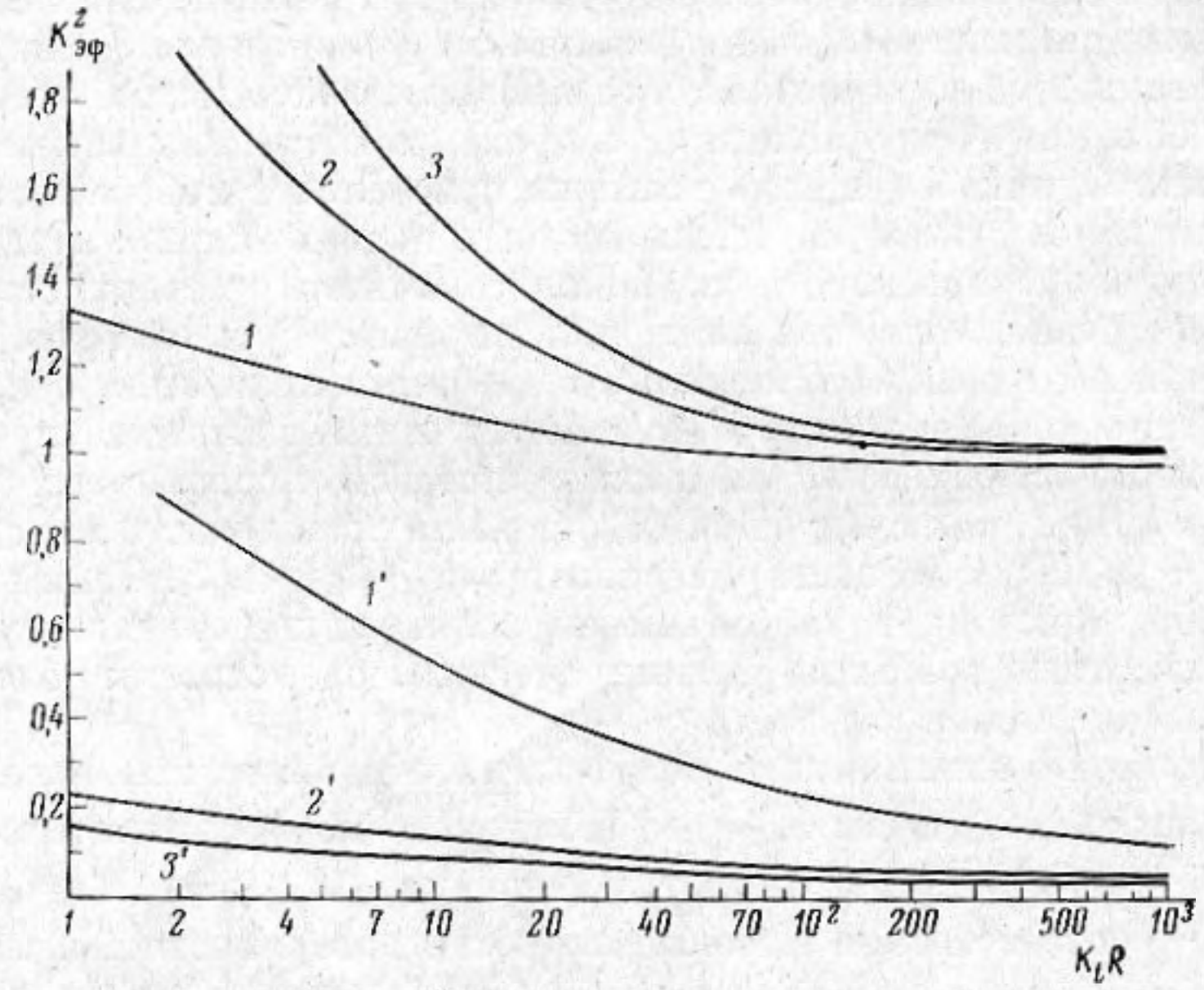
Пьезоэффект в волнах второго типа ($e_{15}=0$, $e_{14}\neq 0$) — это особый вид пьезоэффекта, который, насколько нам известно, применительно к упругим волнам в кристаллах до сих пор не рассматривался. Его воздействие на волну принципиально связано с наличием у кристалла границы. Для объемных волн в таких кристаллах пьезосвойства полностью отсутствуют, поскольку объемные деформации не сопровождаются появлением электрического поля. Однако смещение границы кристалла в поверхностной волне приводит к появлению на ней связанных поверхностных зарядов и соответственно электрического поля, локализованного у поверхности. Волна в принципе становится пьезоактивной, причем для заметной пьезоактивности необходима соизмеримость глубин локализации упругого и электрического полей в волне, а это как раз и имеет место в случае поперечных поверхностных волн на цилиндрической поверхности. Действительно, при $k_tR>1$, как следует из (1), глубина локализации механических смещений $\sim(k_tR)^{1/2}/k_t$, а электрического поля $\sim R/p\sim 1/k_t$. Таким образом, в целом ряде кристаллов, где объемные волны непьезоактивны, поперечные поверхностные волны на цилиндрических поверхностях обладают заметной пьезоактивностью.

Количественно влияние пьезоэффекта на поверхностные волны можно характеризовать квадратом $K^2_{\text{эфф}}$ эффективного коэффициента электромеханической связи, понимая под этим величину $K^2_{\text{эфф}}=2\Delta c/c=2(c_0-c)/c$, где c_0 и c — соответственно фазовые скорости поверхностной волны, рассчитанные с учетом и без учета пьезоэффекта. На фиг. 2 изображены зависимости $K^2_{\text{эфф}}(y)$ для нормальных волн трех первых номеров в кристаллах первой (кривые *1*, *2*, *3*) и второй (кривые *1'*, *2'*, *3'*) групп. К первой группе относятся твердые тела, у которых $e_{14}=0$, $e_{15}\neq 0$, ко второй — твердые тела с $e_{14}\neq 0$, $e_{15}=0$. Кривые нормированы по K_{15}^2 (*1*, *2*, *3*) и по K_{14}^2 (*1'*, *2'*, *3'*).

Из фиг. 2 видно, что пьезоэффект, как и в случае объемных волн, всегда увеличивает фазовую скорость поверхностной волны. Однако степень влияния пьезоэффекта на волну, т. е. величина $K^2_{\text{эфф}}$, зависит не только от вида волны и симметрии кристалла (как у объемных волн), но и очень существенно от кривизны поверхности. При увеличении кривизны $K^2_{\text{эфф}}$ возрастает и для кристаллов первой группы может заметно превышать K_{15}^2 — квадрат коэффициента электромеханической связи для объемных волн (это может быть полезно при возбуждении поверхностных волн и их электронном усилении). В целом $K^2_{\text{эфф}}$ для поверхностных волн в кристаллах первой группы существенно больше, чем $K^2_{\text{эфф}}$ для этих же волн в кристаллах второй группы. Основной причиной этого является различная глубина локализации электрического поля в волнах. В кристаллах первой группы (при объемном пьезоэффекте) электрическое поле в волне локализовано на той же глубине H, что и упругое (см. выражения (1)), т. е. $H\sim y^{1/2}/k_t$. В кристаллах второй группы (с поверхностным пьезоэффектом) электрическое поле в поверхностных волнах локализовано на глубинах $h\sim 1/k\sim 1/k_t$, а упругое — на глубинах $\sim H$. Поскольку обычно на практике $k_tR=y\gg 1$, то $H>h$, т. е. поток электрической энергии в волнах для кристаллов второй группы меньше, чем для первой, что и дает сравнительную

малость $K^2_{эфф}$. Можно показать, что отношения $(K^2_{эфф})^{I}/(K^2_{эфф})^{II}$ для указанных групп кристаллов имеют порядок H/h. При распрямлении цилиндрической поверхности ($k_tR\to\infty$) пьезосвойства у поверхностных волн в кристаллах второй группы пропадают ($h/H\to 0$), а в кристаллах первой группы значения $K^2_{эфф}$ стремятся с точностью до членов $\sim\delta^2$ к соответствующим значениям для плоских поперечных объемных волн [3].

Особенностью поверхностного пьезоэффекта в кристаллах второй группы является отсутствие в случае плоской границы ($k_tR=\infty$) корня дисперсионного уравнения, соответствующего волне Гуляева — Блюстейна [6], которая является пределом первой нормальной волны при $k_tR\to\infty$. Пер-



Фиг. 2. Зависимости квадратов коэффициентов электромеханической связи для трех первых нормальных волн от k_tR в кристаллах класса $6mm$ (кривые *1*, *2*, *3*) и класса 622 (кривые *1'*, *2'*, *3'*)

вая нормальная волна в этом случае переходит в объемную поперечную волну. Интересно, что имеется еще одно решение, описывающее экспоненциально нарастающую при удалении от границы $z=0$ (антиповерхностную) волну: $U\sim A\exp(ikx+K_{14}^2z)$. Соответствующий корень лежит на нижнем (нефизическом) листе поверхности Римана вблизи точки ветвления $k=k_t$. В задаче с источником при интегрировании по берегам разреза на верхнем листе комплексной плоскости k этот корень вносит свой вклад в интеграл, проявляющийся в том, что вдали от источника совокупность объемных волн образует упругое поле, возрастающее при удалении от границы (оттекание энергии от границы).

Отметим, наконец, что металлизация цилиндрической поверхности кристалла полностью устраняет влияние поверхностного пьезоэффекта на поверхностные волны в кристаллах второй группы.

Как видно из выражений (1)—(2), у поверхностных волн в твердых телах классов 4, 6, ∞ ($e_{14}\neq 0$, $e_{15}\neq 0$) (например, в кристалле $LiIO_3$) решение для электрического поля является суперпозицией решений, соответствующих обычному и существенно поверхностному пьезоэффекту. Принципиально новых особенностей это не вносит, однако некоторые новые свойства волн при этом появляются. Так, например, поскольку одна компонента электрического поля синфазна с полем упругих смещений и локализована в слое глубиной $H\sim y^{1/3}/k_t$, а другая компонента, локализо-

ванная в слое $h \sim 1/k_t$, сдвинута относительно первой по фазе, фаза электрического поля в волне меняется вдоль радиуса, что соответствует искривлению фронта волны с глубиной, (т. е. фронт волны не параллелен радиусу).

Одной из наиболее существенных особенностей, вносимых пьезоэффектом в распространение поперечных поверхностных волн, является анизотропия. Известно, что в кубических и тетрагональных кристаллах классов 23, $\bar{4}3m$, $\bar{4}2m$ (GaAs, InSb, $Bi_{12}GeO_{20}$ и др.) без учета пьезосвойств задача о распространении поперечных поверхностных волн по цилиндрической поверхности сводится к изотропному случаю [3]. Пьезоэффект в кристаллах этой группы вносит анизотропию, приводя к неоднородности условий распространения по направлению θ. Математически задача сильно усложняется.

В качестве иллюстрации мы приведем решение для нормальной волны первого номера. Считая, что образующая цилиндра параллельна кристаллографической оси [001], будем искать решение в виде волны, бегущей по θ, с медленно меняющимися угловым волновым числом $p(\theta)$ и амплитудами $u(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$, $\psi_0(r, \theta)$:

$$U(r, \theta),\ \Psi(r, \theta),\ \Psi_0(r, \theta) = u(r, \theta),\ \psi(r, \theta),\ \psi_0(r, \theta)\exp\left(i\int p(\theta)\,d\theta - i\omega t\right). \tag{6}$$

Производя вычисления, аналогичные приведенным в работе [4], получим следующее приближенное решение, которое при $e_{14} \to 0$ переходит в точное:

$$u(r, \theta) = A\left[J_{p_1}(kr) - \frac{4\pi e_{14}}{\varepsilon_{11}}\sin 2\theta\left(\frac{r}{R}\right)^s\right], \tag{7}$$

$$\psi(r, \theta) = A\alpha(\theta)\left[\left(\frac{r}{R}\right)^s - i\frac{2e_{14}}{c_{44}}e^{-2\theta i}J_{p_1}(kr)\right],$$

$$\psi_0(r, \theta) = A\frac{4\pi e_{14}}{\varepsilon_{11}+1}\left[i(\varepsilon_{11}+1)\cos 2\theta - \sin 2\theta\right]J_{p_1}(k_t R)\left(\frac{r}{R}\right)^{-s}$$

где

$$k = k_t\left\{1 - \frac{1}{2}K_{14}^2\left[\sin 2\theta\left(\frac{2p_1^2}{(k_t r)^2} - 1\right) + 2i\cos 2\theta\frac{p_1}{k_t r}f(r)\right]^2\right\},$$

$$s = p_1\left[1 + 2K_{14}^2\frac{p_1^2}{(k_t r)^2}e^{-4\theta i}\right], \quad f(r) = J_{p_1}'(k_t r)/J_{p_1}(k_t r),$$

$$\alpha(\theta) = \frac{4\pi e_{14}}{\varepsilon_{11}(\varepsilon_{11}+1)}(\sin 2\theta + i\varepsilon_{11}\cos 2\theta)J_{p_1}(k_t R).$$

Здесь везде, полагая $K_{14}^2 \ll 1$, мы пренебрегали членами $\sim O(K_{14}^4)$. Угловое волновое число p_1 является наибольшим корнем дисперсионного уравнения (2), где δ теперь имеет вид:

$$\delta = K_{14}^2\left[\frac{1}{\varepsilon_{11}+1} - \cos^2 2\theta + i\sin 4\theta\right].$$

Формулы (3), (4) для p_1 справедливы и в этом случае.

Из приведенных выражений видно, что пьезоэффект приводит к модуляции по θ всех параметров волны: амплитуды, волнового числа и глубины проникновения, делая их периодическими функциями θ с периодом π. Поскольку k и s имеют мнимые части, у волны вдоль радиуса будет меняться не только амплитуда, но и фаза. Следует обратить внимание и на комплексность величины p_1, мнимая часть которой описывает амплитудную модуляцию по θ. При распространении поперечной поверхностной волны вследствие неоднородности пьезоэлектрических постоянных по θ будет происходить генерация нормальных волн других номеров как в пря-

мом, так и в обратном направлениях. Вводя эффективный модуль упругости $c^{*}=c_{14}\left(1+\frac{1}{2}K_{14}^{2}\sin 2\theta\right)$ и используя результаты работы [4], можно оценить их амплитуды. При этом оказывается, что амплитуды поверхностных смещений в попутных волнах $\sim K_{14}^{2}/(k_tR)^{1/3}$, обратных $\sim K_{14}^{2}/k_tR$, причем амплитуды рассеянных волн осциллируют по θ без эффекта «накопления».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cho F., Hursinger B., Lowson R.* Surface waves circylating on piezoelectric substrates. Appl. Phys. Lett., 1971, *18*, 7, 298–301.
2. *Колдрен, Шоу.* Линии задержки на поверхностных акустических волнах с большими временами задержки. Тр. Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике (русск. пер.), 1976, *64*, 5, 30–44.
3. *Викторов И. А.* Поверхностные волны на цилиндрических поверхностях кристаллов. Акуст. ж., 1974, *20*, 2, 199–206.
4. *Викторов И. А., Пятаков П. А.* Поперечные поверхностные волны на цилиндрических поверхностях анизотропного твердого тела. Акуст. ж., 1977, *23*, 2, 234–241.
5. *Streifer W., Kodis R. D.* On the solution of a transcendental equation in scattering theory. Quart. Appl. Math., 1964, *21*, 4, 285–298.
6. *Гуляев Ю. В.* Поверхностные электрозвуковые волны в твердых телах. Письма в ЖЭТФ, 1969, *9*, 1, 63–65.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
8 апреля 1977 г.