АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 1

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ В ДВУХСЛОЙНЫХ ВОЛНОВОДАХ

Ф. Е. Григорьян

Рассмотрена дифракция нормальных волн в двухслойном волноводе на диафрагме, находящейся в одном из слоев. Для расчета матриц рассеяния применен метод ортогональных преобразований в пространстве собственных функций. Для проверки эффективности метода проведены численные эксперименты на ЭВМ ЕС-1020. Приведены некоторые зависимости коэффициентов прохождения от параметров среды, в которой находится диафрагма.

Рассмотрим слоисто-неоднородный волновод с диафрагмой, рассекающей один из слоев, основываясь в методическом плане на систематическом развитии одного замечания в работе [1] о целесообразности использования ортогональных систем функций с весовой функцией, учитывающей возможную особенность решения.

Расчетная схема задачи с привязкой к осям координат приведена на фиг. 1. Плоский волновод, образованный двумя абсолютно жесткими поверхностями $y=0$ и $y=a$, включает два слоя, каждый из которых характеризуется своими волновым сопротивлением и постоянной распространения. Толщина слоя с волновым сопротивлением W_1 и постоянной распространения γ_1 равна h. Диафрагма находится при $x=0$ и по высоте в точности равна h. Обозначим $a-h$ через l.

Поле слева от диафрагмы представим в виде вектора в бесконечномерном пространстве нормальных волн, идущих из $-\infty$. Тогда воздействие диафрагмы можно трактовать как преобразование одного вектора в другой (представляющий поле за диафрагмой) с помощью некоторой матрицы прохождения. Нашей целью является определение этой матрицы. Матрица отражения связана с матрицей прохождения элементарным образом.

Нетрудно показать, что нормальная волна номера j для двухслойного волновода имеет вид

$$\psi_j(x, y)=\varphi_j(y)e^{\pm\Gamma_j x}, \tag{1}$$

где

$$\varphi_j(y)=\begin{cases}\Lambda_j\cos\mu_j(y-a) & \text{при } h\leqslant y\leqslant a,\\ \cos\nu_j y & \text{при } 0\leqslant y\leqslant h.\end{cases}$$

Здесь $\mu_j=\sqrt{\Gamma_j^2-\gamma_0^2}$, $\nu_j=\sqrt{\Gamma_j^2-\gamma_1^2}$. Множитель Λ_j обеспечивает обычные условия непрерывности для звукового давления и нормальной составляющей колебательной скорости, при этом

$$\Lambda_j=\frac{W_1\gamma_1\cos\nu_j h}{W_0\gamma_0\cos\mu_j l}=\frac{-\nu_j\sin\nu_j h}{\mu_j\sin\mu_j l} \tag{2}$$

Выражение (2) одновременно является дисперсионным уравнением задачи, т. е. уравнением для определения Γ_j.

Собственные функции $\psi_j(x, y)$ ортогональны по переменной y на отрезке 0, a с разрывной весовой функцией

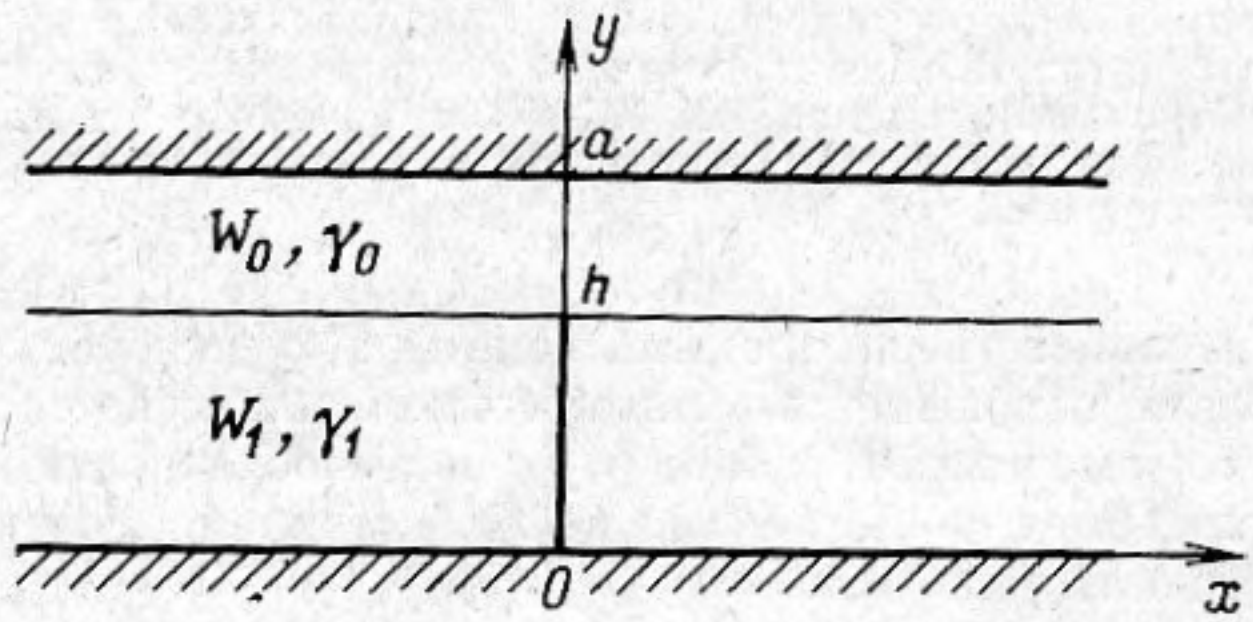
$$G(y)=\begin{cases} W_0\gamma_0 & \text{при} \quad h<y\leqslant a, \\ W_1\gamma_1 & \text{при} \quad 0\leqslant y<h. \end{cases}$$

Пространство этих функций не гильбертово, так как скалярное произведение в нем должно быть определено как

$$\int_0^a \varphi_j(y)\varphi_i(y)G(y)\,dy,$$

т. е. без комплексного сопряжения, что существенно, так как все функции здесь комплексные.

При введении в рассмотрение диафрагмы возникает необходимость удовлетворить некоторым дополнительным граничным условиям, которым



Фиг. 1. Схема двухслойного волновода с диафрагмой

не удовлетворяет ни одна нормальная волна, взятая в отдельности. Эти граничные условия включают условие непрерывности звукового давления в апертуре

$$p^-(x, y)\,|_{x=-0}=p^+(x, y)\,|_{x=+0} \text{ при } h<y\leqslant a, \tag{3}$$

а также условие непрерывности нормальной составляющей колебательной скорости в плоскости диафрагмы:

$$v_x^-(x, y)\,|_{x=-0}=v_x^+(x, y)\,|_{x=+0}=v_x(y), \tag{4}$$

где $v_x(y)$ может быть представлена как

$$\sum_{i=0}^{\infty} X_i\varphi_i(y).$$

Здесь и далее функции с верхними индексами $-$, $+$ описывают поля слева и справа от диафрагмы соответственно. Дополнительно есть условие равенства нулю нормальной к диафрагме составляющей колебательной скорости, т. е.

$$v_x(y)=\begin{cases} v_x(y) & \text{при} \quad h<y\leqslant a, \\ 0 & \text{при} \quad 0\leqslant y\leqslant h. \end{cases} \tag{5}$$

Легко видеть, что амплитуды X_i полностью определяют решение данной задачи. С помощью условий (3)—(5) несложно составить бесконечную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных X_i. Однако специфика данного класса задач состоит в том, что такой прямой путь не приводит к эффективному решению задачи. Ряды здесь оказываются неравномерно сходящимися, получаемая для X_i система уравнений сходится

чрезвычайно медленно и для вычислений непригодна. Анализ подобного рода задач показал [2, 3], что неравномерная сходимость рядов, выражающих решение в плоскости $x=0$, обусловлена тем, что общее решение задачи, являющееся решением уравнения Гельмгольца при описанных выше граничных условиях, содержит особенности решения соответственной задачи Лапласа. В то же время переход от решения уравнения Лапласа при данных граничных условиях к решению уравнения Гельмгольца не привносит дополнительных особенностей, а сводится к некоторым плавным «динамическим поправкам».

Известно [1], что при нормальном обтекании тонкой полосы шириной $2h$ потоком идеальной жидкости вблизи кромки скорость имеет при $y>0$ особенность типа $1/\sqrt{y-h}$, причем $y=0$ находится в середине полосы. Поэтому целесообразно представить $v_x(y)$ на (h, a) в виде произведения функции, содержащей эту особенность, на другую функцию, представленную в виде ряда по ортогональным на (h, a) функциям, для которых функция с особенностью весовая. Такой системой ортогональных функций является система полиномов Чебышева первого рода, четных номеров. В свете сказанного выше для $v_x(y)$ в апертуре было выбрано разложение

$$v_x(y)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n T_{2n}(t) \quad \text{при} \quad h<y\leqslant a, \tag{6}$$

где $t=(a-y)/l$. Оказывается, что для α_n можно уже получить чрезвычайно быстро сходящуюся систему уравнений, устойчивую по всем параметрам.

Поскольку в конечном итоге необходимо знать амплитуды нормальных волн волновода, установим сразу связь между ними и системой коэффициентов α_n. Для этого разложим выражение (5) с учетом формулы (6) по собственным функциям $\varphi_m(y)$ в промежутке $(0, a)$ с весом $G(y)$. Тогда получим выражение для элементов A_{mn} матрицы линейного преобразования

$$X_m=\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\alpha_n, \tag{7}$$

которое, опуская несложные преобразования, можно представить в следующем виде:

$$A_{mn}=W_0\lambda_0 l\Lambda_m\int_0\frac{T_{2n}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\cos\mu_m lt\,dt/N_m, \tag{8}$$

где

$$N_m=\int_0^a\varphi_m^2(y)G(y)\,dy. \tag{9}$$

Интеграл в формуле (8) оказывается одним из представлений функций Бесселя:

$$\int_0^1 T_{2n}(t)\cos zt\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=(-1)^n\frac{\pi}{2}J_{2n}(z). \tag{10}$$

Это выражение легко получить из одного из основных интегральных представлений функций Бесселя [4]

$$\pi J_{2n}(z)=2\int_0^{\pi/2}\cos(z\sin\varphi)\cos(2n\varphi)\,d\varphi$$

путем подстановки $\tau=\sin\varphi$. Поэтому далее мы будем везде писать

$$A_{mn}=(-1)^n\pi W_0\gamma_0 l\Lambda_m J_{2n}(\mu_m l)/2N_m. \tag{11}$$

Из совокупности условий, налагаемых на решение в плоскости диафрагмы, следует некоторая система уравнений для α_n; выведем ее. Для этого обозначим поле слева от диафрагмы через $\Psi^-(x, y)$, а справа $\Psi^+(x, y)$. Условимся, что падающая волна — одна из нормальных волн волновода с единичной амплитудой. Тогда

$$\Psi^-(x, y)=\sum_{m=0}^{\infty} Y_m^-\varphi_m(y)e^{\Gamma_m x}+\varphi_i(y)e^{-\Gamma_i x}.$$

Или, несколько иначе, используя символ Кронекера δ_{mi},

$$\Psi^-(x, y)=\sum_{m=0}^{\infty}(Y_m^-e^{\Gamma_m x}+\delta_{mi}e^{-\Gamma_i x})\varphi_m(y). \tag{12}$$

Потенциал справа от диафрагмы состоит по условию на бесконечности только из уходящей (прошедшей) волны:

$$\Psi^+(x, y)=\sum_{m=0}^{\infty} Y_m^+\varphi_m(y)e^{-\Gamma_m x}. \tag{13}$$

Из условия (3) следует также и непрерывность потенциала

$$\Psi^-(x, y)=\Psi^+(x, y) \text{ при } h<y\leqslant a,\ x=0.$$

Откуда следует, что

$$\sum_{m=0}^{\infty}\delta Y_m\varphi_m(y)=0 \quad \text{при} \quad h<y\leqslant a, \tag{14}$$

где $\delta Y_m=Y_m^-+\delta_{mi}-Y_m^+$.

Поля аксиальных скоростей

$$v_x^-(x, y)=\sum_{m=0}^{\infty}(-\Gamma_m Y_m^-e^{\Gamma_m x}+\Gamma_i\delta_{mi}e^{-\Gamma_i x})\varphi_m(y),$$

(15)

$$v_x^+(x, y)=\sum_{m=0}^{\infty}\Gamma_m Y_m^+\varphi_m(y)e^{-\Gamma_m x}.$$

Аксиальная колебательная скорость непрерывна при $x=0$ в промежутке $(0, a)$, поэтому

$$\Gamma_m Y_m^+=-\Gamma_m Y_m^-+\Gamma_i\delta_{mi}=X_m.$$

Теперь непосредственно видно, что

$$\delta Y_m=2(\delta_{mi}-X_m/\Gamma_m). \tag{16}$$

Переходя в формуле (14) к переменной t, разлагая с соответствующим весом левую часть (14) по системе полиномов Чебышева $T_{2j}(t)$ в промежутке (0, 1) и подставляя затем выражение (7) для X_m, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{jn}\beta_n=J_{2j}(\mu_i l), \quad j=0, 1, 2\ldots, \tag{17}$$

где

$$B_{jn}=W_0\gamma_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Lambda_m^2}{\Gamma_m N_m}J_{2j}(\mu_m l)J_{2n}(\mu_m l), \tag{18}$$

$$\beta_n=(-1)^n\pi l\alpha_n/2\Lambda_i. \tag{19}$$

Таким образом, задача свелась к решению системы уравнений (17).

Перейдем к рассмотрению вопроса о вычислении коэффициентов B_{jn}. Обозначим

$$\varepsilon_m=W_0\gamma_0\frac{\Lambda_m^2 a}{N_m},\quad b_m=\frac{\varepsilon_m}{\Gamma_m a}J_{2j}(\mu_m l)J_{2n}(\mu_m l). \tag{20}$$

Преобразования, с использованием формулы (9), позволяют получить $\varepsilon_m=1/d_m$,

$$d_m=\frac{l}{2a}+\frac{\overline{W_1\gamma_1}}{\Lambda_m^2}\frac{h}{2a}+\frac{1}{2}\frac{\sin 2\mu_m l}{2\mu_m a}+\frac{1}{2}\frac{\overline{W_1\gamma_1}}{\Lambda_m^2}\frac{\sin 2\nu_m h}{2\nu_m a}, \tag{21}$$

где $\overline{W_1\gamma_1}=W_1\gamma_1/W_0\gamma_0$.

Напишем теперь формулу (18) в следующем виде:

$$B_{jn}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m}{\Gamma_m a}J_{2j}(\mu_m l)J_{2n}(\mu_m l). \tag{22}$$

Все комплексные векторы, входящие в выражение (22), зависят от m только через Γ_m (или через μ_m, поскольку μ_m и Γ_m однозначно связаны).

Если провести анализ асимптотического поведения решений уравнения (2) при больших m, то оказывается, что в пределе

$$\mu_m=\frac{\pi m}{a}+\varkappa_m, \tag{23}$$

где $\varkappa_m$ — малая величина, колеблющаяся около нуля, причем здесь особо выделяется случай, когда $l/a=r/s$, где r/s — рациональная несократимая дробь. В этом случае

$$\varkappa_m=\varkappa_{m+s},$$

т. е. $\varkappa_m$ колеблется с определенным циклом, могущим заключать 3, 4, 5 и т. д. каких-то определенных значений. Случай $s=2$ является исключительным, для него $\varkappa_m=0$.

Если использовать асимптотику для функций Бесселя при больших значениях аргумента, то возможно разложить асимптотическое выражение члена ряда (22) по степеням $1/m$. Тогда остаточный ряд для B_{jn} можно представить в виде суммы рядов с разной быстротой убывания. Члены наименее быстро сходящегося ряда, определяющего общую сходимость, будут иметь вид

$$\beta_m=Q_m/m^2=(C+v_m)/m^2, \tag{24}$$

где C — постоянная, v_m — циклическая переменная, цикл которой соответствует циклу $\varkappa_m$, т. е. $v_m=v_{m+s}$ и среднее значение — ноль.

Быстрота сходимости ряда, определяемого числителем C, явно недостаточна, ибо ошибка при отбрасывании остатка после суммирования L членов будет иметь порядок C/L. Поэтому целесообразно вычислить предварительно суммы вида

$$S_{j,\,n}=B_{j,\,n-1}+B_{j,\,n},\ n=1,\ 2,\ 3... \tag{25}$$

Учитывая основную рекуррентную формулу для функций Бесселя, легко видеть, что асимптотическая сходимость рядов для $S_{j,\,n}$ на порядок выше, чем просто для $B_{j,\,n}$. Выражение (25) следует рассматривать здесь как

рекуррентную формулу для вычисления $B_{j,n}$ по предварительно вычисленным $S_{j,n}$ и $B_{j,n-1}$. Поскольку матрица $\{B_{jn}\}$ симметрична, то возможно, зная B_{00}, с помощью формулы (25) вычислить все остальные элементы.

Для усиления сходимости ряда для B_{00} использовалось тождество

$$B_{00}=B_{00}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C}{m^2}+\frac{C\pi^2}{6}. \tag{26}$$

При этом из ряда

$$B_{00}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m}{\Gamma_m a}J_0^2(\mu_m l) \tag{27}$$

вычитается наименее быстро сходящийся монотонно убывающий ряд.

Поскольку среднее на цикле изменение v_m равно нулю, C может быть вычислено как

$$C=\frac{1}{s}\sum_{m=L-s+1}^{m=L}Q_m.$$

Величина L выбирается достаточно большой из соображений обеспечения требуемой точности вычислений. Используя асимптотику для $1/\mu_m$, $1/\Gamma_m a$ и $J_0(\mu_m l)$, легко показать, что

$$Q_m=\frac{a}{\pi^3 l}\varepsilon_m(1+\sin 2\mu_m l).$$

Применяя приведенные выше способы усиления сходимости, можно определить численные значения элементов матрицы системы (17). Решив систему (17) тем или иным методом, найдем β_n или с помощью (19) величины α_n. С помощью формулы (7) осуществляется переход к X_m. Набор векторов $\{X_m\}$ для различных номеров i падающих волн единичной амплитуды определит матрицу прохождения $\{T_{im}\}$. Соотношения между амплитудами прошедших X_m^+ и отраженных волн X_m^-, а также между X_m^+ и X_m имеют вид

$$X_m^-=X_m^+-\Gamma_m\delta_{mi},\ X_m^+=X_m.$$

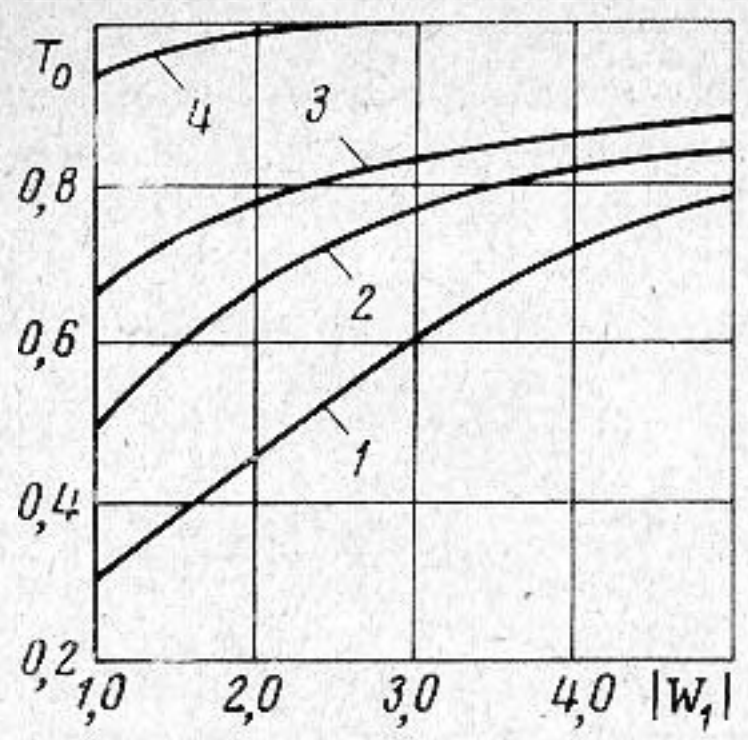
Для проверки быстроты сходимости основных предельных соотношений метода алгоритм был реализован на ЭВМ типа ЕС-1020, язык программы — Фортран IV. При программировании вычисления функций Бесселя от комплексного аргумента z наиболее эффективным при $|z|>1$ оказался метод Голдстейна — Тэйлера [5], видоизмененный нами для случая комплексного аргумента. При $|z|\leqslant 1$ использовался отрезок разложения в степенной ряд. Для решения последовательности систем (17) различных рангов использовался итеративный метод.

В пределах проведенных численных экспериментов матрица 3×3 уже обеспечивала вычисление амплитуд прошедших и отраженных нормальных волн с точностью порядка 0,1% от амплитуды падающей волны. Это подтверждает и оценка возможной поправки при увеличении ранга.

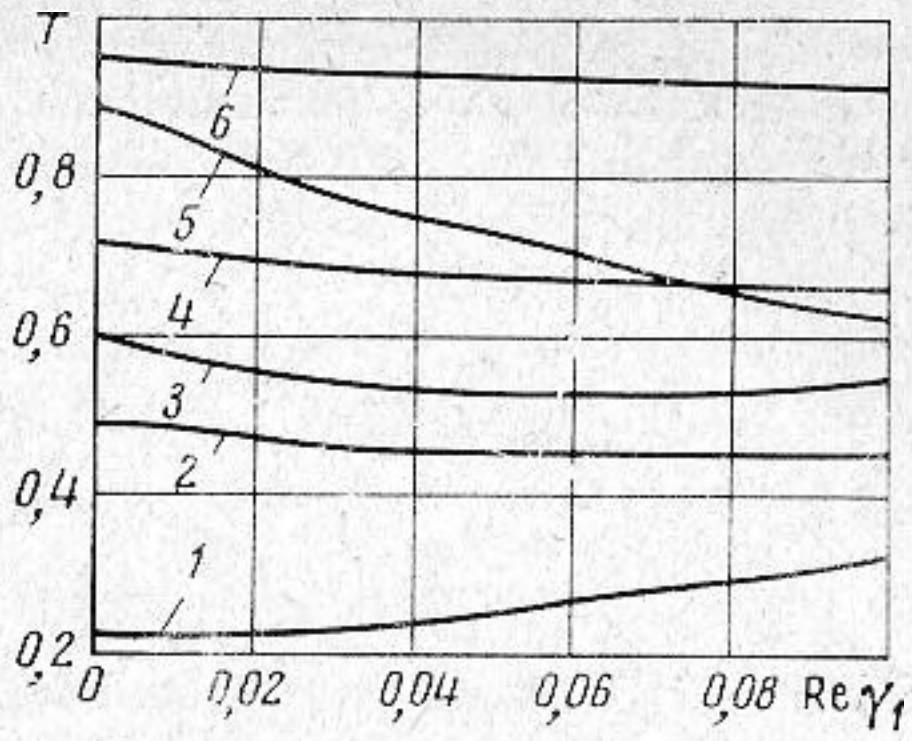
На основании интегральной оценки остатка ряда (27) было выбрано $L=36$ исходя из того, чтобы погрешность от вычисления коэффициентов заведомо не сказывалась на основной погрешности метода, обусловленной редукцией матриц.

Общее количество инструкций Фортрана в программе было около 280, время счета для первых трех типов падающих волн с полной выдачей на печать всех промежуточных комплексных векторов и матриц составляло около 1 *мин* 12 *сек*.

В качестве иллюстраций приведем некоторые из полученных зависимостей. На фиг. 2 приведены зависимости коэффициента прохождения ос-



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимости, характеризующие изменение коэффициента прохождения основной нормальной волны при возрастании волнового сопротивления нижнего слоя: *1, 2* – $a=8$ *см*; *3, 4* – $a=4$ *см*; *1, 3* – $l/a=0{,}25$; *2, 4* – $l/a=0{,}5$

Фиг. 3. Зависимости коэффициентов прохождения от величины постоянной затухания в нижнем слое: *5* – T_1 (коэффициент прохождения первой высшей моды), остальные кривые относятся к T_0; *1, 3, 5* – $a=8$ *см*; *2* – $a=6$ *см*; *4, 6* – $a=4$ *см*; *1, 2, 4, 5* – $l/a=0{,}25$; *3, 6* – $l/a=0{,}5$

новной нормальной волны T_0 от величины $|W_1|$. Акустические параметры слоев: $W_0=1$, $\gamma_0=i\cdot 0{,}37$ *см*$^{-1}$, фазовый угол W_1 был выбран равным 10°, $\gamma_1=(0{,}1+i0{,}4)$ *см*$^{-1}$.

На фиг. 3 приведены зависимости коэффициентов прохождения от величины постоянной затухания в среде, в которую погружена диафрагма. Материальные константы волновода: $W_0=1$, $\gamma_0=i\cdot 0{,}37$ *см*$^{-1}$, $W_1=1$, $\mathrm{Im}\gamma_1=$ $=i\cdot 0{,}37$ *см*$^{-1}$.

Зависимость $T_0(\mathrm{Re}\gamma_1)$ выражена весьма слабо и неоднозначна. Наблюдается убывание, возрастание или зависимость со слабо выраженным минимумом (кривая *3*). Здесь интересно также сопоставить зависимости $T_0(\mathrm{Re}\gamma_1)$ (кривая *1*) и $T_1(\mathrm{Re}\gamma_1)$ (кривая *5*), принадлежащие одному и тому же волноводу, когда прозрачность для основной моды возрастает, а для первой высшей моды резко падает.

Значения параметров были выбраны специально такими, чтобы при $\mathrm{Re}\gamma_1\to 0$ реализовался случай волновода с однородным заполнением. Это давало возможность иметь некоторый дополнительный контроль путем сопоставления с данными, имеющимися в работах [2, 3].

Описанный метод расчета матриц прохождения и отражения для двухслойного волновода с диафрагмой обладает сходимостью, достаточно хорошей для практических вычислений.

Автор благодарен В. И. Зинченко за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морз Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. *Вайнштейн Л. А.* Теория дифракции и метод факторизации. М., «Советское радио», 1966.
3. *Шестопалов В. П.* Метод задачи Римана – Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Изд-во Харьковского гос. ун-та, 1971.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1974.
5. Справочник программиста (под ред. Л. А. Оганесяна). Л., Судпромгиз, 1963.

Научно-производственное объединение
по исследованию и проектированию
энергетического оборудования (ЦКТИ),
Ленинград

Поступила
18 января 1977 г.