

УДК 534.231.1:537.312.62

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА
В ТВЕРДЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

Г. Клуге, Ф. Рудат

Рассчитано распространение звуковых волн в твердом сверхпроводнике при наличии эффекта Мейсснера. Исходными являются нестационарные уравнения Гинзбурга — Ландау и уравнения линейной теории упругости. В них содержатся как эффекты ΔV и ΔC , так и скачок модулей упругости при переходе температуры через точку T_c . Подробно анализируются скорость распространения и затухание звука. Для продольных звуковых волн коэффициент поглощения на низких частотах квадратично зависит от частоты, при высоких частотах он возрастает по более медленному закону. Для поперечных звуковых волн в изотропных твердых телах и тетрагональных кристаллах затухание отсутствует, поскольку единственный учтенный необратимый процесс — это релаксация параметра порядка. Рассчитанная зависимость коэффициента затухания от частоты и температурная зависимость скорости звука хорошо совпадают с экспериментальными результатами.

Чтобы описать зависящие от времени явления в сверхпроводниках, например поведение сопротивления, связанное с движением вихревых нитей, было проведено много обобщений уравнений Гинзбурга — Ландау [1—14]. Одновременно в работах [15—18] теория Гинзбурга — Ландау была обобщена на твердые сверхпроводники. При этом стремились в первую очередь достичь лучшего понимания механизма Пиннинга. Комбинируя оба обобщения, можно рассматривать феноменологически такие явления, как, например, влияние нерегулярностей строения кристалла на указанное поведение сопротивления [14]. Ниже мы рассматриваем распространение звука в твердых сверхпроводниках, при этом ограничиваемся рассмотрением сверхпроводников в состоянии, характеризующемся наличием эффекта Мейсснера. Материальные константы, которые в обобщении теории Гинзбурга — Ландау [15—18] описывают взаимосвязь упругостных свойств вещества со сверхпроводящими, входят в выражения для скорости звука и константы затухания и должны определяться на основании экспериментальных результатов. По этой причине интересно провести феноменологическое рассмотрение распространения звука в таких сверхпроводниках.

Напишем исходные уравнения для нашей задачи, затем выберем зависимость связывающих величин от деформации таким образом, чтобы все модули упругости при переходе из нормального состояния в сверхпроводящее претерпевали скачок.

Для описания сверхпроводника воспользуемся нестационарными уравнениями Гинзбурга — Ландау, выведенными Шмидом [6]. Упругостные свойства учтем аналогично тому, как это сделал Каммерер [18] для стационарного случая. Используемая теория упругости является линейной; сверхпроводящее состояние изменяет модули упругости материала (ΔC -эффект) и вызывает спонтанные деформации (ΔV -эффект). Скачок модулей упругости при переходе температуры скачка T_c не идентичен с эффектом ΔC , который описывает лишь изменение модулей упругости в самом сверхпроводящем состоянии.

Исходные уравнения состоят из нестационарных уравнений Гинзбурга — Ландау

$$(1) \quad \gamma \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} - 2ie\bar{\Phi} \right) \Psi = \frac{1}{2m} \left(\hbar \partial_i + \frac{2ie}{c} A_i \right) \left(\hbar \partial_i + \frac{2ie}{c} A_i \right) \Psi + \\ + \alpha(T, \epsilon_{rs}) \Psi - \beta(\epsilon_{rs}) |\Psi|^2 \Psi,$$

уравнений Максвелла

$$(2) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\partial_i \Phi) + \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m = \frac{4\pi}{c} (j_i^n + j_i^s),$$

$$(3) \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\partial_i A_i) - \partial_i \partial_i \Phi = 4\pi \rho$$

и уравнений движения теории упругости

$$(4) \quad \partial_j \tau_{ij} = \rho_0 \frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2}.$$

Здесь Ψ — параметр порядка, а τ_{ij} — тензор механического напряжения. Плотность тока сверхпроводимости j_i^s , плотность нормального тока j_i^n и плотность зарядов ρ заданы выражениями

$$(5) \quad j_i^s = \frac{ie\hbar}{m} (\Psi^* \partial_i \Psi - \Psi \partial_i \Psi^*) - \frac{4e^2}{mc} A_i |\Psi|^2,$$

$$(6) \quad j_i^n = -\sigma \left(\frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \partial_i \bar{\Phi} \right),$$

$$(7) \quad \rho = -\frac{1}{4\pi} \lambda_D^{-2} (\Phi - \bar{\Phi}) + \frac{e}{2\epsilon_F} \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \partial_i |\Psi|^2 + \\ + \frac{3}{\epsilon_F \chi} \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) + 2e\bar{\Phi} |\Psi|^2 \right]$$

($\bar{\Phi}$ — эффективный электрический потенциал, λ_D — дебаевский радиус экранирования, ϵ_F — энергия Ферми, см. также работы [6], χ определено в работе [19]).

Обобщенный закон Гука гласит

$$(8) \quad \tau_{ij} = C_{ijkl}^n \epsilon_{kl} - \frac{\partial \alpha(T, \epsilon_{rs})}{\partial \epsilon_{ij}} |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \beta(\epsilon_{rs})}{\partial \epsilon_{ij}} |\Psi|^4,$$

где C_{ijkl}^n — тензор модулей упругости в состоянии с нормальной проводимостью. Тензор деформаций должен строиться из поля смещения s_i

$$(9) \quad \epsilon_{kl} = 1/2 (\partial_k s_l + \partial_l s_k).$$

Система уравнений (1) — (4) по сравнению с системой, приведенной Каммерером [18] для стационарного случая, упрощена с двух точек зрения. Величины $\alpha(T, \epsilon_{rs})$ и $\beta(\epsilon_{rs})$, связывающие упругостные и сверхпроводящие свойства в уравнениях (1) и (8), содержат константы связи только в первой степени, членами более высокого порядка мы пренебрегли. Кроме того, введение поля смещения, согласно уравнению (9), представляет собой дальнейшее упрощение. Оно означает, что в условиях совместности теории упругости не учитываются спонтанные деформации, вызванные сверхпроводимостью. Специальный вид величин $\alpha(T, \epsilon_{rs})$ и $\beta(\epsilon_{rs})$ мы приведем ниже.

Входящая в наши уравнения плотность свободной энергии имеет вид

$$(10) \quad \tilde{f}_s = \tilde{f}_0 - \alpha(T, \varepsilon_{rs}) |\Psi|^2 + \frac{1}{2} \beta(\varepsilon_{rs}) |\Psi|^4 + \\ + \frac{1}{2m} \left| \left(\hbar \partial_i + \frac{2ie}{c} A_i \right) \Psi \right|^2 + \frac{1}{8\pi} H_i H_i + \frac{1}{2} C_{ijkl}^n \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}.$$

Для величины $\alpha(T, \varepsilon_{rs})$ мы берем [20]

$$(11) \quad \alpha(T, \varepsilon_{rs}) = \\ = [\alpha_{00}^2 (T_c - T)^2 + \alpha_{00} (T_c - T) (c_{ij} \varepsilon_{ij} + c_{ijmn} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn}) + a_{ijmn}^0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn}]^{1/2}.$$

Эта подстановка обеспечивает скачок модулей упругости. Она соответствует разложению функции $\alpha(T, \varepsilon_{rs})^2$ по степеням $(T_c - T)$ и ε_{ij} . При этом следует учесть, что уравнение (11) для исчезающей деформации переходит в $\alpha_{00}(T_c - T)$ в соответствии с [1]. Для скачка модулей упругости мы получим

$$(12) \quad \Delta C_{ijkl} = \frac{\partial^2 (\tilde{f}_s - \tilde{f}_n)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \Big|_{T=T_c(\varepsilon_{rs})} = \frac{a_{ijkl}^0}{\beta(\varepsilon_{rs})} + o(\varepsilon_{rs})$$

В точке $T = T_c(\varepsilon_{rs})$ нужно взять вторую производную по деформации, так как в твердых сверхпроводниках температура скачка зависит от состояния деформации [21, 22]. Функцию $\beta(\varepsilon_{rs})$ мы выбираем, как обычно [15, 17]:

$$(13) \quad \beta(\varepsilon_{rs}) = \beta_0 (1 + b_{ij} \varepsilon_{ij} + 1/2 b_{ijmn} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn});$$

a_{ijkl}^0 в уравнении (11) описывает, таким образом, скачок модулей упругости, тензоры c_{ij} и b_{ij} — ΔV -эффект, а c_{ijmn} и b_{ijmn} — ΔC -эффект.

Прежде чем линеаризовать наши уравнения, подвергнем их калибровочному преобразованию

$$(14) \quad \Psi = \Psi' \exp(i\varphi), \quad \Phi = \Phi' + \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ A_i = A_i' - \frac{\hbar c}{2e} \partial_i \varphi, \quad \bar{\Phi} = \bar{\Phi}' + \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Тем самым мы сведем (1) — (4) к уравнениям, содержащим только действительную величину Ψ' . Если мы опустим штрихи у вновь введенных величин и разложим уравнение (1) на действительную и мнимую части, то с учетом соотношений (5) — (8), (11) и (13) мы получим систему уравнений

$$(15) \quad \gamma \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \partial_i \Psi - \frac{2e^2}{mc^2} A_i^2 \Psi + \alpha(T, \varepsilon_{rs}) \Psi - \beta(\varepsilon_{rs}) \Psi^3,$$

$$(16) \quad -\gamma \bar{\Phi} \Psi = \frac{\hbar}{2mc} [(\partial_i A_i) \Psi + 2A_i (\partial_i \Psi)],$$

$$(17) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\partial_i \Phi) + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m = \\ = \frac{4\pi}{c} \left[-\sigma \left(\frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \partial_i \bar{\Phi} \right) - \frac{4e^2}{mc} A_i \Psi^2 \right],$$

$$(18) \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\partial_i A_i) - \partial_i \partial_i \Phi = \\ = -\lambda_D^{-2} (\Phi - \bar{\Phi}) + \frac{4\pi e}{2\varepsilon_F} \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \partial_i \Psi^2 + \frac{24\pi e}{\varepsilon_F \chi} \bar{\Phi} \Psi^2,$$

$$(19) \quad C_{ijkl}^n \partial_j \varepsilon_{kl} - \partial_j \left[\frac{1}{2} \alpha (T, \varepsilon_{rs})^{-1} (2a_{ijmn}^0 \varepsilon_{mn} + \right. \\ \left. + \alpha_{00} (T_c - T) (c_{ij} + 2c_{ijmn} \varepsilon_{mn})) \Psi^2 \right] + \\ \left. + \partial_j \left[\frac{1}{2} \beta_0 (b_{ij} + b_{ijmn} \varepsilon_{mn}) \Psi^4 \right] = \rho_0 \frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2}.$$

Так как далее мы будем рассматривать плоские волны с малыми амплитудами, то можно линеаризировать нашу систему уравнений. Для этого примем

$$(20) \quad \Psi = \Psi_0 + \Psi^+, \quad A_i = A_{i0} + A_i^+.$$

Символы с индексом нуль — равновесные значения соответственных величин; обозначенные крестом символы — малые отклонения от этих значений. В качестве равновесного состояния примем состояние с эффектом Мейсснера в отсутствие деформаций. Тогда равновесные значения выражаются следующим образом:

$$(21) \quad \Psi_0^2 = \alpha_{00} (T_c - T) / \beta_0, \quad A_{i0} = \Phi_0 = \tilde{\Phi}_0 = \varepsilon_{ij}^0 = 0,$$

т. е. при равновесии должны отсутствовать электромагнитные поля и деформации. Подставим выражение (20) в систему уравнений (15)–(19) и пренебрежем членами второго и более высокого порядков у величин, обозначенных крестом. Далее ограничимся случаем упрягоизотропной среды. Тогда тензор $C_{ijk_l}^n$ примет вид

$$(22) \quad C_{ijkl}^n = \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl},$$

где λ и μ — модули Ламэ. Для остальных вещественных тензоров принимаем

$$(23) \quad a_{ijkl}^0 = a_1^0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + a_2^0 \delta_{ij} \delta_{kl},$$

$$(24) \quad b_{ij} = b \delta_{ij}.$$

Для тензоров b_{ijkl} , c_{ijkl} и c_{ij} справедливы аналогичные соотношения. Введем также обозначения

$$(25) \quad \tilde{\mu} = \mu - \frac{a_1^0}{\beta_0} - \frac{\alpha_{00} (T_c - T)}{\beta_0} c_1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_{00}^2 (T_c - T)^2}{\beta_0} b_1,$$

$$(26) \quad \tilde{\lambda} = \lambda - \frac{a_2^0}{\beta_0} - \frac{\alpha_{00} (T_c - T)}{\beta_0} c_2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_{00}^2 (T_c - T)^2}{\beta_0} b_2,$$

$$(27) \quad d = (\alpha_{00} (T_c - T) b^{-1/2} c) \Psi_0.$$

Тогда получим линеаризованную систему уравнений

$$(28) \quad \gamma \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^+ = \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \partial_i \Psi^+ - d \partial_i s_i - 2\alpha_{00} (T_c - T) \Psi^+,$$

$$(29) \quad -\gamma \tilde{\Phi}^+ = \frac{\hbar}{2mc} \partial_i A_i^+,$$

$$(30) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_i^+}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \partial_i \frac{\partial \Phi^+}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m^+ = \\ = -\frac{4\pi\sigma}{c} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial A_i^+}{\partial t} + \partial_i \tilde{\Phi}^+ \right) - \frac{16\pi e^2 \Psi_0^2}{mc^2} A_i^+,$$

$$(31) \quad -\frac{1}{c} \partial_i \frac{\partial A_i^+}{\partial t} - \partial_i \partial_i \Phi^+ =$$

$$= -\lambda_D^{-2} (\Phi^+ - \bar{\Phi}^+) + \frac{2\pi e \hbar^2 \Psi_0}{\epsilon_F m} \partial_i \partial_i \Psi^+ + \frac{24\pi e \Psi_0^2}{\epsilon_F \chi} \bar{\Phi}^+,$$

$$(32) \quad \bar{\mu} \partial_j \partial_j s_i + (\bar{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_i \partial_j s_j + 2d \partial_i \Psi^+ = \rho_0 \frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2}.$$

Для случая малых величин Ψ^+ , A_i^+ , Φ^+ , $\bar{\Phi}^+$ и s_i решение ищем в виде плоских волн, которые распространяются в направлении оси x :

$$(33) \quad \Psi^+ = \hat{\Psi} \exp [i(kx - \omega t)] \dots$$

Такой подстановкой линейная система дифференциальных уравнений (28)–(32) преобразуется в алгебраическую систему уравнений для амплитуд $\hat{\Psi}$, \hat{A}_i , $\hat{\Phi}$, $\hat{\bar{\Phi}}$ и \hat{s}_i . Дисперсионные соотношения, которые мы получаем из равенства нулю детерминанта коэффициентов этой системы уравнений, имеют структуру

$$(34) \quad A^2 B C^2 D = 0,$$

где

$$(35) \quad A = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} i\omega + \frac{16\pi e^2 \Psi_0^2}{mc^2},$$

$$(36) \quad B = -\gamma \frac{k^2 \omega^2}{c^2} + \left(\frac{24\pi e \Psi_0^2}{\epsilon_F \chi} + \frac{1}{\lambda_D^2} \right) \frac{\hbar}{2mc^2} i\omega k^2 -$$

$$-\gamma \left(-\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} i\omega + \frac{16\pi e^2 \Psi_0^2}{mc^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_D^2} + k^2 \right) -$$

$$-\frac{4\pi\sigma \hbar}{2mc^2} k^2 \left(\frac{1}{\lambda_D^2} + k^2 \right),$$

$$(37) \quad C = \rho_0 \omega^2 - \bar{\mu} k^2,$$

$$(38) \quad D = \left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 - i\omega \gamma \hbar + 2\alpha_{00} (T_c - T) \right) (\rho_0 \omega^2 - (2\bar{\mu} + \tilde{\lambda}) k^2) + 2dk^2.$$

Система уравнений (28)–(32) распадается на три независимые подсистемы, дисперсионные соотношения которых мы рассмотрим ниже. Уравнение (30) (компоненты $i=2$ и 3) описывает поперечные электромагнитные волны с дисперсионным соотношением $A=0$ или соответственно

$$(39) \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega \frac{4\pi\sigma}{c^2} - \frac{16\pi e^2 \Psi_0^2}{mc^2}.$$

Эти волны затухают. Для предельного случая $\omega=0$ следует

$$(40) \quad k^2 (\omega=0) = k_0^2 = -\frac{16\pi e^2 \Psi_0^2}{mc^2} = -\frac{1}{\lambda_L^2},$$

т. е. получается затухающее решение

$$(41) \quad A_i = \hat{A}_i \exp \left(-\frac{x}{\lambda_L} \right), \quad i=2, 3,$$

где λ_L — лондоновская глубина проникновения. При $\omega \neq 0$ возникает дополнительное затухание вследствие скин-эффекта. Предельный случай

$k=0$ приводит к уравнению

$$(42) \quad \omega^2 + i\omega 4\pi\sigma - \frac{16\pi e^2 \Psi_0^2}{m} = 0.$$

Тем самым описывается временное затухание малого отклонения от равновесного значения. Подробное обсуждение дисперсионного соотношения (39) можно найти у Лауэ [23].

Уравнения (28)–(30) (компонента $i=1$), (31) и (32) (компонента $i=1$) содержат дисперсионное соотношение $BD=0$. Фактор B описывает отклонение от равновесия величин A_1 , Φ и $\bar{\Phi}$. Эти волны затухают; они также играют роль только на поверхностях. Из соотношения $B=0$ для граничного случая $\omega=0$ следует уравнение

$$(43) \quad \left(\frac{1}{\lambda_D^2} + k^2 \right) \left(\frac{4\pi\sigma\hbar}{2mc^2} k^2 + \frac{16\pi e^2 \Psi_0^2 \gamma}{mc^2} \right) = 0,$$

решениями которого являются

$$(44) \quad k_{01}^2 = -1/\lambda_D^2,$$

$$(45) \quad k_{02}^2 = -8\gamma e^2 \Psi_0^2 / \hbar\sigma = -1/\lambda_{\bar{\Phi}}^2.$$

Дебаевский радиус экранирования λ_D появляется здесь как глубина проникновения для потенциала Φ . Для эффективного потенциала $\bar{\Phi}$ получается глубина проникновения $\lambda_{\bar{\Phi}}$ (ср. также [6]). Для предельного случая $k=0$ вновь получается уравнение (42).

Фактор D описывает волны параметра порядка Ψ и продольные звуковые волны. Уравнение $D=0$ мы решим приближенно, учтя лишь члены, линейные относительно d^2 . Тогда мы получим

$$(46) \quad k_{1/2}^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (i\omega\gamma\hbar - 2\alpha_{00}(T_c - T)) \times \\ \times \left[1 - \frac{2d^2 2m/\hbar^2}{\left(\rho_0 \omega^2 - (2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \frac{2m}{\hbar^2} (i\omega\gamma\hbar - 2\alpha_{00}(T_c - T)) \right)} \right],$$

$$(47) \quad k_{3/2}^2 = \frac{\omega^2}{v_l^2} \left[1 + \frac{2d^2 2m/\hbar^2}{\left(\rho_0 \omega^2 - (2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \frac{2m}{\hbar^2} (i\omega\gamma\hbar - 2\alpha_{00}(T_c - T)) \right)} \right],$$

где

$$(48) \quad v_l^2 = (2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) / \rho_0.$$

Сначала рассмотрим уравнения (46) и (47) без дополнительных членов в квадратных скобках. Из соотношения

$$(49) \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (i\omega\gamma\hbar - 2\alpha_{00}(T_c - T))$$

для $\omega=0$ получаем

$$(50) \quad k_0^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} 2\alpha_{00}(T_c - T) = -\frac{2}{\xi^2},$$

где ξ — длина когерентности в теории Гинзбурга — Ландау. Для $k=0$ получается

$$(51) \quad \omega = -i \frac{2\alpha_{00}(T_c - T)}{\gamma\hbar} = -i \frac{1}{\tau_R}.$$

Время затухания τ_R идентично с введенным Шмидом [6] временем релаксации параметра порядка. Волны параметра порядка, таким образом, сильно затухают как в пространстве, так и во времени. Уравнение (47) без дополнительных членов

$$(52) \quad k^2 = \omega^2 / v_l^2.$$

Для скорости v_l продольных звуковых волн при учете уравнений (25) и (26) получим выражение

$$(53) \quad v_l = \left\{ \frac{1}{\rho_0} \left[(2\mu + \lambda) - \frac{1}{\beta_0} (2a_1^0 + a_2^0) - \frac{\alpha_{00}(T_c - T)}{\beta_0} (2c_1 + c_2) + \frac{1}{2} \frac{\alpha_{00}^2 (T_c - T)^2}{\beta_0} (2b_1 + b_2) \right] \right\}^{1/2}.$$

Скорость звука зависит от сверхпроводящего состояния через константы ΔC -эффекта b_1 , b_2 , c_1 и c_2 . Изменение температуры вызывает изменение скорости звука. При $T \rightarrow T_c$ она скачком переходит в скорость звука в состоянии с нормальной проводимостью:

$$(54) \quad \lim_{T \rightarrow T_c - 0} v_l = \left[\frac{1}{\rho_0} (2\mu + \lambda) \left(1 - \frac{2a_1^0 + a_2^0}{\beta_0 (2\mu + \lambda)} \right) \right]^{1/2};$$

скачок модулей упругости вызывает скачок скорости звука. Это поведение еще модифицируется дополнительными членами в уравнениях (46) и (47).

Рассмотрим затухание продольных звуковых волн. Для этого разрешим уравнение (47) относительно k и определим мнимую часть k . Тогда для постоянной затухания δ получим соотношение

$$(55) \quad \delta = \text{Im } k_{\gamma} = \left(\frac{\rho_0}{2\mu + \lambda} \right)^{1/2} \left(\frac{d^2}{2\mu + \lambda} \frac{2m}{\hbar^2} \omega^2 \gamma \hbar \right) \left[\left(\frac{\rho_0 \omega^2}{2\mu + \lambda} + 2\alpha_{00} (T_c - T) \frac{2m}{\hbar^2} \right)^2 + \omega^2 \gamma^2 \hbar^2 \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

При этом мы использовали приближение $2\bar{\mu} + \bar{\lambda} \approx 2\mu + \lambda$, т. е. приняли скачок модулей упругости и их изменение в зависимости от температуры малыми по сравнению с самими модулями. Уравнение (55) при учете соотношений (50) и (51) можно преобразовать к виду

$$(56) \quad \delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_0}{2\mu + \lambda} \right)^{1/2} \frac{\frac{d^2}{2\mu + \lambda} \xi^2 \tau_R \omega^2}{(2\pi^2 (\xi/\lambda_l)^2 + 1)^2 + \tau_R^2 \omega^2}.$$

Здесь λ_l — длина продольной звуковой волны. Так как до частот 10^8 гц λ_l заведомо велика по сравнению с длиной когерентности, в уравнении (56) можно пренебречь значением $(\xi/\lambda_l)^2$ и для постоянной затухания δ мы получаем выражение

$$(57) \quad \delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_0}{2\mu + \lambda} \right)^{1/2} \frac{d^2}{2\mu + \lambda} \xi^2 \tau_R \omega^2 (1 + \tau_R^2 \omega^2)^{-1}.$$

Ввиду малости времени релаксации τ_R справедливо соотношение

$$(58) \quad \tau_R \approx 10^{-11} \frac{T_c}{T_c - T} \text{ сек.}$$

При малых частотах коэффициент затухания возрастает квадратично с частотой; лишь при более высоких частотах член $\tau_R^2 \omega^2$ в знаменателе становится заметным, и затухание увеличивается не так сильно. Такое

поведение затухания было измерено, например, для свинца Фейтом, Шоу и Селинджером [24].

Уравнение (32) (компоненты $i=2$ и 3) описывает поперечные звуковые волны с дисперсионным соотношением $C=0$ или соответственно

$$(59) \quad k^2 = \omega^2 \rho_0 / \bar{\mu}.$$

Скорость распространения поперечных звуковых волн $v_t = (\bar{\mu} / \rho_0)^{1/2}$ получается из уравнения (26):

$$(60) \quad v_t = \left\{ \frac{\mu}{\rho_0} \left(1 - \frac{a_1^0}{\beta_0 \mu} - \frac{\alpha_{00} (T_c - T)}{\beta_0} \frac{c_1}{\mu} + \frac{1}{2} \frac{\alpha_{00}^2 (T_c - T)^2}{\beta_0} \frac{b_1}{\mu} \right) \right\}^{1/2}.$$

Поперечные звуковые волны не затухают, так как ΔV -эффект ввиду принятой изотропии содержит только дилатации и не содержит сдвигов (см. также уравнение (24)).

В заключение рассмотрим распространение звука в кристалле тетрагональной симметрии (в частности, для точечных групп $4mm$, 422 , $42m$ и $4/mmm$). В системе координат, в которой ось z , как обычно, совпадает с осью симметрии 4-го порядка, тензор Гука имеет следующие отличные от

нуля компоненты: $C_{1111}^n = C_{2222}^n = C_{11}^n$, $C_{1122}^n = C_{12}^n$, $C_{1133}^n = C_{2233}^n = C_{13}^n \theta$,

$C_{3333}^n = C_{33}^n$, $C_{2323}^n = C_{1313}^n = C_{44}^n$, $C_{1212}^n = C_{66}^n$. У тензора b_{ij} отличаются от нуля компоненты $\bar{b}_{11} = \bar{b}_{22}$ и \bar{b}_{33} . Для остальных материальных тензоров: a_{ijkl}^0 , b_{ijkl} , c_{ijkl} и c_{ij} — справедливы аналогичные соотношения.

Распространение звука должно происходить в направлении $[0, 0, 1]$, т. е. в направлении оси симметрии. Вместо подстановки (33) напишем

$$(61) \quad \Psi^+ = \hat{\Psi} \exp[i(kz - \omega t)] \dots$$

В качестве дисперсионных соотношений мы снова получаем уравнение вида $A^2 B C^2 D = 0$, где A и B заданы уравнениями (35) и (36), а C и D — уравнениями

$$(62) \quad C = \rho_0 \omega^2 - \bar{C}_{44} k^2,$$

$$(63) \quad D = \left(\frac{\hbar^2}{2m} k^2 - i\omega \gamma \hbar + 2\alpha_{00} (T_c - T) \right) (\rho_0 \omega^2 - \bar{C}_{33} k^2) + 2\bar{d}^2 k^2,$$

в которых

$$(64) \quad \bar{C}_{33} = C_{33}^n - \frac{1}{\beta_0} a_{33}^0 - \frac{\alpha_{00} (T_c - T)}{\beta_0} c_{33} + \frac{1}{2} \frac{\alpha_{00}^2 (T_c - T)^2}{\beta_0} b_{33},$$

$$(65) \quad \bar{C}_{44} = C_{44}^n - \frac{1}{\beta_0} a_{44}^0 - \frac{\alpha_{00} (T_c - T)}{\beta_0} c_{44} + \frac{1}{2} \frac{\alpha_{00}^2 (T_c - T)^2}{\beta_0} b_{44},$$

$$(66) \quad \bar{d} = \left(\alpha_{00} (T_c - T) \bar{b}_{33} - \frac{1}{2} \bar{c}_{33} \right) \Psi_0.$$

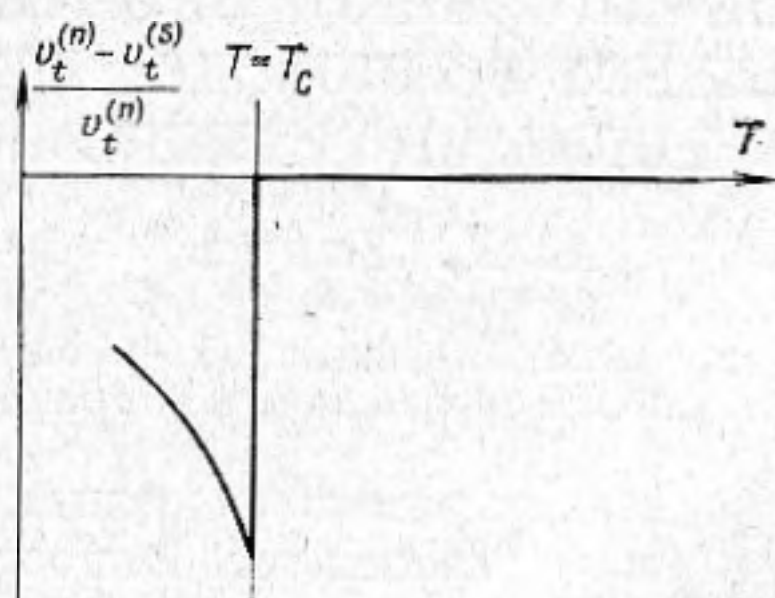
Затухание звуковых волн точно соответствует изотропному случаю. Рассмотрим теперь скорость распространения поперечных звуковых волн в зависимости от температуры. Для этого определим относительное изменение скорости звука

$$(67) \quad \frac{v_t^{(n)} - v_t^{(s)}}{v_t^{(n)}} = \frac{\left[\frac{1}{\rho_0} C_{44}^n \right]^{1/2} - \left[\frac{1}{\rho_0} \bar{C}_{44} \right]^{1/2}}{\left[\frac{1}{\rho_0} C_{44}^n \right]^{1/2}}.$$

и получим

$$(68) \quad \frac{v_t^{(n)} - v_t^{(s)}}{v_t^{(n)}} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta_0} \frac{a_{44}^0}{C_{44}^n} + \frac{\alpha_{00}(T_c - T)}{\beta_0} \frac{c_{44}}{C_{44}^n} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_{00}^2 (T_c - T)^2}{\beta_0} \frac{b_{44}}{C_{44}^n} \right).$$

Для $T \rightarrow T_c$ скорость звука в сверхпроводящем состоянии переходит в скорость звука в нормальном состоянии не плавно, а скачок модуля упруго-



сти C_{44} вызывает скачок скорости звука. Например, для $a_{44}^0/C_{44}^n < 0$ получается показанный на фигуре ход. Такая зависимость относительного изменения скорости поперечных звуковых волн от температуры была экспериментально получена Йи и Дитоном [25] для олова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гунзбург В. Л., Ландау Л. Д. ЖЭТФ, 1950, 20, 1064.
2. Anderson P. W., Dayem A. H. Phys. Rev. Lett., 1964, 13, 195.
3. Stephen M., Suhl H., Phys. Rev. Lett., 1964, 13, 797.
4. Anderson P. W., Werthamer N. R., Luttinger J. M. Phys. Rev., 1965, 138A, 1157.
5. Jakeman E., Pike E. R. Phys. Lett., 1966, 20, 593.
6. Schmid A. Phys. Kondens. Materie, 1966, 5, 302.
7. Abraham E., Tsuneto T. Phys. Rev., 1966, 152, 416.
8. Caroli C., Maki K. Phys. Rev., 1967, 164, 591.
9. Brusberg M. Phys. Lett., 1967, 25A, 57.
10. Горьков Л. П., Элиашберг Г. М. ЖЭТФ, 1968, 54, 612.
11. Fulde P., Maki K. Phys. Kondens. Materie, 1969, 8, 371.
12. Weller W. Phys. Stat. Sol., 1969, 35, 573.
13. Rieger T. J., Scalapino D. J., Mercereau J. E. Phys. Rev. Lett., 1971, 27, 1787.
14. Kusayanagi E., Kawashima T., Yamafuji K. J. Phys. Soc. Japan, 1972, 33, 551.
15. Labusch R. Phys. Rev., 1968, 170, 470.
16. Seeger A., Kronmüller H., Phys. Stat. Sol., 1968, 27, 371.
17. Miyahara K., Irie F., Yamafuji K. J. Phys. Soc. Japan, 1969, 27, 290.
18. Kammerer U. Z. Phys., 1969, 227, 125.
19. Горьков Л. П. ЖЭТФ, 1959, 37, 1407.
20. Rudat V., Kluge G. Phys. Stat. Sol. (b), 1976, 77, K 63.
21. Testardi L. R. Phys. Rev., 1971, B3, 95.
22. Rudat V. Wiss. Zeitschr. Friedrich - Schiller - Univ. Jena, Math. - Nat. R. 1973, 22, 225.
23. Laue M. V. Theorie der Supraleitung, Berlin, 1949.
24. Fate W. A., Shaw R. W., Salinger G. L. Phys. Rev., 1968, 172, 413.
25. Yee B. G. W., Deaton B. C. Phys. Rev. Lett., 1969, 23, 1438.

Университет им. Фридриха Шиллера
секция физики, Йена, ГДР

Поступила
20 мая 1976 г.
После переработки
15 декабря 1976 г.