АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 2

УДК 533.6.013.42

О ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА НА ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Н. Д. Векслер

Рассмотрена двумерная нестационарная дифракция плоского акустического импульса давления на тонкой упругой цилиндрической оболочке, содержащей жидкий заполнитель, с использованием метода двукратного интегрального преобразования – Лапласа по времени и Фурье по углу, позволяющего получить точное решение изображающей задачи. Выполнение обратных преобразований проводится приближенно методами теории функций комплексного переменного в предположении больших вещественных положительных значений параметра преобразования Лапласа. Выведены асимптотические формулы для звукового давления, пригодные при малых расстояниях от фронтов отраженного, излученных и дифрагированных импульсов. Анализируется влияние упругостных свойств оболочки и заполняющей ее жидкости на профиль давления за фронтами импульсов. Изложена процедура выявления свойств оболочки и заполняющей ее жидкости по регистрируемым эхо-импульсам.

Работа является некоторым развитием предыдущих исследований [1–9]. Пусть в безграничной идеальной сжимаемой жидкости находится замкнутая круговая тонкая упругая цилиндрическая оболочка бесконечной длины, заполненная другой жидкостью.

Звуковые давления p_i $(i=1, 2)$ в жидкости, окружающей оболочку, и p_3 в заполняющей ее жидкости в двумерном случае удовлетворяют волновым уравнениям

$$\left(\nabla_0^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)p_i=0 \quad (i=1,2), \quad r\geqslant 1, \tag{1}$$

$$\left(\nabla_0^2-\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)p_3=0, \quad r\leqslant 1,$$

$$\nabla_0^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

вектор смещения оболочки удовлетворяет линейным уравнениям теории оболочек типа Тимошенко:

$$L_{ij}u_j=q\delta_{i3}\ (i,j=1,2,3);\ L_{ij}=L_{ji};\ \delta_{i3}=\begin{cases}1 \text{ при } i=j\\ 0 \text{ при } i\neq j,\end{cases} \tag{2}$$

$$L_{11}=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\varkappa^2, \quad L_{12}=\varkappa^2, \quad L_{13}=(1+\varkappa^2)\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$L_{22}=a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\varkappa^2, \quad L_{23}=-\varkappa^2\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$L_{33}=-\left(\varkappa^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)+1.$$

Пусть на оболочку падает плоский звуковой импульс, фронт которого параллелен продольной оси оболочки

$$(3)\qquad p_1(\xi,t)=p_0 g(t+\xi)H(t+\xi),\qquad H(t+\xi)=\begin{cases}1 \text{ при } \tau+\xi>0\\ 0 \text{ при } \tau+\xi\leqslant 0.\end{cases}$$

Требуется рассчитать поле звукового давления p_2 (сумму отраженного, излученных и дифрагированных импульсов), вызванное действием падающего импульса (3) в области

$$(4)\qquad r\geqslant 1,\ \pi\geqslant\theta\geqslant-\pi,\ t\geqslant 0$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$(5)\qquad p_j=\frac{\partial}{\partial t}p_j=0,\qquad u_j=\frac{\partial}{\partial t}u_j=0\qquad (j=1,2,3),\qquad t=0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_3=\frac{-1}{\rho C^2}\frac{\partial}{\partial r}(p_1+p_2),\qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u_3=\frac{-1}{\rho_3 C^2}\frac{\partial}{\partial r}p_3,\qquad r=1,$$

$$q_r=-(p_1+p_2-p_3)\,|_{r=1};\quad p_2\to 0,\quad r\to\infty.$$

Предположим далее, что решение ограничено в области, где оно определено; отсчет времени будем производить с момента соприкосновения падающего импульса с поверхностью оболочки, происходящего в точке с координатами $r=1$, $\theta=0$.

В формулах (1)–(5) использованы следующие обозначения:

$$(6)\qquad r=\frac{R}{R_0},\quad \xi=\frac{X}{R_0},\quad t=\frac{CT}{R_0},\quad u_1=\frac{U_\theta}{R_0},\quad u_3=\frac{U_r}{R_0},$$

$$a=\frac{h}{\sqrt{12}R_0},\quad \varkappa=\frac{C_2}{C_1},\quad \lambda=\frac{C}{C_1},\quad \eta=\frac{C_3}{C},$$

$$q=\frac{q_r\delta_1}{\rho C^2},\quad \delta_1=\frac{1}{2}\delta\lambda^2,\quad \delta=2\frac{\rho R_0}{\rho_1 h},$$

$$C_1=\left[\frac{E}{\rho_1(1-\nu^2)}\right]^{1/2},\quad C_2=\left[\frac{Ek_T^2}{2\rho_1(1+\nu)}\right]^{1/2}$$

$$C_1>C_2>C>C_3,\quad \rho_1>\rho>\rho_3.$$

Здесь R, θ — цилиндрические координаты, X — декартова координата, направленная в сторону, противоположную направлению распространения падающего импульса, T — время, ρ, C — плотность жидкости и скорость звука в ней, ρ_3, C_3 — плотность жидкого заполнителя оболочки и скорость звука в нем, E, ν, ρ_1 — модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки, R_0, h — радиус и толщина оболочки, U_θ, U_r — тангенциальный и радиальный компоненты вектора перемещения оболочки, u_3 — угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки, C_1, C_2 — скорости распространения фронтов упругих волн в линейной теории оболочек типа Тимошенко, k_T^2 — численный коэффициент сдвига, p_0 — постоянная, имеющая размерность давления, q — произвольная ограниченная функция, определяющая закон изменения давления в падающем импульсе.

Для решения задачи применим метод двукратного интегрального преобразования: по времени t проведем интегральное преобразование Лапласа, а по углу θ — интегральное преобразование Фурье. Приведем формулы

прямых и обратных преобразований:

$$f^L(r,\theta,s)=\int_0^\infty f(r,\theta,t)\,e^{-st}\,dt,\quad f^{LF}(r,\omega,s)=\int_{-\infty} f^L(r,\theta,s)\,e^{-i\omega\theta}\,d\theta,$$

$$f^L(r,\theta,s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^{LF}(r,\omega,s)\,e^{i\omega\theta}\,d\omega,$$

$$f(r,\theta,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u_0-i\infty}^{u_0+i\infty} f^L(r,\theta,s)\,e^{st}\,ds,\ u_0>0,$$

где $s(\omega)$ — параметр преобразования Лапласа (Фурье), а индекс $L(F)$ означает выполнение над функцией преобразования Лапласа (Фурье).

Будем рассматривать $f(r,\theta,t)$ как обобщенную функцию, поскольку на некоторых пространственно-временных характеристиках эта функция претерпевает разрывы. Применяя по углу θ преобразование Фурье, будем полагать, что функция $f(r,\theta,t)$ определена не только в физической области (4), но и на римановой поверхности, листы которой определены формулой

(7) $$(2n+1)\pi\geqslant\theta\geqslant(2n-1)\pi\quad(n=\ldots-1,0,1,\ldots).$$

Перейдя в формуле (3) от декартовых координат к цилиндрическим и используя интегральное представление модифицированной функции Бесселя

$$I_\omega(sr)=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(sr\cos\theta-i\omega\theta)\,d\theta,$$

найдем LF-преобразование падающего импульса

(8) $$p_1^{LF}(r,\ \omega,\ s)=-A_1(s)I_\omega(sr),\quad A_1=2\pi p_0 g^L(s)\exp(-s).$$

LF-преобразования волновых уравнений (1) при нулевых начальных условиях (5) принимают вид

(9) $$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-s^2\left(1+\frac{\omega^2}{s^2r^2}\right)\right]p_2^{LF}=0,\quad r\geqslant1,$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-s^2\left(\frac{1}{\eta^2}+\frac{\omega^2}{s^2r^2}\right)\right]p_3^{LF}=0,\quad r\leqslant1.$$

Представим ограниченные в области определения решения этих уравнений

(10) $$p_2^{LF}(r,\omega,s)=A_2(s)K_\omega(sr),\quad p_3^{LF}(r,\omega,s)=A_3(s)I_\omega\left(\frac{s}{\eta}r\right),$$

где $K_\omega(sr)$ — функция Макдональда, а $A_2(s)$, $A_3(s)$ — неопределенные коэффициенты.

LF-преобразования уравнений движения оболочки и условий контакта при $r=1$ составляют алгебраическую систему уравнений:

(11) $$a_{ij}^{LF}u_j^{LF}=\frac{-\delta_1}{\rho C^2}(p_1^{LF}+p_2^{LF}-p_3^{LF})\,|_{r=1}\delta_{i3},\quad a_{ij}^{LF}=a_{ji}^{LF}\quad(i,j=1,2,3),$$

$$u_3^{LF}=\frac{-1}{s^2\rho C^2}\frac{\partial}{\partial r}(p_1^{LF}+p_2^{LF})\,|_{r=1},\quad u_3^{LF}=\frac{-1}{s^2\rho_3C^2}\frac{\partial}{\partial r}p^{LF}\Big|_{r=1}$$

$$a_{11}^{LF}=-\omega^2-s^2\lambda^2-\varkappa^2,\quad a_{12}^{LF}=\varkappa^2,\quad a_{13}^{LF}=i\omega(1+\varkappa^2),$$

$$a_{22}^{LF}=-a^2(\omega^2+s^2\lambda^2)-\varkappa^2,\quad a_{23}^{LF}=-i\omega\varkappa^2,\quad a_{33}^{LF}=\omega^2\varkappa^2+s^2\lambda^2+1.$$

Подставим выражения (8) и (10) в формулу (11) и решим полученную систему. В результате найдем LF-преобразование звукового давления:

$$(12)\qquad p_2^{LF}(r,\omega,s)=p_r^{LF}E,\quad p_r^{LF}=A_1(s)\frac{I_\omega'(s)}{K_\omega'(s)}K_\omega(sr),\quad E=E_1/E_2,$$

$$E_1=D_3-\delta_1 sD_2\left[\frac{I_\omega(s)}{I_\omega'(s)}-\delta_3\frac{I_\omega\left(\frac{s}{\eta}\right)}{I_\omega'\left(\frac{s}{\eta}\right)}\right],\quad \delta_3=\rho_3C_3/\rho C,$$

$$E_2=D_3-\delta_1 sD_2\left[\frac{K_\omega(s)}{K_\omega'(s)}-\delta_3\frac{I_\omega\left(\frac{s}{\eta}\right)}{I_\omega'\left(\frac{s}{\eta}\right)}\right]$$

$$D_3=\det\|a_{ij}^{LF}\|\quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3),\quad D_2=\det\|a_{ij}^{LF}\|\quad (i,\ j=1,\ 2).$$

Здесь и далее штрих означает производную по аргументу.

В формуле (12) сомножитель p_r^{LF} представляет собой LF-преобразование решения задачи о дифракции плоского акустического импульса давления на недеформируемом (абсолютно жестком) неподвижном цилиндрическом препятствии [1], а сомножитель E отражает влияние упругостных свойств оболочки и свойств ее жидкого заполнителя (равно как и подвижности тела) на LF-преобразование решения задачи. В рамках принятых допущений о моделях оболочки и жидкостей полученное LF-преобразование решения задачи является точным.

Нахождение обратных преобразований от формального решения (12) при произвольных значениях параметров s и ω затруднительно. Поэтому ниже построена асимптотика решения (12) в предположении больших вещественных положительных значений параметра s. Как известно, асимптотика $s\to\infty$ в пространстве преобразования Лапласа соответствует асимптотике $\tau_j\to 0$ в пространстве оригиналов (τ_j — расстояние от фронта импульса).

Входящие в формулу (12) модифицированные функции Бесселя и их первые производные аппроксимируем асимптотическими разложениями. Приходится использовать два типа асимптотик: равномерные асимптотические разложения Ф. Ольвера [10] по целым отрицательным степеням s и асимптотические представления Р. Лангера [11] по степеням $s^{1/3}$, работающие в «переходной» области, где разложения Ф. Ольвера перестают быть справедливыми.

Заменяя модифицированные функции Бесселя и их первые производные асимптотическими рядами Ф. Ольвера и рассматривая s как большой параметр, по формуле (12) найдем L-преобразования отраженного и излученных импульсов:

$$(13)\qquad p_2^L(r,\omega,s)\sim A(s)\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^nA_n(s),$$

$$A(s)=\frac{-p_0g^L(s)}{\sqrt{2\pi s}},\quad A_n(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{MN\exp[sk(\omega)]}{\sqrt[4]{r^2+z^2}}d\omega,\quad z=\frac{\omega}{s},$$

$$M=1-\frac{1}{s\sqrt{1+z^2}}\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{12}\frac{z^2}{1+z^2}\right)-\frac{1}{s\sqrt{r^2+z^2}}\left[\frac{1}{8}-\frac{5}{24}\frac{\left(\frac{z}{r}\right)^2}{1+\left(\frac{z}{r}\right)^2}\right].$$

$$N=1-\frac{2s\delta_1 D_2\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}}{D_3+s\delta_1 D_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}+\dfrac{\delta_3}{\sqrt{1+(\eta z)^2}}\right)},$$

$$k(\omega)=-1+iz(\theta+2\pi n)+2\sqrt{1+z^2}-r\sqrt{1+\left(\frac{z}{r}\right)^2}-$$

$$-2z\,\mathrm{arsh}\,z+z\,\mathrm{arsh}\,\frac{z}{r}.$$

В «переходной» области используем в (12) асимптотические представления Р. Лангера и выведем L-преобразования дифрагированных импульсов:

$$p_2^L(r\ \omega,s)\sim B(s)\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n B_n(s), \tag{14}$$

$$B(s)=-ip_0 g^L(s)s^{-1/6}9(2\pi)^{-3/2},\qquad B_n(s)=\int_{-\infty}^{\infty}N_1\exp[sk_1(\omega)]d\omega,$$

$$N_1=1-\frac{s^{4/3}\delta_1 D_2 f(\alpha)}{f'(\alpha)\left\{D_3+s\delta_1 D_2\left[s^{1/3}\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}+\dfrac{\delta_3}{\sqrt{1-\eta^2}}\right]\right\}}$$

$$k_1(\omega)=\frac{\pi}{2}-(\theta+2\pi n)+\arccos\frac{1}{r}-1-\sqrt{r^2-1}+$$

$$+\alpha s^{-2/3}\left[\frac{\pi}{2}-(\theta+2\pi n)+\arccos\frac{1}{r}\right],$$

$$f(\alpha)=3(2^{-1/6})\,\mathrm{Ai}(x),\quad x=-2^{1/3}\alpha,$$

где $\mathrm{Ai}(x)$ — функция Эйри.

В точку наблюдения (r,θ), согласно формулам (13), (14), приходят две последовательности импульсов, совершивших обороты вокруг оси симметрии оболочки. Индекс n указывает число оборотов; положительные (отрицательные) значения индекса соответствуют импульсам, обегающим оболочку в направлении против (по) часовой стрелки. Если угол наблюдения $\pi>\theta>0$, то в точку наблюдения сначала придут импульсы, обегающие оболочку против часовой стрелки, а затем с некоторым опозданием (потребным на обегание угла $2\pi-\theta$) — импульсы, обегающие оболочку по часовой стрелке. Если $\theta=0$, то обе последовательности приходят одновременно и суммируются.

Функции N (13) и N_1 (14) имеют простые полюса, определяемые соответственно из уравнений

$$D_3+s\delta_1 D_2\left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}+\frac{\delta_3}{\sqrt{1+(\eta z)^2}}\right)=0 \tag{15}$$

$$f'(\alpha)\left\{D_3+s\delta_1 D_2\left[s^{1/3}\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}+\frac{\delta_3}{\sqrt{1-\eta^2}}\right]\right\}=0$$

В предположении $|s|\gg 1$ из формулы (15) найдем координаты полюсов

$$\omega_1\sim\pm i\lambda s\left(1+\frac{r_1}{s^2}-\frac{t_1}{s^3}\right),\quad r_j=\frac{\mu_j}{2\lambda^2}\quad j=(1,2,3), \tag{16}$$

$$\omega_2 \sim \pm i\lambda s \left(1+\frac{r_2}{s^2a^2}-\frac{t_2}{s^3a^2}\right), \quad \mu_1=1, \quad \mu_2=\frac{\varkappa^2}{1-\varkappa^2},$$

$$\omega_3 \sim \pm i\frac{\lambda}{\varkappa}s\left(1+\frac{r_3}{s}\right), \quad \mu_3=\varkappa\delta_1\delta_4,$$

$$t_1=\frac{\delta_1\delta_5}{2\lambda^4}, \quad t_2=\frac{\varkappa^4\delta_1\delta_5}{2\lambda^4(1+\varkappa^2)^2},$$

$$\delta_4=\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}}+\frac{\delta_3}{\sqrt{\varkappa^2-(\eta\lambda)^2}}, \quad \delta_5=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}+\frac{\delta_3}{\sqrt{1-(\eta\lambda)^2}}$$

$$\omega_k \sim \pm is[1+\alpha_k s^{-2/3}+O(s^{-4/3})], \quad \alpha_k=-2^{-1/3}x_k, \tag{17}$$

где $x_1, x_2, \ldots$ — корни уравнения $Ai'(x)=0$, расположенные в порядке возрастания. Разложение ω_k справедливо, если $s\to\infty$ при фиксированных k. Входящие в O константы зависят от k и, возможно, уходят в бесконечность с ростом k.

Из формулы (16) видно, что упругостные свойства оболочки и наличие заполнителя оказывают существенное влияние на координаты этих полюсов. Напротив, с точностью формулы (17) упругостные свойства оболочки и заполняющей ее жидкости не влияют на координаты полюсов ω_k. Полюса (16) соответствуют излученным импульсам, а полюса (17) — дифрагированным. Полюса (16) дают относительные (деленные на скорость звука в жидкости) скорости распространения фронтов волн деформации по срединной поверхности оболочки: первый полюс ω_1 — относительную скорость λ^{-1} тангенциального перемещения u_1 (безмоментной волны), второй полюс ω_2 — относительную скорость λ^{-1} угла поворота нормали к срединной поверхности оболочки u_2 (изгибной волны), третий полюс ω_3 — относительную скорость $\varkappa/\lambda$ нормального перемещения u_3 (сдвиговой волны). В рамках принятого простейшего варианта теории оболочек типа теории Тимошенко (с неизменной по толщине оболочки метрикой) фронты безмоментной и изгибной волн распространяются по оболочке с одинаковой скоростью λ^{-1}. В предположении $s\to\infty$ из формулы (17) следует, что скорость распространения фронтов дифрагированных импульсов равна скорости звука в жидкости C.

Полюса (16) определяют критические углы появления излученных импульсов

$$\theta_{1*}=\theta_{2*}=2\arcsin\lambda-\arcsin\frac{\lambda}{r},$$

$$\theta_{3*}=2\arcsin\frac{\lambda}{\varkappa}-\arcsin\frac{\lambda}{\varkappa r}. \tag{18}$$

В озвученной области в зависимости от угла наблюдения θ будем различать три зоны

$$\theta_{1*}>\theta>0, \quad \theta_{3*}>\theta>\theta_{1*}, \quad \theta>\theta_{3*}.$$

L-преобразование отраженного импульса существует во всех трех зонах. Когда растущий угол наблюдения θ превысит θ_{1*}, к L-преобразованию отраженного импульса нужно добавить L-преобразование, соответствующее излученным импульсам, вызываемым безмоментной и изгибной волнами, распространяющимися по срединной поверхности оболочки. Затем, когда угол наблюдения превысит θ_{3*}, следует добавить и L-преобразование излученного импульса, порождаемого волной сдвига, бегущей по срединной поверхности оболочки. В теневой области указанные L-преобразования дополняются L-преобразованиями дифрагированных импульсов. L-преобразование отраженного импульса находится из (13) методом перевала. L-преобразования излученных (дифрагированных) импульсов

вычисляются как вычеты в полюсах (16) ((17)) подынтегральной функции (13) ((14)).

Приступим теперь к нахождению L-преобразования решения задачи. В предположении $|s|\gg 1$ представим интеграл $A_n(s)$ (13) в виде

$$A_0(s)=\int\limits_{-\infty} K(\omega)\exp[sk_0(\omega)]d\omega, \tag{19}$$

$$K(\omega)=\zeta_1\left[1-\frac{\zeta_2}{s}-\frac{\zeta_3}{s-\zeta_4}+0(s^{-2})\right],$$

$$\zeta_1=\frac{1}{\sqrt[4]{r^2+z^2}},\qquad z=\frac{\omega}{s}.$$

$$\zeta_2=\frac{\frac{3}{4}-\frac{7}{12}\frac{z^2}{1+z^2}}{\sqrt{1+z^2}}+\frac{\frac{1}{8}-\frac{5}{24}\frac{\left(\frac{z}{r}\right)^2}{1+\left(\frac{z}{r}\right)^2}}{r\sqrt{1+\left(\frac{z}{r}\right)^2}},$$

$$\zeta_3=\frac{2\delta_1}{(\lambda^2+\varkappa^2z^2)\sqrt{1+z^2}},$$

$$\zeta_4=\frac{-\delta_1\left[\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}+\frac{\delta_3}{\sqrt{1+(\eta z)^2}}\right]}{\lambda^2+\varkappa^2z^2},$$

$$k_0(\omega)=-1+i\theta z+2\sqrt{1+z^2}-r\sqrt{1+\left(\frac{z}{r}\right)^2}-$$

$$-2z\operatorname{arsh}z+z\operatorname{arsh}\frac{z}{r}.$$

В выражениях $A_n(s)$, $k(\omega)$ (13) мы приняли $n=0$, поскольку отраженный импульс не совершает оборотов вокруг оболочки. Интеграл (19) вычислим приближенно по методу перевала [12]

$$A_0(s)\sim\sqrt{\frac{2\pi}{-sk_0''(\omega)}}K(\omega)\exp[sk_0(\omega)]\times \tag{20}$$

$$\times\left[1+s^{-1}\sum_{j=1}\varphi_j(\omega)+0(s^{-2})\right]\Big|_{\omega=\omega_*},$$

$$\varphi_1(\omega)=\frac{1}{2}\frac{k_0'''(\omega)K'(\omega)}{k_0''(\omega)K(\omega)}\qquad \varphi_2(\omega)=\frac{1}{8}\frac{k_0^{\mathrm{IV}}(\omega)}{[k_0''(\omega)]^2}$$

$$\varphi_3(\omega)=\frac{-5}{24}\frac{[k_0'''(\omega)]^2}{[k_0''(\omega)]^3}\qquad \varphi_4(\omega)=\frac{-1}{2}\frac{K''(\omega)}{k_0''(\omega)K(\omega)}$$

Координата точки перевала ω_* определяется из уравнения $k_0'(\omega)=0$ и имеет значение

(21) $$\omega_*=is\sin\beta,\quad \omega_*=isr\sin\gamma,$$

где β — угол падения. Значения углов $\beta=\beta(r,\theta)$, $\gamma=\gamma(r,\theta)$ получаются из системы уравнений

(22) $$\theta+\gamma-2\beta=0,\quad \sin\beta=r\sin\gamma$$

при ограничениях $\theta\geqslant\beta\geqslant\frac{\theta}{2}$, $\theta\geqslant\gamma\geqslant0$.

Подставляя координаты седловой точки (21) в формулу (20), получим асимптотическое значение L-преобразования отраженного импульса:

(23) $$p_2^L(r,\theta,s)\sim Ug^L(s)\exp(-sa_*)\times$$

$$\times\left[1-\frac{\zeta_3(\omega_*)}{s-\zeta_4(\omega_*)}+\frac{1}{s}u(\omega_*)+0(s^{-2})\right],$$

$$U\frac{p_0}{\sqrt{r}}\sqrt{\frac{1}{2\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}-\frac{1}{r}}},\qquad a_*=1-2\cos\beta+r\cos\gamma,$$

$$w(\omega_*)=\sum_{j=1}^{5}\varphi_j(\omega_*),$$

$$\zeta_3(\omega_*)=\frac{\delta}{\cos\beta\left[1-\left(\frac{C_2}{C}\right)^2\sin^2\beta\right]},\qquad \delta=\frac{2\rho R_0}{\rho_1 h},$$

$$\zeta_4(\omega_*)=\frac{-\delta_1\left[\frac{1}{\cos\beta}+\frac{\delta_3}{\sqrt{1-\eta^2\sin^2\beta}}\right]}{\lambda^2-\varkappa^2\sin^2\beta},$$

$$\varphi_1(\omega_*)=\frac{\sin\beta\sin\gamma\left(\frac{2}{\cos^3\beta}-\frac{1}{r^3\cos^3\gamma}\right)}{4r\cos^2\gamma\left(\frac{-2}{\cos\beta}-\frac{1}{r\cos\gamma}\right)^2},$$

$$\varphi_2(\omega_*)=\frac{\frac{2(1+3\,\mathrm{tg}^2\beta)}{\cos^3\beta}-\frac{1+3\,\mathrm{tg}^2\gamma}{r^3\cos^3\gamma}}{8\left(\frac{-2}{\cos\beta}+\frac{1}{r\cos\gamma}\right)^2},$$

$$\varphi_3(\omega_*)=\frac{5\sin^2\beta\left(\frac{2}{\cos^3\beta}-\frac{1}{r^3\cos^3\gamma}\right)^2}{24\left(\frac{-2}{\cos\beta}+\frac{1}{r\cos\gamma}\right)^2}$$

$$\varphi_4(\omega_*)=\frac{\left(1+\frac{5}{2}\mathrm{tg}^2\gamma\right)\left(\frac{-2}{\cos\beta}+\frac{1}{r\cos\gamma}\right)}{4r^2\cos^2\gamma}$$

$$\varphi_5(\omega_*)=-\frac{\frac{3}{4}+\frac{7}{12}\operatorname{tg}^2\beta}{\cos\beta}-\frac{\frac{1}{8}+\frac{5}{24}\operatorname{tg}^2\gamma}{r\cos\gamma}$$

С помощью теоремы Коши о вычетах в полюсах (16) подынтегральной функции (13) найдем L-преобразования излученных импульсов:

$$(24)\qquad p_2^L(r,\theta,s)\sim Vg^L(s)\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\sum_{j=1}^{3}V_{nj}(s),\quad V=\sqrt{2\pi}\,p_0\delta_1,$$

$$V_{nj}(s)=a_js^{-(1/2+\alpha_j)}[1+b_js^{-1}+O(s^{-2})]\times$$

$$\times\exp\left[-sc_{nj}\left(1+\frac{d_{nj}}{c_{nj}}s^{-(1+\beta_j)}\right)\right]$$

$$\alpha_j=\begin{cases}2 \text{ при } j=1,2\\ 0 \text{ при } j=3,\end{cases}\qquad \beta_j=\begin{cases}1 \text{ при } j=1,2\\ 0 \text{ при } j=3,\end{cases}$$

$$a_1=\frac{1}{\lambda^3\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt[4]{r^2-\lambda^2}},\quad a_2=\frac{\varkappa^4}{a^2\lambda^3(1-\varkappa^2)^2\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt[4]{r^2-\lambda^2}},$$

$$a_3=\frac{-\sqrt{\varkappa}}{\lambda\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}\sqrt{r^2\varkappa^2-\lambda^2}},\qquad b_1=b(\lambda)+\frac{\delta_1\delta_5}{\lambda^2},$$

$$b_2=b(\lambda)+\frac{\delta_1\delta_5(1+\varkappa^2)}{\lambda^2(1-\varkappa^2)},\qquad b_3=b\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)+\frac{\varkappa^2(1-\eta)}{2a^2(\varkappa^2-1)}+$$

$$+\delta_1\delta_4\varkappa^3\left[\frac{1}{2(\varkappa^2-\lambda^2)}+\frac{1}{4(r^2\varkappa^2-\lambda^2)}\right]$$

$$b(\lambda)=\frac{\frac{1}{8}+\frac{5}{24}\frac{\lambda^2}{r^2-\lambda^2}}{\sqrt{r^2-\lambda^2}}-\frac{\frac{3}{4}+\frac{7}{12}\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

$$c_1=c_2=c(\lambda),\qquad c_3=c\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right),$$

$$c(\lambda)=1+\lambda\theta_n-2\sqrt{1-\lambda^2}+\sqrt{r^2-\lambda^2}-2\lambda\arcsin\lambda+\lambda\arcsin\frac{\lambda}{r},$$

$$\theta_n=\theta+2\pi n\quad(n=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

$$d_1=\lambda r_1d(\lambda),\quad d_2=a^{-2}\lambda r_2d(\lambda),\quad d_3=\varkappa^{-1}\lambda r_3d\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right),$$

$$d(\lambda)=\theta_n+\frac{2\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{r^2-\lambda^2}}-2\arcsin\lambda+\arcsin\frac{\lambda}{r}$$

Аналогично, вычисляя вычеты в полюсах (17) подынтегральной функции (14), получим асимптотику L-преобразования дифрагированных импульсов:

$$(25)\qquad p_2^L(r,\theta,s)\sim Wg^L(s)\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}W_{nk}(s),$$

$$W=\frac{p_0}{2^{7/6}\sqrt{\pi}\sqrt{r^2-1}},\quad W_{nk}(s)=\gamma_k(s^{-1/6}-\psi_ks^{-1/2})\exp(s\chi_n-s^{1/3}\varphi_{nk}),$$

$$\gamma_k=[\alpha_k \mathrm{Ai}^2(-\sqrt[3]{2}\,\alpha_k)]^{-1}, \quad \psi_k=\frac{\pi\delta[1-f(\eta)]}{8\alpha_k(1-\varkappa^2\lambda^{-2})}$$

$$f(\eta)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad \delta_3=0 \\ 1-\dfrac{2}{\pi}\arccos\eta & \text{при} \quad \delta_3\neq 0, \end{cases}$$

$$\chi_n=\frac{\pi}{2}-(\theta+2\pi n)+\arccos\frac{1}{r}-1-\sqrt{r^2-1},$$

$$\psi_{nk}=-\alpha_k\left[\frac{\pi}{2}-(\theta+2\pi n)+\arccos\frac{1}{r}\right].$$

Выполнение обратного преобразования Лапласа не вызывает затруднений. Используя теоремы о свертывании и смещении, по формуле (23) найдем асимптотику отраженного импульса давления:

$$p_2(r,\theta,t)\sim U\left\{g(\tau_*)+u\int_0^{\tau_*} g(x)\,dx-\right. \tag{26}$$

$$\left.-\zeta_3(\omega_*)\int_0^{\tau_*} g(x)\exp[\zeta_4(\omega_*)(\tau_*-x)]\,dx\right\}H(\tau_*), \quad \tau_*=t-a_*, \quad \tau_*\ll 1.$$

В асимптотической формуле (26) два первых слагаемых соответствуют отражению плоского акустического импульса давления от неподвижного недеформируемого цилиндра: первое слагаемое имеет форму падающего импульса, а второе слагаемое искажает эту форму вследствие выпуклости отражателя. Третье слагаемое вызывается упругостными свойствами оболочки и ее жидким заполнителем. Качественно (при малых τ_*) влияние геометрии тела и его упругости на искажение формы падающего импульса в отраженном — одного порядка.

Аналогично по L-преобразованию (24) получим асимптотику излученных импульсов:

$$p_2(r,\theta,t)\sim V\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\sum_{j=1}^{3}V_{nj}H(\tau_{nj}), \tag{27}$$

$$V_{nj}=a_j(Y_{nj}-b_jZ_{nj}), \quad \tau_{nj}=t-c_{nj},$$

$$Y_{nj}=\int_0^{\tau_{nj}} g(x)\,y_{nj}(\tau_{nj}-x)\,dx,$$

$$y_{nj}(\tau_{nj})=\left(\frac{\tau_{nj}}{d_{nj}}\right)^{3/4} J_{3/2}(2\sqrt{d_{nj}\tau_{nj}}) \quad (j=1,2),$$

$$Z_{nj}=\int_0^{\tau_{nj}} g(x)\,z_{nj}(\tau_{nj}-x)\,dx, \quad z_{nj}(\tau_{nj})=\left(\frac{\tau_{nj}}{d_{nj}}\right)^{5/4} J_{5/2}(2\sqrt{d_{nj}\tau_{nj}}),$$

$$y_{n3}(\tau_{n3})=\frac{\exp(-d_{n3})}{\sqrt{\pi\tau_{n3}}}, \quad z_{n3}(\tau_{n3})=2\exp(-d_{n3})\sqrt{\frac{\tau_{n3}}{\pi}}.$$

Как и следовало ожидать, влияние упругости оболочки, равно как и ее жидкого заполнителя, наиболее ярко проявляется в излученных импульсах. Отметим, что при взаимодействии акустического импульса давления с недеформируемым неподвижным цилиндром излученные импульсы отсутствуют.

Прежде чем приступить к выполнению обратного преобразования Лапласа от (25), найдем значение интеграла

$$X_l(\tau_n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{u_0-i\infty}^{u_0+i\infty} s^{-l}\exp(s\tau_n-s^{1/2}\psi_{nk})\,ds, \tag{28}$$

$$\tau_n=t+\chi_n \quad \left(l=\frac{1}{6},\ \frac{1}{2}\right).$$

Следуя Ф. Фридлендеру [1], вычислим интеграл (28) приближенно методом перевала. Координата точки перевала определяется из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s}(s\tau_n-s^{1/2}\psi_{nk})=0 \tag{29}$$

и имеет значение

$$s_{nk}=\left(\frac{\psi_{nk}}{3\tau_n}\right)^{2/2}. \tag{30}$$

Применяя стандартную формулу метода перевала, из формулы (28) найдем

$$X_l(\tau_n)=\frac{3^{\varepsilon}}{2\sqrt{\pi}}\psi_{nk}^{1-\varepsilon}\tau_n^{\varepsilon-1}\exp\left(-2\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\psi_{nk}}{\tau_n}}\right) \tag{31}$$

$$\varepsilon=\frac{6l-1}{4};\quad l=\frac{1}{6},\ \frac{1}{2}.$$

Теперь, используя теорему о свертывании, из формул (25), (31) найдем асимптотику дифрагированных импульсов

$$p_2(r,\theta,t)\sim W\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}W_{nk}H(\tau_n),\qquad \tau_n\ll 1, \tag{32}$$

$$W_{nk}=\gamma_k\int\limits_0^{\tau_n} g(x)X_{1/6}(\tau_n-x)\,dx-\psi_k\int\limits_0^{\tau_n} g(x)X_{1/2}(\tau_n-x)\,dx$$

Как видно из формул (32), упругостные свойства оболочки, так же как и свойства жидкого заполнителя, на дифрагированные импульсы влияют слабо. В асимптотических зависимостях (при малых τ_n) это влияние передается амплитудным коэффициентом ψ_k. В последовательностях излученных и дифрагированных импульсов наибольший интерес представляют импульсы, не совершившие ни одного оборота вокруг оболочки ($n=0$).

Исходя из полученных асимптотических формул для давления за фронтами импульсов предложим процедуру выявления параметров цилиндрической оболочки по регистрируемым эхо-импульсам.

Пусть в некоторой точке A ($r=l_1$, $\theta=0$) расположен излучатель (он же приемник) акустических импульсов, а в другой точке B ($r=l_2$, $\theta=\theta_2$) размещен приемник акустических импульсов. Примем, что $\theta_2>\theta_1$.

Предположим, что излучатель посылает импульс длительностью Δ

$$p_1(T)=p_0[H(T)-H(T-\Delta)]. \tag{33}$$

Согласно формуле (26), в точку A первым придет отраженный импульс

$$p_2(l_1,0,x)\sim p_0\sqrt{\frac{1}{2l_1-1}}\left\{\left[1+mx+\frac{2}{\delta_6}(\exp\delta_7x-1)\right]H(x)-\right. \tag{34}$$

$$-\left\langle 1+m(x-\Delta)+\frac{2}{\delta_6}\left[\exp\delta_7(x-\Delta)\right]\right\rangle H(x-\Delta)\Bigg\},$$

$$x=\tau_*,\ \delta_6=1+\delta_3,\ \delta_7=-\lambda^{-2}\delta_1\delta_6,$$

$$m=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{8l_1^3}}{\left(2-\frac{1}{l_1}\right)^2}-\frac{1}{4\left(2-\frac{1}{l_1}\right)l_1^2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{8l_1}.$$

По задержке $2T_1$ переднего фронта отраженного импульса p_2 относительно зондирующего импульса p_1 определим расстояние от излучателя до оболочки $L_1=CT_1$.

Регистрируя величину скачка переднего фронта отраженного импульса, по формуле (34) вычислим радиус оболочки R_0:

$$R_0=\frac{2L_1}{1-\varepsilon^{-2}},\qquad \varepsilon=\frac{p_2(l_1,0,x=0)}{p_1(l_1,0,t=-l_1)}. \tag{35}$$

Измеряя в точке $x=0$ угол наклона касательной к кривой давления в отраженном импульсе ψ

$$\psi=\frac{\partial}{\partial x}p_2(l_1,0,x)\,|_{x=0}=p_0\sqrt{\frac{1}{2l_1-1}}\left(m-\frac{2\delta_1}{\lambda^2}\right)H(x), \tag{36}$$

вычислим параметр $\rho_1 h$:

$$\rho_1 h=2\rho R_0\frac{1}{m-\frac{\psi}{p_0}}. \tag{37}$$

Измеряя давление в отраженном импульсе в два различных момента времени x_1 и x_2 $(x_1<x_2<\Delta)$, по формуле (34) вычислим параметр $\rho_3 C_3$:

$$\rho_3 C_3=\rho C\left\{1+\frac{\rho_1 h}{\rho R_0}\frac{\ln(1-\sigma)+\ln\sigma}{(x_1-x_2)}\right\}, \tag{38}$$

$$\sigma=\frac{1+mx_1-\frac{1}{p_0}\sqrt{2l_1-1}\,p_2(l_1,0,x_1)}{1+mx_2-\frac{1}{p_0}\sqrt{2l_1-1}\,p_2(l_1,0,x_2)}.$$

В точку B первым придет излученный импульс $(n=0)$ (37)

$$p_2(l_2,\theta_2,y)\sim Q\left\{y^{-5/2}\left(1-\frac{2}{7}b_2y\right)H(y)-\right. \tag{39}$$

$$\left.-(y-\Delta)^{-5/2}\left[1-\frac{2}{7}b_2(y-\Delta)\right]H(y-\Delta)\right\},$$

$$Q=-8\sqrt{2}p_0\delta_1\varkappa^4\left[15a^2(\varkappa^2-1)^2\lambda^3(1-\lambda^2)^{1/2}(l_2^2-\lambda^2)^{1/4}\right]^{-1},$$

$$y=\tau_{02}=t-1-\lambda\theta-\sqrt{l_2^2-\lambda}+2\sqrt{1-\lambda^2}-\lambda\arcsin\frac{\lambda}{l_2}+2\lambda\arcsin\lambda.$$

Определяя задержку $\left(t_2\frac{R_0}{C}+\frac{L_1}{C}\right)$ прихода излома кривой p_2 (39) в точке $y=\Delta_1$ и численно решив уравнение

$$t_2-\Delta_1-1-\lambda\theta_2-(l_2^2-\lambda^2)^{1/2}+2(1-\lambda^2)^{1/2}-\lambda\arcsin\frac{\lambda}{l_2}+2\lambda\arcsin\lambda=0, \tag{40}$$

найдем параметр λ. Для металлических оболочек, погруженных в воду, параметр λ изменяется мало ($\lambda=0{,}30-0{,}45$), что облегчает отыскание корня уравнения (40).

Регистрируя амплитуду кривой p_2 (39) в точке $y=\Delta_1$ при посылке длительностью Δ_1 и в точке $y=\Delta_2$ — при посылке длительностью Δ_2 и используя формулу (39), найдем

$$C_3=\frac{C}{\lambda}\left\{1-\left(\frac{\rho_3 C_3}{\rho C}\right)^2\left[(1-\lambda^2)^{1/2}-\left[b_2-b(\lambda)\frac{\rho_1 h}{\rho R_0}\frac{1-\varkappa^2}{1+\varkappa^2}\right]^2\right\}^{1/2}, \tag{41}$$

$$b_2=\frac{7}{2}\frac{\Omega-1}{\Delta_2\Omega-\Delta_1},\qquad \Omega=\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^{5/2}\frac{p_2(l_2,\theta_2,\Delta_2)}{p_2(l_2,\theta_2,\Delta_1)}.$$

Здесь и ниже при вычислении коэффициента $\varkappa^2=\frac{1}{2}(1-\nu)k_T^2$ примем $\nu={}^1/_3$, $k_T^2=0{,}86$.

Подставляя значение b_2 (41) в выражение Q (39) и фиксируя $r=l_2$, $y=\Delta_1$, найдем толщину оболочки h. После этого из формул (37), (38) вычислим ρ_1 и ρ_3.

Информация о зондируемом объекте содержится уже в самой «системе» фронтов импульсов. К отраженному и дифрагированным импульсам, характерным для недеформируемого отражателя, добавляются излученные импульсы. Наличие излученных импульсов — верный признак упругой природы отражателя. Появление критических углов (раздвоение волновых фронтов) — дополнительная информация об упругом объекте. По величине критического угла θ_{1*} легко определяется скорость C_1 распространения фронтов безмоментной и изгибной волн по срединной поверхности оболочки.

К сожалению, вблизи критического угла выведенные асимптотические формулы неприменимы (на луче, соответствующем критическому углу, полюса подынтегральной функции (13) проходят через точку перевала, что требует более тонкого подхода к вычислению интеграла (19)).

Отметим, что скорости C_1, C_2 распространения фронтов волн деформации по срединной поверхности оболочки, определяющие критические углы, являются некоторыми «приведенными» скоростями, полученными в результате осреднения процесса распространения волн по толщине оболочки, и не совпадают со скоростями распространения волн расширения и искажения в трехмерной теории упругости.

Однако, используя $\rho_1 h$ (37) и $\rho_3 C_3$ (38) и предполагая возможный в практических случаях диапазон изменения параметров ρ_1, h, ρ_3, C_3, по заранее составленным таблицам значений $\rho_1 h$ и $\rho_3 C_3$ можно вычислить порознь ρ_1 и h, ρ_3 и C_3. В таком случае вся информация об объекте извлекается только из отраженного импульса.

Отметим, что наиболее интересный параметр $\rho_1 h$ (37) не требует высокой точности измерения эхо-сигнала, чего нельзя утверждать относительно измерения других параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Friedlander F. G.* Diffraction of pulses by a circular cylinder. Comm. Pure and Appl. Math., 1954, 7, *4*, 705—732.
2. *Лямшев Л. М.* Незеркальное отражение звука тонкой цилиндрической оболочкой. Акуст. ж., 1956, *2*, 2, 188—193.
3. *Payton R. G.* Transient interaction of an acoustic wave with a circular cylindrical elastic shell. J. Acoust. Soc. America, 1960, *32*, 6, 722—729.
4. *Peralta L. A., Raynor S.* Initial response of fluid-filled elastic, circular cylindrical shell to a shock wave in acoustic medium. J. Acoust. Soc. America, 1964, *36*, 3, 476—486.
5. *Doolittle R. D., Überall H.* Sound scattering by elastic cylindrical shells. J. Acoust. Soc. America, 1966, *39*, 2, 272—275.

6. *Лиходаева Е. А., Шендеров Е. Л.* Периферические волны, возникающие при дифракции плоской звуковой волны на тонкой цилиндрической оболочке. Акуст. ж., 1971, *17*, 1, 79—84.
7. *Huang H., Wang Y. F.* Early-time interaction of spherical acoustic waves and a cylindrical elastic shell. J. Acoust. Soc. America, 1971, *50*, 3, 885—891.
8. *Huang H., Lu Y. P., Wang Y. F.* Transient interaction of spherical acoustic waves, a cylindrical elastic shell, and its internal multidegree-of-freedom, mechanical systems. J. Acoust. Soc. America, 1974, *56*, 1, 4—10.
9. *Векслер Н. Д., Кугсер М. Э.* Асимптотика поля давления в определенном скачке при дифракции плоской акустической волны на упругой цилиндрической оболочке. Прикл. матем. и механ., 1976, *40*, 3, 509—519.
10. *Olver F. W. J.* The asymptotic solutions of linear differential equations of second order for large values of a parameter. Phil. Trans. A., 1955, *247*, 307—327, 328—369.
11. *Langer R. E.* On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to the Bessel functions of large order. Trans. Amer. Math. Soc., 1931, *33*, 23—64.
12. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.

Институт кибернетики
Академии наук ЭССР

Поступила
20 сентября 1976 г.
После переработки
18 мая 1977 г.