АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 4

УДК 534.83

ГАШЕНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ АКТИВНЫМ МЕТОДОМ

В. Ю. Приходько, А. Т. Уколов

Получены соотношения типа ортогональности для изгибных нормальных волн в неоднородной по сечению тонкой упругой полосе. Дано решение задачи о возбуждении такой полосы сосредоточенной силой. Показана возможность активного гашения изгибных колебаний полосы при помощи конечного числа компенсирующих излучателей (сосредоточенных сил), амплитуды которых пропорциональны значениям полного поля смещений, измеряемых в конечном числе точек. Найдены условия запрета на расположение излучателей и приемников.

Задача активного гашения изгибных колебаний тонкой полосы может быть решена точно методом, изложенным в работах [1, 2]. Однако при этом необходимо использовать непрерывные распределения точечных излучателей и приемников четырех типов [3].

Ниже дано приближенное решение задачи активного гашения изгибных колебаний полосы, неоднородной по сечению, с помощью конечного числа точечных приемников и компенсирующих излучателей. При этом оказалось необходимым найти представление поля смещений, создаваемое точечной силой, действующей по нормали к поверхности полосы, в виде ряда по нормальным волнам, при помощи соотношений типа ортогональности для нормальных волн в полосе; в литературе такие соотношения приводятся только для однородных пластин [4].

Установившиеся колебания тонкой полосы в предположении малости прогибов $u(x, y)$ описываются уравнением [5]

$$Lu+\rho h\omega^2 u=0, \quad L=\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}; \tag{1}$$

где $M_x=-\mathscr{D}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$, $M_{yx}=-\mathscr{D}(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $M_y=-\mathscr{D}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$; h — толщина, ρ — плотность, $\mathscr{D}$ — цилиндрическая жесткость, σ — коэффициент Пуассона, ω — частота. Зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$ всюду опускаем.

Соотношения типа ортогональности получим на основании формулы Грина для оператора (1)

$$\iint\limits_B [uLw-wLu]\,dx\,dy=\oint\limits_l\left[uV_n(w)-wV_n(u)+\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}M_n(u)-\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}M_n(w)\right]dl+\sum_i\Delta_i[wM_{nt}(u)-uM_{nt}(w)]. \tag{2}$$

Здесь u, w — достаточно гладкие функции, B — ограниченная область с кусочно-гладкой границей l, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к l, V_n и M_n — операторы нормальных перерезывающих сил и изгибающих моментов

$$V_n=Q_n-\frac{\partial M_{nt}}{\partial l}; \qquad M_n=M_x n_x^2+2M_{yx}n_x n_y+M_y n_y^2,$$

где n_x, n_y — проекции вектора $\mathbf{n}$ на соответствующие оси системы координат, Q_n и M_{nt} определяются формулами

$$M_{nt}=(M_x-M_y)n_x n_y+M_{yx}(n_y^2-n_x^2), \tag{3}$$

$$Q_n=Q_x n_x+Q_y n_y,$$

$$Q_x=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}, \qquad Q_y=\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial x};$$

$\Delta_i[f(l)]=f(l_i+0)-f(l_i-0)$; l_i — точка излома контура l.

Пусть функции u, w удовлетворяют уравнению (1) в области B. Тогда

$$\sum_i \Delta_i[wM_{nt}(u)-uM_{nt}(w)]+ \tag{4}$$

$$+\oint_l\left[uV_n(w)-wV_n(u)+\frac{\partial w}{\partial n}M_n(u)-\frac{\partial u}{\partial n}M_n(w)\right]dl=0.$$

Соотношения ортогональности вытекают из этой формулы.

Рассмотрим полосу $\Omega=\{-\infty<x<\infty,\ -a\leqslant y\leqslant a\}$, на кромках которой выполняются какие-либо идеальные условия, т. е. каждая кромка может быть либо свободной, либо свободно опертой, либо зажатой [5]. Если функции u, w удовлетворяют одному из этих краевых условий и уравнению (1) при $x, y\in\Omega$, то

$$\int_{-a}^{a}\left[uV_n(w)-wV_n(u)+\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}M_n(u)-\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}M_n(w)\right]dl+ \tag{5}$$

$$+2[wM_{yx}(u)-uM_{yx}(w)]\Big|_{-a}^{a}=\text{const}.$$

Для доказательства применим формулу (4) к области $\Omega_{cd}=\{c<x<d,\ -a\leqslant y\leqslant a\}$ и заметим, что интегралы при $y=\pm a$ обращаются в нуль в силу краевых условий. Внеинтегральные члены преобразуем, воспользовавшись соотношениями (3).

Нормальные волны в упругой полосе имеют вид [6] $u(x, y, \alpha)=\varphi_\alpha(y)e^{i\alpha x}$, где функция u удовлетворяет уравнению (1) и соответственным краевым условиям на кромках полосы. Подставив в формулу (5) $u=\varphi_\alpha(y)e^{i\alpha x}$ и $w=\varphi_\beta(y)e^{i\beta x}$, находим, что левая часть формулы (5) равна

$$i(\beta-\alpha)e^{i(\alpha+\beta)x}\int_{-a}^{a}\mathscr{D}[(\alpha^2+\beta^2)\varphi_\alpha\varphi_\beta+2\varphi_\alpha'\varphi_\beta'-\sigma(\varphi_\alpha\varphi_\beta)'']dy$$

и не должна зависеть от x. Следовательно, должно выполняться условие

$$\int_{-a}^{a}\mathscr{D}[(\alpha^2+\beta^2)\varphi_\alpha\varphi_\beta+2\varphi_\alpha'\varphi_\beta'-\sigma(\varphi_\alpha\varphi_\beta)'']dy=0, \qquad \alpha^2-\beta^2\neq 0. \tag{6}$$

Это и есть искомое соотношение ортогональности.

Применим соотношение (6) для решения задачи о возбуждении полосы сосредоточенной силой, приложенной в точке (x', y') и направленной по нормали к плоскости полосы. Поле смещений $G(x, x', y, y')$, созданное единичной силой, удовлетворяет уравнению (1) с правой частью $\delta(x-x', y-y')$, соответственным краевым условиям на кромках полосы и условиям погашаемости на бесконечности [5].

Функцию G будем искать в виде ряда по нормальным волнам

$$(7)\qquad G=\begin{cases}\sum\limits_{\alpha_n\in\sigma^+} C_n^+ e^{i\alpha_n x}\varphi_n(y), & x>x',\\ \sum\limits_{\alpha_n\in\sigma^+} C_n^- e^{-i\alpha_n x}\varphi_n(y), & x<x'.\end{cases}$$

Здесь $C_n^{\pm}$ — коэффициенты, подлежащие определению, σ^+ — множество всех α_n таких, что при введении затухания в среде $\operatorname{Im}\alpha_n>0$.

Для нахождения коэффициента C_m^+ применим к функциям G, $u(x, y, -\alpha_m)=e^{-i\alpha_m x}\varphi_m(y)$ формулу Грина (3) в области $\Omega_{cd}=\{c\leqslant x\leqslant d, -a\leqslant y\leqslant a\}$. Учитывая уравнения, которым удовлетворяют G и u, имеем

$$(8)\qquad \iint\limits_{\Omega_{cd}}[uLG-GLu]\,dx\,dy=u(x', y', -\alpha_m)=$$
$$=(\Gamma_d u)(x', y')-(\Gamma_c u)(x', y'),$$

так как интеграл по кромкам полосы равен нулю в силу краевых условий. Здесь введены обозначения

$$(9)\qquad (\Gamma u)(x', y')=2[GM_{yx}(u)-uM_{yx}(G)]\Big|_{-a}^{a}+$$
$$+\int\limits_{-a}^{a}\left[uV_x(G)-GV_x(u)+\frac{\partial G}{\partial x}M_x(u)-\frac{\partial u}{\partial x}M_x(G)\right]dy.$$

Подставляя выражение (7) в формулу (9) с учетом соотношения ортогональности (6), получаем

$$(10)\qquad (\Gamma_c u)(x', y')=0,\quad (\Gamma_d u)(x', y')=2iC_m^+ g_m^2\alpha_m,$$
$$g_m^2=2\int\limits_{-a}^{a}\mathscr{D}[\alpha_m^2\varphi_m^2+(1-\sigma)(\varphi_m')^2-\sigma\varphi_m\varphi_m'']\,dy.$$

Коэффициенты C_m^+ определяем из формулы (8) с учетом выражений (10). Аналогично находятся коэффициенты C_m^-. Окончательное выражение для функции G имеет вид

$$(11)\qquad G(x, y, x', y')=\sum_{\alpha_m\in\sigma^+}\frac{\varphi_m(y')\varphi_m(y)}{2i\alpha_m g_m^2}e^{i\alpha_m|x-x'|}.$$

Формулы (6) и (11) справедливы также для однородных упругих полос и хорошо согласуются с результатами работ [4, 6].

Пусть полоса Ω возбуждается источником, описывающимся функцией $f(x, y)$ в правой части уравнения (1), причем $f=f^++f^-$, а $f^+\equiv0$, $x<x^+$, $x^+>0$; $f^-\equiv0$, $x<x^-$, $x^-<0$.

Задача активного гашения заключается в том, чтобы в области $x>0$ погасить поле u^-, созданное источником f^-, не возмущая при этом поле в области $x<0$. Иными словами, нужно создать компенсирующее поле

$$(12)\qquad u^*=\begin{cases}-u^-, & x>\varepsilon>0,\quad \varepsilon<x^+;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Как уже отмечалось, точное решение этой задачи требует непрерывного распределения компенсирующих источников. Для построения приближенного решения с использованием конечного числа компенсирующих источников, воспользуемся тем обстоятельством, что поля u^+, u^-, созданные источниками f^+, f^- соответственно, могут быть представлены в виде рядов

по нормальным волнам

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
u^- &= \sum_{j=1}^{N} A_j\varphi_j(y)\,e^{i\alpha_j x}+\tilde{u}^-(x,y), \quad x>x^-,\\
u^+ &= \sum_{j=1}^{N} B_j\varphi_j(y)\,e^{-i\alpha_j x}+\tilde{u}^+(x,y), \quad x<x^+.
\end{aligned}
$$

Здесь A_j, B_j — коэффициенты, зависящие от характера возбуждения полосы, N — количество α_j таких, что $\operatorname{Im}\alpha_j=0$ (для данной полосы N зависит только от частоты), $\tilde{u}^{\pm}$ — суммы неоднородных волн. Поскольку неоднородные волны затухают по мере удаления от источника, мы рассмотрим следующую задачу: при помощи конечного числа компенсирующих источников и приемников смещений нужно создать поле $u^*(x,y)$, удовлетворяющее соотношению (12) с точностью до неоднородных волн. При этом полагаются известными частота ω, число N однородных волн, функции φ_j и числа α_j.

Для создания требуемого компенсирующего поля возьмем $2N$ точечных источников сил, нормальных к плоскости пластины. Источники разместим в точках $(x_s, y_s)\in\{0<x<\varepsilon, -a<y<a\}$, $s=1,2,\ldots,2N$. Произвольные пока амплитуды сил a_s подлежат определению в процессе решения задачи. Для получения необходимой информации о поле u^- (о котором нам практически ничего неизвестно) возьмем $2N$ точечных приемников смещений и поместим их в точках $(\tilde{x}_r, \tilde{y}_r)\in\{x^-<-\varepsilon<x<0, -a<y<a\}$. Показания приемников будем обозначать через m_r.

Воспользовавшись представлением поля точечной силы (11), мы можем с требуемой точностью написать поле u^*, созданное компенсирующими излучателями, в следующем виде:

$$
(14)\qquad u^*(x,y)=\sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{s=1}^{2N} a_s\frac{\varphi_j(y_s)}{2i\alpha_j g_j^2}\right]\varphi_j(y)\,e^{i\alpha_j|x-x_s|}
$$

Написав условие (12) в виде равенств соответственных коэффициентов в разложениях (13), (14) полей по нормальным волнам, получаем первые $2N$ уравнений для определения амплитуд a_s

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{2N} a_s\frac{\varphi_j(y_s)}{2i\alpha_j g_j^2}\,e^{-i\alpha_j x_s}+A_j=0, \qquad j=1,2,\ldots,N,\\
&\sum_{s=1}^{2N} a_s\frac{\varphi_j(y_s)}{2i\alpha_j g_j^2}\,e^{i\alpha_j x_s}=0.
\end{aligned}
$$

Считая, что приемники не реагируют на неоднородные волны, с учетом условия (12) и представления (13) напишем еще $2N$ уравнений

$$
(16)\qquad \sum_{j=1}^{N} A_j\varphi_j(\tilde{y}_r)\,e^{i\alpha_j\tilde{x}_r}+\sum_{j=1}^{N} B_j\varphi_j(\tilde{y}_r)\,e^{-i\alpha_j\tilde{x}_r}=m_r, \qquad r=1,2,\ldots,2N.
$$

Уравнения (16) могут быть сколь угодно точными при достаточном удалении приемников от источников имеющихся полей.

Таким образом, мы получили линейную систему (15), (16) из $4N$ уравнений с $4N$ неизвестными (амплитуды a_s, коэффициенты A_j, B_j). Отметим, что выбранное число источников и приемников минимально. Действительно, взяв общее число приемников и источников меньше, чем $4N$, мы получим систему уравнений, в которой неизвестных больше,

чем уравнений. Далее, рассматривая систему (16), замечаем, что приемников должно быть не меньше, чем $2N$.

Определитель Δ системы уравнений (15), (16) может быть приведен к виду

$$\Delta=(-1)^N\left[\prod_{j=1}^{N}\alpha_j^2 g_j^4\right]^{-1}\det\|\psi_{n_1}(x_m, y_m)\|\det\|\psi_{n_1}(\tilde{x}_m, \tilde{y}_m)\|, \tag{17}$$

где

$$\psi_{n_1}(x_m, y_m)=\begin{cases}\varphi_n(y_m)e^{i\alpha_n x_m}, & 1\leqslant n_1\leqslant N;\quad n=n_1;\\ \varphi_n(y_m)e^{-i\alpha_n x_m}, & N<n_1\geqslant 2N;\ n=n_1-N.\end{cases}$$

При $\Delta\neq 0$ амплитуды a_r определяются из системы уравнений (15), (16) по правилу Крамера $a_r=\Delta_r/\Delta$, $r=1, 2, \ldots, 2N$. Приемники и компенсирующие излучатели нельзя располагать так, чтобы определитель Δ обращался в нуль, например, только в узлах нормальных волн. Отметим, что если $f^+(x, y)\equiv 0$, $(x, y)\in\Omega$ (т. е. существуют волны, бегущие только направо), то для гашения N нормальных волн достаточно использовать N приемников и $2N$ компенсирующих излучателей.

Существенной особенностью приведенного выше решения задачи активного гашения, как следует из формулы (12), является минимизация акустической обратной связи между приемниками и излучателями. Можно показать, аналогично работе [7], что рассматриваемая схема активного гашения устойчива относительно малых помех в работе приемников и излучателей.

Авторы благодарят В. В. Тютекина и М. В. Федорюка за постановку задачи и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малюжинец Г. Д.* Нестационарные задачи дифракции с финитной правой частью. Тр. Акуст. ин-та, 1971, *15*, 124—139.
2. *Федорюк М. В.* О гашении звука в волноводах активным методом. Акуст. ж., 1973, *19*, 2, 281—285.
3. *Приходько В. Ю.* Об активном гашении изгибных колебаний стержней и пластин. Акуст. ж., 1976, *22*, 3, 462—464.
4. *Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д.* Колебания упругой полосы. В сб. Методы виброизоляции машин и присоединенных конструкций. М., «Наука», 1975, 12—42.
5. *Морз Ф.* Колебания и звук. М., Гостехтеориздат, 1949.
6. *Коненков Ю. К., Наумкина Н. И., Тартаковский Б. Д.* Исследование вынужденных изгибных колебаний упругой полосы. Акуст. ж., 1965, *11*, 3, 341—350.
7. *Урусовский И. А.* Об активной звукоизоляции в волноводе. Акуст. ж., 1977, *23*, 2, 304—312.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступиал
6 сентября 1977 г.