АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 6

УДК 534.232.46.001.24

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ-ИЗЛУЧАТЕЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЫ

М. К. Бушер

В работе приводятся уравнения движения цилиндрического пьезокерамического преобразователя, позволяющие определить поле его излучения и ряд основных параметров. Преобразователь рассматривается как тонкое кольцо, состоящее из пьезоэлементов и пассивных вставок с различными свойствами. Уравнения движения выводятся на основе смешанного вариационного принципа Рейсснера.

При динамических расчетах современных цилиндрических преобразователей их представляют обычно в виде упругого тонкого кольца. Кольцо может иметь неоднородную структуру как в радиальном, так и в тангенциальном направлениях. Учет неоднородности в радиальном направлении не представляет принципиальных трудностей и может быть осуществлен, например, путем введения комплекса приведенных параметров кольца [1]. Такой расчет многослойного кольца не отличается от расчета однородного по радиусу кольца. Учет неоднородности в тангенциальном направлении представляет гораздо более сложную динамическую задачу. В работе [2] было показано, что свободные колебания колец с периодической структурой можно рассчитывать на основе применения принципа Рейсснера [3]. В данной работе принцип Рейсснера применяется для получения уравнений движения цилиндрического пьезокерамического преобразователя, работающего в режиме излучения и имеющего неоднородные параметры в тангенциальном направлении.

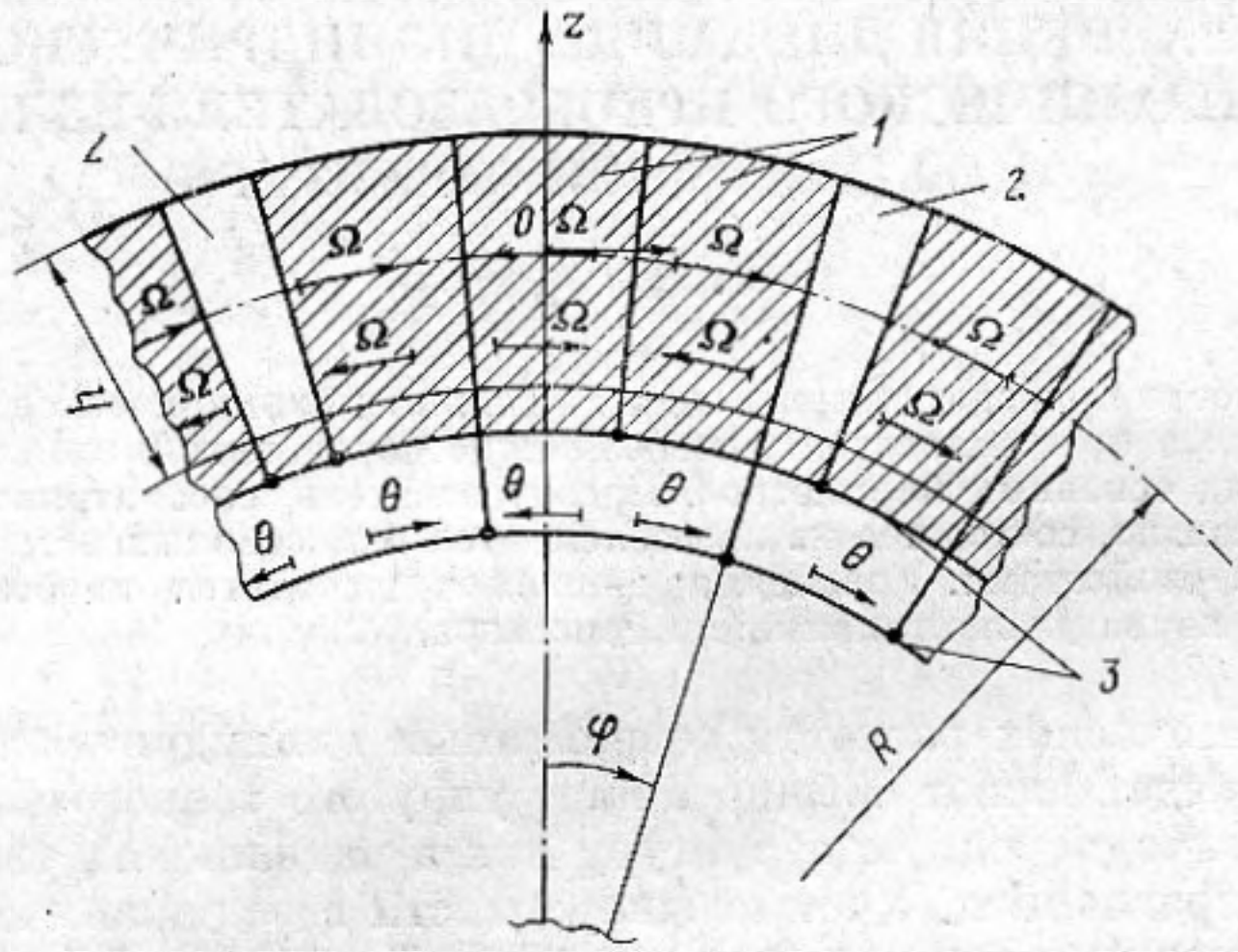
Рассмотрим тонкое кольцо единичной высоты со средним радиусом R и толщиной h, состоящее из пьезоэлементов и пассивных вставок (фиг. 1). Каждый пьезоэлемент имеет две посеребренные грани-электроды, ориентированные в радиальных плоскостях. Эти электроды служат как для предварительной поляризации пьезоэлемента, так и для подведения возбуждающего колебания напряжения. Предполагается, что угловой размер пьезоэлемента настолько мал, что радиальной составляющей вектора поляризации по сравнению с тангенциальной можно пренебречь. Пьезоэлементы в кольце могут быть заполяризованы, в частности, и таким образом, что направление вектора поляризации изменяется на противоположное вдоль радиуса кольца. Угловые размеры всех пьезоэлементов считаются равными, со средним расстоянием между электродами $\delta_э$. В настоящей работе анализируется случай, когда к электродам всех пьезоэлементов приложено одинаковое электрическое гармоническое напряжение U с частотой ω. При выводе уравнений движения допускается, что любой пьезоэлемент и вставка могут иметь свои индивидуальные физико-механические параметры.

В силу сделанных ограничений относительно толщины кольца и малости углового размера пьезоэлемента все электрические и механические величины, описывающие состояние кольца, имеют тангенциальное на-

правление, и задача является одномерной. Уравнения состояния для данной точки кольца скалярны и могут быть записаны в виде

$$\zeta = E^{-1}\sigma + d_{33}\Omega E^{(эл)},$$
$$D = \varepsilon E^{(эл)} + d_{33}\Omega\sigma, \tag{1}$$

где σ и ζ — тангенциальное механическое напряжение и тангенциальная деформация в пьезоэлементе соответственно; D и $E^{(эл)}$ — электрическая индукция и напряженность электрического поля в пьезоэлементе соответственно; E — модуль упругости материала пьезоэлемента, измеряемый при



Фиг. 1. Структура неоднородного кольца. *1* — пьезоэлементы, *2* — пассивные вставки, *3* — электрическое соединение пьезоэлементов в кольце

$E^{(эл)}=0$; ε — диэлектрическая проницаемость материала пьезоэлемента, измеряемая при $\sigma=0$; d_{33} — продольный пьезомодуль материала пьезоэлемента; Ω — функция, учитывающая направление вектора поляризации по отношению к направлению угловой координаты: $\Omega=+1$, если эти направления совпадают, и $\Omega=-1$, если они противоположны.

В дальнейшем анализе будут рассматриваться моды колебаний, пространственный период которых сравним с длиной окружности кольца, поэтому, учитывая малость углового размера пьезоэлемента, напряженность электрического поля в нем можно определить выражением

$$E^{(эл)} \simeq \delta_э^{-1}\theta U, \tag{2}$$

где θ — функция, учитывающая направление внешнего поля по отношению к направлению угловой координаты: $\theta=+1$, если эти направления совпадают, и $\theta=-1$, если они противоположны.

Подставляя выражение (2) в уравнение (1), получим

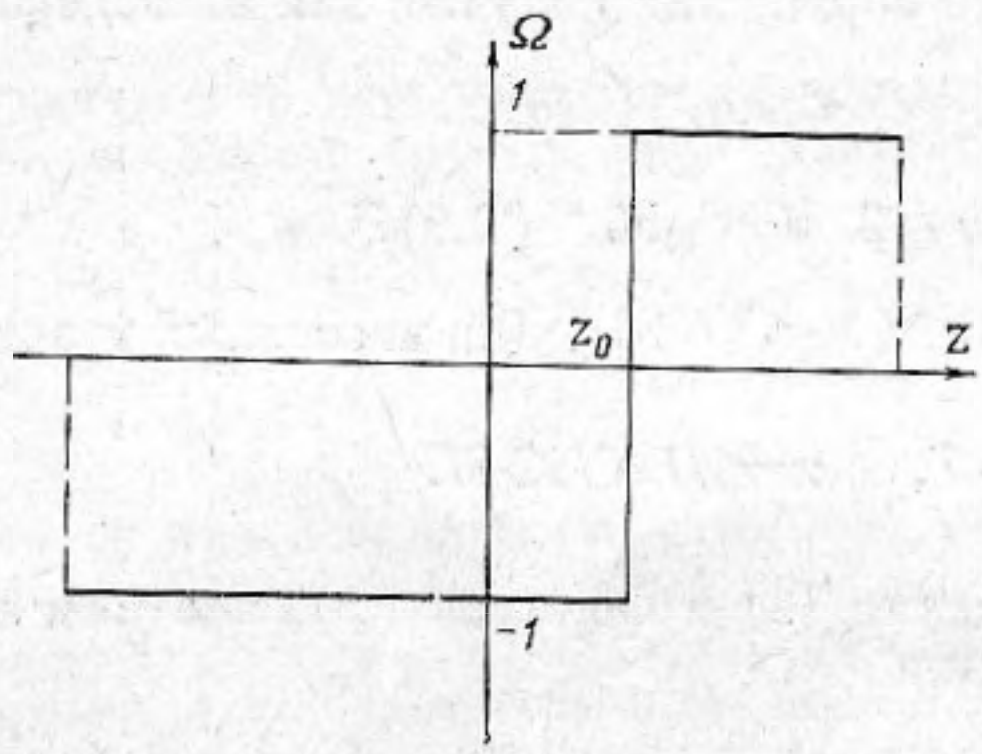
$$\zeta = E^{-1}\sigma + d_{33}\delta_э^{-1}(\Omega\theta)U,$$
$$D = \varepsilon\delta_э^{-1}\theta U + d_{33}\Omega\sigma. \tag{3}$$

Заметим, что формулу (3) в силу гармонического характера возбуждения кольца можно рассматривать не только как связь между мгновенными значениями величин U, σ, ζ и D, но и как связь между их комплексными амплитудами. Механические и электрические потери в материале кольца могут быть формально учтены путем введения комплексных значений E и ε.

Примем, как обычно, за начало отсчета радиальной координаты z среднюю линию кольца и направим ее по нормали к внешней границе кольца (фиг. 1). На основании гипотезы плоских нормалей, справедливой для тонкого кольца, деформацию можно выразить в виде линейной функции координаты z:

$$\zeta=\zeta_0+\varkappa z, \tag{4}$$

где ζ_0 и $\varkappa$ характеризуют деформацию растяжения и изгиба средней линии кольца.



Фиг. 2. График функции поляризации по толщине кольца

С помощью соотношений (3) можно записать выражение для механических напряжений: в пьезокерамических участках кольца

$$\sigma_к=E_к(\zeta_0+z\varkappa)-d_{33}E_к\delta_э^{-1}(\Omega\theta)U \tag{5}$$

и в пассивных участках

$$\sigma=E(\zeta_0+z\varkappa).$$

Проинтегрируем механическое напряжение по всей толщине кольца. В результате сила T в сечении кольца выразится формулами

$$T=E_кh\zeta_0-d_{33}E_к\delta_э^{-1}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Omega\,dzU$$

для пьезокерамических участков и

$$T=Eh\zeta_0$$

для пассивных участков кольца. Если соотношения (5) умножить на z и проинтегрировать по толщине кольца, получится выражение для изгибающего момента M в кольце:

$$M=E_кh^3/12\cdot\varkappa-d_{33}E_к\delta_э^{-1}\theta\int\limits_{-h/2}^{h/2}\Omega z\,dzU$$

для пьезокерамических участков и

$$M=Eh^3/12\cdot\varkappa$$

для пассивных участков кольца. Учитывая, что функция Ω может менять знак по толщине кольца, представим ее ступенчатой функцией координа-

ты z (фиг. 2). Соответственно интегралы от нее будут равны

$$\int_{-h/2}^{h/2} \Omega\, dz = h(-z_0/h/2)\Omega_0, \qquad \int_{-h/2}^{h/2} \Omega z\, dz = \frac{h^2}{4}(1-z_0^2/h^2/4)\Omega_0.$$

В этих формулах $\Omega_0=\pm 1$ является уже функцией только угловой координаты: $\Omega_0=+1$, если Ω имеет вид функции, показанный на фиг. 2, и $\Omega_0=-1$ для зеркально отраженной относительно оси z функции. Разрешим выражения для силы и изгибающего момента в кольце относительно ζ_0 и $\varkappa$. В результате обращения получим для пьезокерамических участков

$$\zeta_0=1/E_к\cdot hT+d_{33}a\delta_э^{-1}(\Omega_0\theta)U,$$

(6)

$$\varkappa=1/E_к h^3/12\cdot M+d_{33}b\delta_э^{-1}(\Omega_0\theta)U,$$

где $a=-z_0/h/2$, $b=3/h(1-z_0^2/h^2/4)$. Для пассивных участков

$$\zeta_0=\frac{1}{Eh}T, \qquad \varkappa=1/Eh^3/12\cdot M.$$

Подставляя выражения (6) в формулы (5), получим для пьезокерамических участков кольца

(7) $$\sigma_к=1/E_к hT+z\cdot 1/E_к h^3/12\cdot M+$$
$$+d_{33}E_к\delta_э^{-1}[(a+zb)(\Omega_0\theta)-(\Omega\theta)]U;$$

а для пассивных участков

$$\sigma=1/EhT+z\cdot 1/Eh^3/12M.$$

Для получения энергетических характеристик преобразователя, например коэффициента полезного действия, необходимо иметь выражение для силы тока в преобразователе. Ток в отдельном пьезоэлементе найдем с помощью известного выражения

$$I_э=j\omega\int_{-h/2}^{h/2} D\, dz.$$

Индукцию D после подстановки во второе уравнение системы (3) выражения (7) можно представить в виде

$$D=\varepsilon(1-k_{33}^2)\delta_э^{-1}\theta U+d_{33}^2E_к\theta_э^{-1}(a+zb)\Omega(\Omega_0\theta)U+$$
$$+d_{33}\Omega(1/hT+z\cdot 1/h^3/12\cdot M),$$

где $k_{33}^2=E_к d_{33}^2/\varepsilon$ — квадрат коэффициента электромеханической связи, который может быть и комплексной величиной, если $E_к$ и ε комплексные.

Производя интегрирование по толщине кольца, получим

(8) $$I_э=g_э[(1-k_{33}^2)+k_{33}^2(a^2+h^2/12b^2)\theta U+j\omega d_{33}\Omega_0(aT+bM),$$

где $g_э=j\omega\delta_э^{-1}\varepsilon h$ — емкостная проводимость пьезоэлемента.

Полный ток через преобразователь равен сумме токов во всех n пьезоэлементах, к которым подведено электрическое напряжение: $I=\sum_{i=1}^{n} I_{эi}\theta_i$

(здесь учтена ориентация тока в каждом элементе по отношению к приложенному полю). Выражение для тока в преобразователе теперь можно записать следующим образом:

$$I=\sum_{i=1}^{n} g_{\text{э}i}A_iU+j\omega d_{331}(\Omega_{0i}\theta_i)(a_iT_i+b_iM_i), \tag{9}$$

где $A_i=(1-k_{331}^2)+k_{331}^2(a^2+b^2h^2/12)$.

Приступим теперь непосредственно к выводу уравнений движения преобразователя.

Уравнения динамического равновесия для цилиндрического преобразователя, работающего в режиме акустического излучения, имеют вид

$$\begin{aligned} &L_v(T, M)+\omega^2Rh\rho v=0,\\ &L_w(T, M)-\omega^2Rh\rho w+Rp_{\text{ак}}=0, \end{aligned} \tag{10}$$

где w и v — нормальное и тангенциальное перемещение точек средней линии кольца соответственно; L_v и L_w — сумма проекций векторов внутренних сил в сечениях элемента кольца на тангенциальное и нормальное направление соответственно; ρ — плотность в сечении кольца; $p_{\text{ак}}$ — звуковое давление, создаваемое колеблющимся преобразователем. Выражения для L_v и L_w имеют вид

$$L_v=T'+1/RM',\ L_w=T-1/RM'',$$

где штрих обозначает производную по углу φ. Деформации растяжения ζ_0 и изгиба $\varkappa$ связаны с перемещениями w и v известными соотношениями:

$$\zeta_0=1/R(w+v'),\ \varkappa=1/R^2(v'-w''). \tag{11}$$

Так как параметры материала, входящие в уравнения (6) и (10), являются координатными функциями ступенчатого типа, то все обычно применяющиеся методы решения уравнений для однородных упругих систем (точные и вариационные) оказываются неэффективными в силу слабой сходимости рядов Фурье для ступенчатых функций. В данной ситуации наиболее подходящим оказывается применение смешанного вариационного принципа Рейсснера [3]. Согласно этому принципу, первая вариация функционала y для кольца может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \delta J=&\int_0^{2\pi}(L_v+\omega^2Rh\rho v)\,\delta v\,d\varphi+\\ &+\int_0^{2\pi}(L_w-\omega^2Rh\rho w+Rp_{\text{ак}})\,\delta w\,d\varphi-\int_0^{2\pi}(\zeta_0-\zeta_0^{(\text{у})}-\zeta_0^{(\text{эл})})\,\delta T\,d\varphi-\\ &-\int_0^{2\pi}(\varkappa-\varkappa^{(\text{у})}-\varkappa^{(\text{эл})})\,\delta M\,d\varphi=0, \end{aligned} \tag{12}$$

где ζ_0 и $\varkappa$ с верхними индексами «у» — чисто упругие, а с индексами «эл» — пьезоэлектрические части деформаций растяжения и изгиба, определяемые из соотношений (6).

Из выражения (12) видно, что в отличие от метода Галеркина варьированию подвергаются не только уравнения равновесия, но и уравнения состояния. Аппроксимируем варьируемые величины отрезками ряда Фурье:

$$
\begin{aligned}
&w=w_0+\sum_{i=1}^{N}\left(w_i^{(1)}\cos i\varphi+w_i^{(2)}\sin i\varphi\right);\\
&v=\sum_{i=1}^{N}\left(v_i^{(1)}\sin i\varphi+v_i^{(2)}\cos i\varphi\right);\\
&T=T_0+\sum_{i=1}^{N}\left(T_i^{(1)}\cos i\varphi+T_i^{(2)}\sin i\varphi\right);\\
&M=M_0+\sum_{i=1}^{N}\left(M_i^{(1)}\cos i\varphi+M_i^{(2)}\sin i\varphi\right).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Не снижая общности дальнейшего рассмотрения задачи, введем в целях упрощения громоздких преобразований дополнительное ограничение. Пусть преобразователь имеет общую плоскость механической и электрической симметрии, проходящую через центр кольца и перпендикулярную его плоскости. Для преобразователя, работающего в режиме излучения, это условие практически всегда выполняется. Благодаря этому ограничению величины с верхним индексом (2) в формулах (13) обращаются в нуль, а интегрирование в формуле (12) может выполняться в пределах от 0 до π.

Проведем анализ интегралов, входящих в формулу (12). При подстановке туда выражений (13) и (6) интегралы можно разбить на три группы. Интегралы

$$\int_0^{\pi} L_v\delta v\,d\varphi,\quad \int_0^{\pi} L_w\delta w\,d\varphi,\quad \int_0^{\pi}\zeta_0\delta T\,d\varphi,\quad \int_0^{\pi}\varkappa\delta M\,d\varphi$$

являются интегралами от взаимно ортогональных функций и на установленном промежутке и в результате после интегрирования двойное суммирование исчезает. Интегралы

$$\int_0^{\pi}\rho v\,\delta v\,d\varphi,\quad \int_0^{\pi}\rho w\,\delta w\,d\varphi,\quad \int_0^{\pi}\left(\zeta^{(\text{у})}+\zeta_0^{(\text{эл})}\right)\delta T\,d\varphi,\quad \int_0^{\pi}\left(\varkappa^{(\text{у})}+\varkappa^{(\text{эл})}\right)\delta M\,d\varphi,$$

кроме тригонометрических функций, содержат произвольные функции параметров, в силу чего после интегрирования двойное суммирование сохраняется. Кроме того, имеется интеграл $R\int_0^{\pi} p_{\text{ак}}\,\delta w\,d\varphi$. В случае, если часть наружной цилиндрической поверхности преобразователя в целях создания определенной направленности покрыта экраном, область интегрирования сужается до $0\div\pm\psi$ (область не занятая экраном) и в результате после интегрирования двойное суммирование также сохраняется. (При этом пред-

полагается, что с внутренней поверхности преобразователь полностью экранирован.)

В силу независимости варьируемых величин и линейной независимости функций разложений (13) все вариации δw_s, δv_s, δT_s, δM_s также являются независимыми. Поэтому после интегрирования множитель при каждой вариации также должен обращаться в нуль. Все интегралы формулы (12), за исключением $R\int\limits_0^{\psi} p_{\text{ак}}\,\delta w\,d\varphi$, определены предыдущими выражениями. Нетрудно видеть, что по своей физической сущности интеграл $2R\int\limits_0^{\psi} p_{\text{ак}}\,\delta w\,d\varphi$ представляет вариацию акустической энергии излучения, которую на основании работы [4] можно выразить через сопротивления излучения z_{is} для каждой данной моды колебаний и относительные скорости следующим образом:

$$\delta W_{\text{ак}}=2R\int\limits_0^{\psi} p_{\text{ак}}\,\delta w\,d\varphi=(-j\omega)\sum_{s=0}^{N}\sum_{i=0}^{N} z_{is}w_i\,\delta w_s.$$

Произведем подстановку выражений v, w, T, M в вариацию функционала (12). В результате интегрирования и приравнивания нулю коэффициентов при каждой вариации получим разрешающую систему уравнений в виде

$$x_0=\varpi^2\left(w_0+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_{i0}^{(\rho)}w_i\right)+(j\varpi)\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\tilde{z}_{0i}w_i \qquad (s=0),$$

$$x_s+s^2\Delta^2y_s=\varpi^2\sum_{i=0}^{N}\lambda_{is}^{(\rho)}w_i+(j\varpi)\sum_{i=0}^{N}\tilde{z}_{si}w_i \qquad (s=1,2,\ldots,N), \tag{14}$$

$$sx_s+s\Delta^2y_s=\varpi^2\sum_{i=1}^{N}\gamma_{is}^{(\rho)}v_i \quad (s=1,2,\ldots,N),$$

$$w_0-\left(x_0+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_{i0}^{(E)}x_i\right)=\alpha_0^{(a)}\Gamma U \qquad (s=0),$$

$$w_s+sv_s-\sum_{i=0}^{N}\lambda_{is}^{(E)}x_i=\alpha_s^{(a)}2\Gamma U \qquad (s=1,2,\ldots N),$$

$$s^2w_s+sv_s-\sum_{i=0}^{N}\lambda_{is}^{(E)}y_i=\alpha_s^{(b)}\frac{R}{h}2\Gamma U \quad (s=1,2,\ldots,N), \tag{15}$$

$$y_0=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_{i0}^{(E)}y_i-\alpha_0^{(b)}\frac{R}{h}\Gamma U \quad (s=0).$$

Принятые в этих уравнениях обозначения сведены в таблицу. Кроме того, введены следующие дополнительные обозначения:

$$x=\frac{R}{h}\frac{1}{\bar{E}}T,\qquad y=\frac{1}{\bar{E}h\Delta^2}M,\qquad \tilde{z}_{si}=\frac{1}{\sqrt{\bar{E}\bar{\rho}}\,\pi h}z_{si},$$

$$\tilde{\omega}^2=\omega^2R^2\frac{\bar{\rho}}{\bar{E}},\qquad \Delta^2=\frac{h^2}{12R^2}\qquad \Gamma=\frac{R\bar{d}_{33}}{\delta_э}$$

Полученные линейные алгебраические системы (14) и (15) содержат $4N+3$ неизвестных и состоят из $4N+3$ уравнений. Коэффициенты систем комплексны и потому для решения требуется обращение матриц $8N+6$ порядка. Уравнения позволяют по заданному электрическому напряжению U с учетом характера подключения пьезоэлементов $(\alpha_s^{(a)}, \alpha_s^{(b)})$ в кольце найти коэффициенты разложения w_s и v_s для компонент перемещения w и v и коэффициенты разложения x_s и y_s для силы T и момента M в коль-

Символ	Выражение	Символ	Выражение
$\frac{1}{\bar{E}}$	$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{E}\,d\varphi$	$\lambda_{is}^{(\rho)}$	$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)\cos i\varphi\cos s\varphi\,d\varphi$
$\bar{\rho}$	$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \rho\,d\varphi$	$\lambda_{is}^{(E)}$	$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\bar{E}}{E}\right)\cos i\varphi\cos s\varphi\,d\varphi$
$\bar{d}_{33}$	$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d_{33}\,d\varphi$	$\alpha_s^{(a)}$	$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{d_{33}}{\bar{d}_{33}}\right)(\Omega_0\theta)\,a(\varphi)\cos s\varphi\,d\varphi$
$\gamma_{is}^{(\rho)}$	$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)\sin i\varphi\sin s\varphi\,d\varphi$	$\alpha_s^{(b)}$	$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{d_{33}}{\bar{d}_{33}}\right)(\Omega_0\theta)\,hb(\varphi)\cos s\varphi\,d\varphi$

це. Эти величины позволяют определить акустическое поле преобразователя, излучаемую им акустическую энергию, а с помощью формулы (9) — и его полную электрическую проводимость, т. е. в конечном итоге вычислить акустико-электрический к.п.д. преобразователя.

В заключение остановимся на выборе величины N — количества членов аппроксимирующего ряда. Как и во всякой вариационной задаче, этот вопрос можно решить по результатам конкретных расчетов. Априорно можно лишь сказать, что в случае аппроксимации колебаний неоднородной системы модами колебаний, характеризующими перемещения и механические напряжения аналогичной однородной системы, количество членов ряда будет определяться степенью отличия в параметрах между отдельными частями системы. Результаты вычислений, приведенные в работах [2, 5], показывают, что для расчета первых собственных частот составных колец и стержней с точностью до трех знаков достаточно двух-трех членов ряда даже при том условии, что модули упругости соседних частей системы отличаются не менее, чем на порядок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник. Прочность, устойчивость, колебания, т. 2, М., «Машиностроение», 1968.
2. *Бушер М. К.* Свободные колебания упругого кольца периодической структуры. Акуст. ж., 1976, *22*, 4, 498–504.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости, М., «Наука», 1970.
4. *Аронов Б. С.* Об электромеханической схеме электроакустического преобразователя. Вопросы радиоэлектроники, сер. XII общетехническая, 1961, вып. 26, 65–90.
5. *Немат-Насер С.* Гармонические волны в сложных и композиционных материалах. Прикладная механика, 1972, 3, 213–215.

Поступила
15 декабря 1975 г.
После вторичной доработки
27 января 1978 г.