АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 6

УДК 539.3:534.1

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко

Описан метод точного решения задачи об установившихся вынужденных колебаниях цилиндра конечной длины. Основой метода является возможность построения из известных частных решений уравнений движения в цилиндрических координатах таких выражений для смещений (напряжений), которые позволяют полностью удовлетворить граничным условиям как на торцах, так и на боковой поверхности цилиндра. Указан способ решения возникающих при этом бесконечных систем, обеспечивающий высокую точность определения собственных частот и форм колебаний. Разработанный метод использован для теоретического объяснения экспериментально обнаруженных «дублетов» и «триплетов» в высокочастотной области спектра собственных частот цилиндра. Проведено сравнение расчетных и экспериментальных данных.

Несмотря на то что колебания конечных цилиндров изучались в большом числе теоретических и экспериментальных работ, сделано сравнительно мало для получения ясного представления о том, что происходит в случаях, отличных от наиболее простых. Такие наиболее простые случаи встречаются при большой длине волны по сравнению с наименьшим характерным размером цилиндра и допускают полное качественное и количественное описание в рамках теории стержней или теории тонких пластин. В настоящее время накоплен обширный экспериментальный материал [1—3 и др.], который не удается удовлетворительно систематизировать не только в рамках указанных простейших теорий, но и с привлечением данных о характере волновых движений в бесконечном слое и цилиндре, полученных в рамках трехмерной теории упругости.

Физическая задача о спектре собственных частот и формах колебаний твердого цилиндра конечной длины имеет строгую математическую формулировку. В связи с этим в процессе ее рассмотрения выделяются два важных этапа — разработка методов решения соответственных уравнений и систематизация и обобщение результатов конкретных расчетов. Несмотря на очевидную важность и трудность первого этапа, в настоящее время особую актуальность приобретает работа, направленная на объяснение обнаруженных экспериментально особенностей спектра и форм колебаний конечных цилиндров в области сравнительно высоких частот.

Что касается методов решения задачи о колебаниях цилиндра конечной длины, то в настоящее время наибольшее развитие и применение получили два подхода. Оба они базируются на использовании давно известных [4, 5] частных решений уравнений движения элемента твердого тела в цилиндрических координатах. Если ось OZ цилиндрической системы координат совмещена с осью цилиндра длиной $2H$ и радиуса a, а плоскость $z=0$ равноудалена от его торцов, то упомянутые частные решения для гармонического во времени процесса имеют вид

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
u_1&=AI_1(q_1r)\left\{\begin{matrix}\cos kz\\ -\sin kz\end{matrix}\right\}, \quad w_1=-A\frac{k}{q_1}I_0(q_1r)\left\{\begin{matrix}\sin kz\\ \cos kz\end{matrix}\right\},\\
u_2&=BI_1(q_2r)\left\{\begin{matrix}\cos kz\\ -\sin kz\end{matrix}\right\}, \quad w_2=-B\frac{q_2}{k}I_0(q_2r)\left\{\begin{matrix}\sin kz\\ \cos kz\end{matrix}\right\},
\end{aligned}
$$

где $q_i^2=k^2-\gamma_i^2$, $\gamma_1=\omega a/V_D$, $\gamma_2=\omega a/V_S$, V_D и V_S — скорости волн расширения и сдвига соответственно, ω — круговая частота, u и w — соответственно радиальная и осевая компоненты смещений.

Выражения (1) удовлетворяют уравнениям движения Ламе при произвольных значениях k и числовых множителей A и B, а выбор одновременно верхнего или нижнего значения тригонометрического множителя позволяет в ряде случаев отдельно рассмотреть симметричные и антисимметричные относительно срединной плоскости $z=0$ случаи движения цилиндра.

К выбору значений параметра k можно подойти двояко. Можно потребовать, чтобы соответствующие по закону Гука частным решениям (1) выражения для напряжений удовлетворяли однородным граничным условиям на боковой поверхности цилиндра или на его торцевых поверхностях. При этом получаются известные трансцендентные уравнения Похгаммера — Кри или Рэлея — Лэмба, доставляющие для каждого значения частоты бесконечный набор вещественных, чисто мнимых и комплексных корней [6], а соответствующая этому набору последовательность решений (1) образует систему так называемых однородных решений. Такие решения широко используются при рассмотрении волновых процессов в полубесконечных и конечных цилиндрах [3, 7].

С другой стороны, выбирая следующую последовательность значений $k_n=n\pi/h$ ($h=H/a$, $n=0, 1, 2, \ldots$), мы получаем возможность подбором величин A_n и B_n удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности цилиндра. Если использовать такие две последовательности значений $k_{ji}^2=\gamma_i^2-\lambda_j^2$ ($i=1, 2$; $j=0, 1, 2, \ldots$), где λ_j — корни уравнения $J_1(\lambda)=0$, то с помощью набора решений (1) можно удовлетворить граничным условиям на торце цилиндра. Совокупность решений первого и второго типов образует общее решение граничной задачи для цилиндра конечной длины в том смысле, что заведомо обладает достаточным произволом для удовлетворения граничных условий в смещениях или напряжениях на всей поверхности цилиндра. Решения такого типа строились, например, в работах [8—10]. Для случая симметричного относительно плоскости $z=0$ деформирования цилиндра окончательные выражения для компонентов вектора смещений имеют вид

$$
\begin{aligned}
u&=A_0J_1(\gamma_1r)+\sum_{n=1}^{\infty}[A_nI_1(q_1r)+B_nI_1(q_2r)]\cos k_nz-\\
&-\sum_{j=1}^{\infty}\left(C_j\frac{\lambda_j}{p_1}\operatorname{ch}p_1z+D_j\frac{p_2}{\lambda_j}\operatorname{ch}p_2z\right)J_1(\lambda_jr),\\
w&=C_0\sin\gamma_1z-\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\frac{k_n}{q_1}I_0(q_1r)+B_n\frac{q_2}{k_n}I_0(q_2r)\right]\sin k_nz+\\
&+\sum_{j=1}^{\infty}(C_j\operatorname{sh}p_1z+D_j\operatorname{sh}p_2z)J_0(\lambda_jr),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $p_i^2=\lambda_j^2-\gamma_i^2$, A_n, B_n, C_j, D_j — произвольные постоянные. Аналогичную структуру будут иметь представления вектора смещений в методе однородных решений, когда полный набор частных решений включает в себя все распространяющиеся и нераспространяющиеся моды бесконечного цилиндра или слоя. Более того, подчинение общих решений требованиям, соответствующим граничным условиям на поверхности цилиндра, в обоих случаях приводит к бесконечным системам линейных алгебраических

уравнений. На этом этапе решение задачи преимущества подхода, использующего выражения (2), заключаются в том, что удается получить явный вид коэффициентов указанной бесконечной системы. Для случая граничных условий

$$\frac{1}{2G}\sigma_r=\frac{1}{2G}\tau_{rz}=0,\quad r=1;\quad \frac{1}{2G}\sigma_z=f_0e^{i\omega t},\quad \frac{1}{2G}\tau_{rz}=0,\quad z=\pm h, \tag{3}$$

бесконечная система принимает вид

$$\begin{gathered}
x_0\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}J_0(\gamma_1)-\frac{J_1(\gamma_1)}{\gamma_1}\right]+y_0\frac{\nu\sin\gamma_1 h}{(1-2\nu)\gamma_1 h}=\\
=\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2\nu}{2(1-2\nu)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{y_j}{\lambda_j^2p_1^2},\\
x_0\frac{2\nu J_1(\gamma_1)}{1-2\nu}+y_0\frac{1-\nu}{1-2\nu}\cos\gamma_1 h-\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2\nu}{1-2\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{k_n^2q_1^2}=f_0,\\
x_nP_n(q)+\frac{\gamma_1^2}{1-2\nu}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{y_j}{\lambda_j^2+q_1^2}\left(\frac{2k_n^2}{\lambda_j^2+q_2^2}-\frac{\gamma_2^2\nu}{\lambda_j^2}\right)=\frac{y_0\nu}{1-2\nu}\frac{2\gamma_1\sin\gamma_1 h}{hq_1^2},\\
y_jQ_j(p)+\frac{\gamma_1^2}{1-2\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{k_n^2+p_1^2}\left(\frac{2\lambda_j^2}{k_n^2+p_2^2}-\frac{\gamma_2^2\nu}{k_n^2}\right)=\frac{x_0\nu}{1-2\nu}\frac{2\gamma_1J_1(\gamma_1)}{p_1^2}.
\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь приняты обозначения:

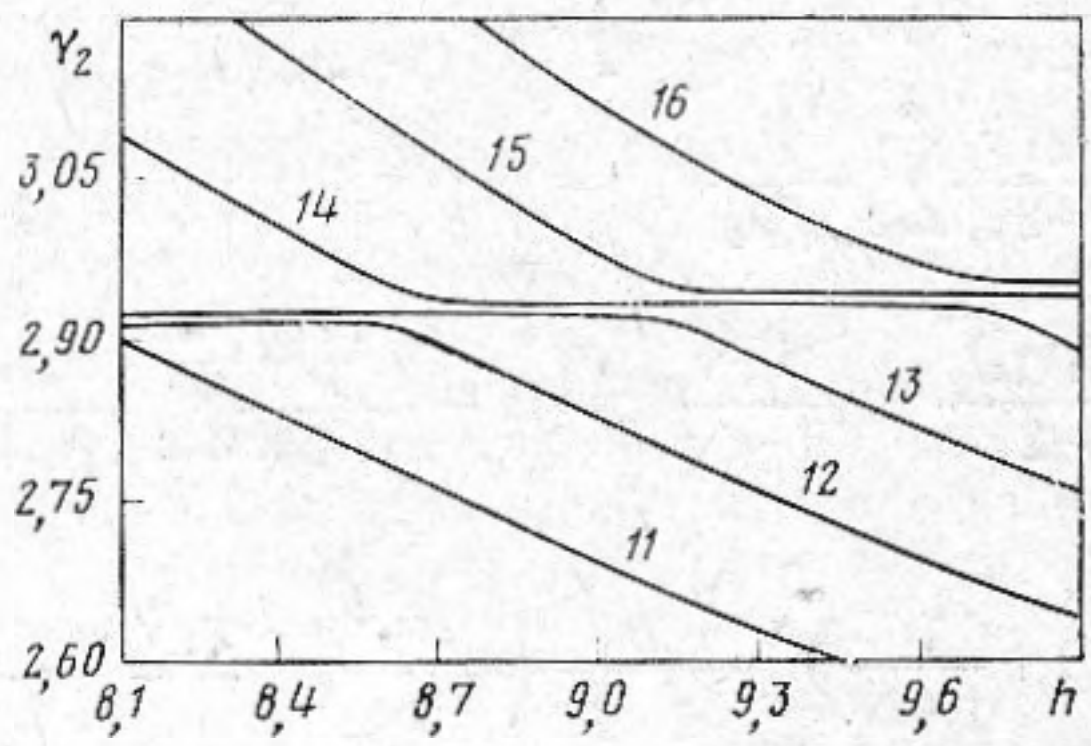
$$\begin{gathered}
x_0=A_0\gamma_1,\quad x_n=(-1)^nB_nI_1(q_2),\quad A_n=-B_n\frac{k_n^2+q_2^2}{2k_n^2}\frac{I_1(q_2)}{I_1(q_1)},\\
y_0=C_0\gamma_1,\quad y_j=D_j\frac{\operatorname{sh}p_1h}{h}J_0(\lambda_j),\quad C_j=-D_j\frac{\lambda_j^2+p_2^2}{2\lambda_j^2}\frac{\operatorname{sh}p_2h}{\operatorname{sh}p_1h},\\
P_n(q)=q_2\frac{I_0(q_2)}{I_1(q_2)}-\frac{(k_n^2+q_2^2)^2}{4k_n^2q_1}\frac{I_0(q_1)}{I_1(q_1)}-\frac{\gamma_2^2}{2k_n^2},\\
Q_j(p)=h\left[p_2\operatorname{cth}p_2h-\frac{(\lambda_j^2+p_2^2)^2}{4\lambda_j^2p_1}\operatorname{cth}p_1h\right].
\end{gathered} \tag{5}$$

При получении системы (4) исключались те значения частоты ω, для которых какая-либо из величин $I_1(q_1)$, $\operatorname{sh}p_1h$ обращается в нуль. При этих частотах один из коэффициентов B_n или D_j равен нулю. Однако соответственные постоянные A_n или C_j остаются произвольными, что обеспечивает полноту решений (2) и в этом случае. Такие значения ω не связаны с какими-либо физическими особенностями, а требуют некоторого изменения формы записи системы (4).

Указанное выше преимущество при написании бесконечной системы (4) нельзя признать настолько существенным, чтобы отдать предпочтение излагаемому подходу. Гораздо более важным является то, что в процессе решения бесконечных систем удается существенно продвинуться в изучении асимптотических свойств неизвестных. В рассматриваемом случае системы (4) имеют место следующие равенства [11]:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=-\lim_{j\to\infty}y_j=a_0=\text{const}. \tag{6}$$

Знание характера поведения неизвестных с ростом номера существенно используется как при решении системы (4), так и при вычислении характеристик напряженно-деформированного состояния. Основанный на использовании равенств (6) алгоритм решения математической задачи, возникающей при рассмотрении колебаний цилиндра, позволяет получить достаточную точность оценок собственных частот и форм колебаний в очень широком диапазоне изменения геометрии и частоты как для симметричных, так и для антисимметричных относительно срединной плоскости $z=0$ форм колебаний [12, 13].



Участок частотного спектра цилиндра; $\nu=0{,}29$. Цифры указывают порядковый номер собственных частот

Широкие возможности теоретического анализа колебаний цилиндра конечной длины в рамках указанного подхода могут быть использованы в разных направлениях. В данной работе мы используем расчетные данные для частичного анализа богатого экспериментального материала, приведенного в работе [14], что дает основание для неформальной иллюстрации возможностей метода, а также для обсуждения некоторых специфических особенностей спектра и форм колебаний цилиндра конечной длины.

Если проследить за ходом кривых на фигуре, отражающих изменение собственной частоты соответствующего по порядку номера, то для каждой из них характерно наличие плато, т. е. такой области изменения геометрии цилиндра, в которой значение собственной частоты практически не изменяется с изменением безразмерной длины h. Эти плато в рассматриваемом случае $\nu=0{,}29$ в совокупности заполняют узкую полосу вблизи частоты $\gamma_2=2{,}90$. В общем случае значение этой частоты зависит от коэффициента Пуассона ν материала. Характерно, что независимо от номера кривой, которой принадлежит плато, собственные формы колебаний однотипны и отличаются локализацией зоны больших амплитуд смещений вблизи угловых окружностей цилиндра. Возбуждение колебаний на этих формах получило название краевого резонанса и впервые наблюдалось экспериментально в работе [1].

Значение частоты краевого резонанса мало чувствительно к типу симметрии собственной формы. В связи с этим в спектре собственных частот цилиндра, представленном на фигуре, имеются близко расположенные участки плато. Очень важной особенностью части спектра, связанной с краевым резонансом, является то, что центры плато каждой симметричной формы соответствуют краям плато для антисимметричных форм.

При анализе экспериментальных данных для диапазона частот, включающего частоту краевого резонанса $\gamma_2^{(e)}$, в зависимости от геометрии цилиндра можно встретить следующие две типичные ситуации. Если геометрия цилиндра такова, что соответствующее значение h (например, $h\approx 8{,}8$) находится вдали от центров плато, то в спектре частот будут на-

блюдаться «дублеты», т. е. две очень близкие друг к другу частоты, отвечающие краевому резонансу. Когда значение h соответствует краям плато (на фигуре $h \approx 9{,}3$), в спектре собственных частот будут наблюдаться «триплеты».

Что касается форм колебаний, то положение здесь таково. В случае «дублетов» обе формы имеют характерные для краевого резонанса особенности, однако относятся к различным по симметрии относительно плоскости $z=0$ типам колебаний. В случае же «триплетов» лишь одна из них, а именно отвечающая центру плато, является характерной для краевого резонанса. Две другие не обладают выраженной локализацией области интенсивных движений вблизи угловых точек цилиндра и относятся к одному типу симметрии.

В такую схему почти полностью качественно вписываются экспериментальные данные работы [14] (таблицы II—IV) в диапазоне частот, существенно не превышающих частоту $\gamma_2^{(e)}$. Исключение составляет лишь найденный экспериментально «дублет» при $\gamma_2=2{,}556$, который не может быть предсказан в рамках модели идеально упругого тела строго круговой цилиндрической формы.

Для полноты иллюстрации возможностей как экспериментальной техники, так и описанного теоретического способа определения собственных частот проведем количественное сравнение расчетных данных с данными таблицы II [14]. Для стального стержня ($\nu=0{,}29$) с $2H=8{,}885$ *см*, $2a=0{,}953$ *см* ($h=9{,}323$) имеется «триплет» со следующими значениями частоты: $\gamma_2^{(13)}=2{,}880$ (2,881), $\gamma_2^{(14)}=2{,}921$ (2,920) и $\gamma_2^{(15)}=2{,}935$ (2,931). Здесь в скобках приведены экспериментальные данные.

Отметим, что авторы работы [14] для объяснения полученных результатов использовали аппроксимацию волнового поля в конечном цилиндре первой распространяющейся модой бесконечного цилиндра. Такой подход позволяет весьма точно определить собственные частоты не только ниже, но и несколько выше (вплоть до частоты γ_2^*, при которой появляется вторая распространяющаяся мода в бесконечном цилиндре) частоты краевого резонанса, однако наличие плато в спектре предсказать нельзя.

Следует отметить, что проведенное в области частот $\gamma_2<\gamma_2^*$ сопоставление расчетных экспериментальных данных для других рассмотренных в работе [14] случаев обнаруживает столь же хорошее согласование. Вместе с тем для проведения сопоставления в области частот $\gamma_2>\gamma_2^*$ требуется прежде всего выполнить большую работу по отработке методики получения расчетных данных и их систематизации с учетом сложностей, связанных со сгущением спектра частот в окрестности частоты радиального резонанса соответственного бесконечного цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Oliver J.* Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide — band, short — duration pulse technique. J. Acoust. Soc. America, 1957, *29*, 2, 189–194.
2. *Зарембо Л. К., Пиотух В. Б., Секоян С. С.* Экспериментальное исследование структуры собственных продольных колебаний стержней и акустического резонансного детектирования. Акуст. ж., 1973, *19*, 5, 778–781.
3. *Zemanek J.* An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder. J. Acoust. Soc. America, 1972, *52*, 1, 265–283.
4. *Pochhammer L.* Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten Schwingungen in einem unbergrawzten isotropen Kreiscylinder. J. für reine und angew. Math., 1876, *81*, 4, 324–336.
5. *Chree C.* Longitudinal vibration of a circular bar. Quart. J. Pure and Appl. Math., 1886, *21*, 83, 287–298.
6. *Микер Т., Мейтцлер А.* Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинах. В сб.: Физическая акустика (под ред. У. Мэзона), *1*, ч. А., М., «Мир», 1966, 140–203.
7. *Чернышев К. В., Шегай В. В.* Собственные колебания твердых цилиндров. Акуст. ж., 1977, *23*, 4, 627–631.
8. *Kalisky S.* The three — dimensionals dynamic problem of a cylinder of finite length. Arch. Mech. Stosow., 1960, *12*, 1, 71–84.

9. *Власов А. Г.* Метод переопределенных рядов в некоторых краевых задачах математической физики. В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн (под ред. Г. И. Петрашеня), *3*, ЛГУ, 1959, 403–463.
10. *Hutchinson J. R.* Axisymmetric vibrations of a free finite — length rod. J. Acoust. Soc. America, 1972, *52*, 1, 233–240.
11. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Анализ динамической напряженности и частотных характеристик круглой плиты в рамках трехмерной теории упругости. В сб.: Теория оболочек и пластин (под ред. А. Л. Гольденвейзера и Н. В. Колкунова), М., «Наука», 1973, 436–442.
12. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* О собственных частотах осесимметрично колеблющейся толстой плиты. Прикл. механика, 1974, *10*, 11, 81–87.
13. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Высокочастотные осесимметричные колебания круглых дисков. Прикл. механика, 1976, *12*, 12, 60–68.
14. *Booker R. E., Sagar E. H.* Velocity dispersion of the lowestorder longitudinal mode in finite rods of circular cross section. J. Acoust. Soc. America, 1971, *49*, 5, 1491–1498.

Институт механики
Академии наук УССР

Поступила
3 февраля 1978 г.