АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 6

УДК 534.87

МОДАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ШУМОВОГО ПОЛЯ В КЛИНЕ

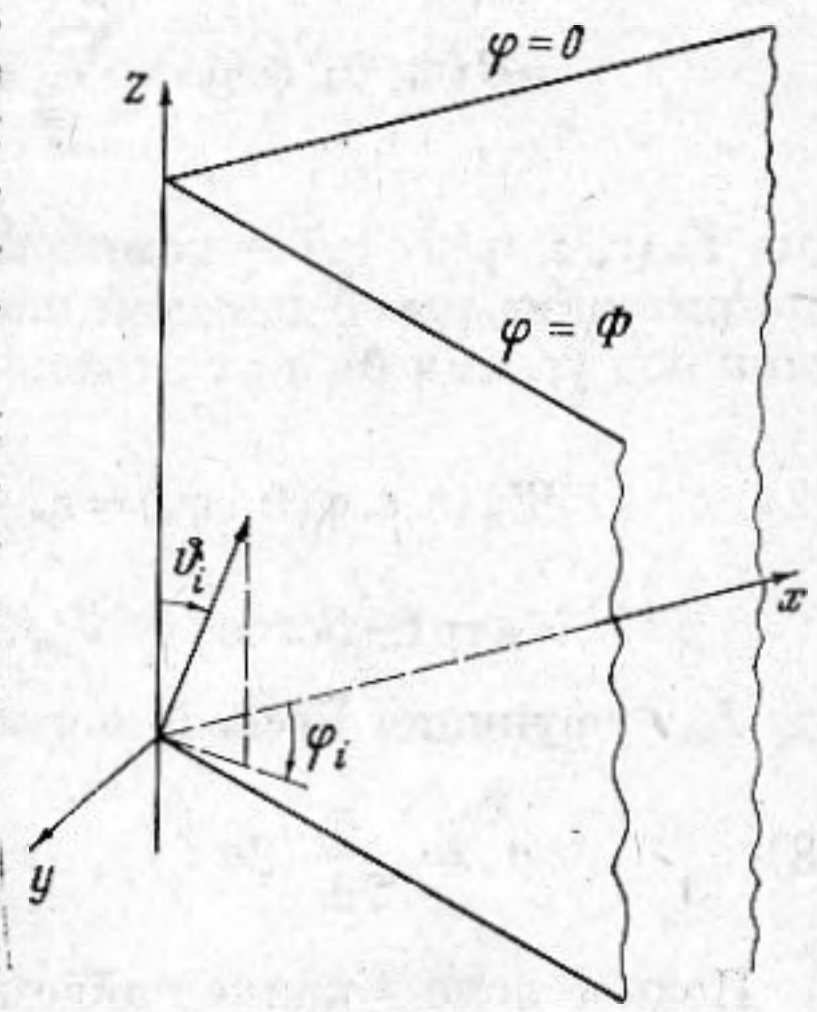
А. М. Карновский

Рассматривается шумовое поле в клине со смешанными краевыми условиями. Поле в каждой точке представляется в виде совокупности нормальных волн, возбуждаемых падающими плоскими или сферическими волнами. Определена пространственная корреляционная функция шумового поля, приведены результаты численного расчета.

При решении задачи синтеза оптимальных трактов обработки сигналов и оценки их помехоустойчивости необходимо располагать данными о пространственной корреляционной функции сигналов и помех. Настоящая работа посвящена определению пространственной корреляционной функции шумовой помехи в клиновидной области с одной мягкой и одной жесткой границей. Развитый метод определения параметров шумового поля может быть распространен и на другие случаи волноводов.

В ряде работ шумовое поле в неограниченной области или в полупространстве представляется в виде совокупности плоских или сферических волн, приходящих в рассматриваемую область из различных направлений [1—3]. Ниже, в отличие от этих работ, шумовое поле в пространстве с теми или иными границами представляется в виде совокупности нормальных волн, возбужденных падающими плоскими или сферическими волнами.

Точное решение задачи о звуковом поле в клине, возбужденном плоской монохроматической волной, впервые получено Зоммерфельдом [4], далее эта задача рассматривалась в работах Малюжинца и его школы для случая как плоских, так и сферических волн [5—7] и в других работах [8].



Фиг. 1. Геометрия задачи

Выберем цилиндрическую систему координат (r, z, φ) и расположим клин, как показано на фиг. 1. Плоскость $\varphi=0$ соответствует мягкой границе, $\varphi=\Phi$ — жесткой границе, где Φ — угол раствора клина. Обозначим $(\rho, \vartheta, \varphi)$ — сферические координаты точек внутри клина $(0\leqslant\rho\leqslant\infty;\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi;\ 0\leqslant\varphi\leqslant\Phi)$. Будем рассматривать случайные стационарные волны, предполагая, что они создаются точечными источниками, расположенными внутри клина в точках $\{\rho_i, \vartheta_i, \varphi_i\}$ $(0\leqslant\vartheta_i\leqslant\pi;\ 0\leqslant\varphi_i\leqslant\Phi)$ на достаточном удалении от рассматриваемой области клина $(\rho\ll\rho_i)$. Падающие волны можно предполагать как сферическими, так (при $\rho_i\to\infty$) и плоскими. В последнем случае (ϑ_i, φ_i) означают направление прихода падающей однородной плоской волны. Таким образом, при $\rho_i\to\infty$ падаю-

щие волны, создаваемые точечными источниками с координатами $\{\rho_i, \vartheta_i, \varphi_i\}$, распределенными внутри клина, заменяются плоской волной, распространяющейся в направлении $\{\vartheta_i, \varphi_i\}$ $(0 \leqslant \vartheta_i \leqslant \pi;\ 0 \leqslant \varphi_i \leqslant \Phi)$. Ограничение φ_i углом раствора клина Φ можно обосновать также и тем, что при $\varphi_i > \Phi$ плоская волна проникает в глубь клина после значительного числа отражений, что при реальных границах существенно снижает ее вклад в поле.

Таким образом, в качестве источников, создающих падающие волны, нами применяются модели, аналогичные принятым Кроном и Шерманом [1].

Определим пространственную корреляционную функцию для случая падающих плоских волн; кроме того, приведем полученное нами окончательное выражение пространственной корреляционной функции и для сферических, достаточно удаленных, шумовых источников. В последнем случае в качестве исходных используются выражения, полученные в работах [6, 7]. Как будет показано, наблюдается значительное сходство пространственных корреляционных функций шумовых полей, возбуждаемых падающими плоскими и сферическими волнами.

Представим комплексную амплитуду случайной стационарной волны, падающей в клин из телесного угла $d\sigma_i = \sin\vartheta_i d\vartheta_i d\varphi_i$ в виде

$$(1)\qquad d\Psi_i(\vartheta_i, \varphi_i) = B(\omega;\ \vartheta_i,\ \varphi_i)\exp\left[-ik(x\sin\vartheta_i\cos\varphi_i + y\sin\vartheta_i\sin\varphi_i + z\cos\vartheta_i)\right]d\sigma_i,$$

где $B(\omega;\ \vartheta_i, \varphi_i)$ — случайное поле.

Падающая волна (1) возбуждает в клине случайное стационарное поле $d\Psi(r, z, \varphi/\vartheta_i, \varphi_i)$, которое может быть представлено в виде совокупности нормальных волн:

$$d\Psi(r, z, \varphi/\vartheta_i, \varphi_i) = B(\omega; \vartheta_i, \varphi_i)\, d\sigma_i \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(r, z, \varphi/\vartheta_i, \varphi_i),$$

где $\Psi_n(r, z, \varphi/\vartheta_i, \varphi_i)$ — комплексная амплитуда n-й моды, возбужденной детерминированной плоской волной единичной амплитуды, падающей в клин под углами ϑ_i, φ_i; согласно работам [4, 5, 8],

$$(2)\qquad \Psi_n(r, z, \varphi/\vartheta_i, \varphi_i) = \varepsilon_n \frac{2\pi}{\Phi}\exp\left(-i\mu_n\frac{\pi}{2}\right)\sin\mu_n\varphi\sin\mu_n\varphi_i \times$$
$$\times\exp(-ikz\cos\vartheta_i)\, J_{\mu n}(kr\sin\vartheta_i),$$

где $J_{\mu n}$ — функция Бесселя первого рода порядка μ_n,

$$(3)\qquad \mu_n = \frac{\pi}{2\Phi}(2n+1), \quad n = 0, 1\ldots$$

Полное поле в клине найдем суммированием полей, возбужденных падающими волнами, поступающими в клин из различных телесных углов $d\sigma_i$, т. е.

$$(4)\qquad \Psi(r, z, \varphi) = \int_{\sigma} B(\omega; \vartheta_i, \varphi_i) \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(r, z, \varphi/\vartheta_i, \varphi_i)\, d\sigma_i,$$

где σ определяет диапазон изменения телесных углов прихода плоских волн.

Определим теперь пространственную корреляционную функцию $K(\omega, \omega'; \mathbf{x}, \mathbf{x}')$ шумового поля (4) для точек $\mathbf{x}: \{r, z, \varphi\}$ и $\mathbf{x}': \{r', z', \varphi'\}$. Так

как

$$K(\omega, \omega'; \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \Psi(\omega; \mathbf{x}) \Psi^*(\omega'; \mathbf{x}') \rangle,$$

то

$$K(\omega, \omega'; \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\sigma} \int_{\sigma} \langle B(\omega; \vartheta_i, \varphi_i) B^*(\omega'; \vartheta_i', \varphi_i') \rangle \times$$

$$\times \Psi_n(\omega; \mathbf{x}/\vartheta_i, \varphi_i) \Psi_m^*(\omega'; \mathbf{x}'/\vartheta_i, \varphi_i) d\sigma_i \, d\sigma_i',$$

где $d\sigma_i' = \sin \vartheta_i' d\vartheta_i' d\varphi_i'$.

Если падающие волны, приходящие из различных направлений (ϑ_i, φ_i) и $(\vartheta_i', \varphi_i')$, некоррелированы, то с учетом представления дельта-функции на единичной сфере [9] получаем

$$\langle B(\omega; \vartheta_i, \varphi_i) B^*(\omega'; \vartheta_i', \varphi_i') \rangle =$$

$$= Q(\omega, \omega'; \vartheta_i, \varphi_i) \frac{1}{\sin \vartheta_i} \delta(\vartheta_i - \vartheta_i') \delta(\varphi_i - \varphi_i'),$$

при этом

$$K(\omega, \omega'; \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\sigma} Q(\omega, \omega'; \vartheta_i, \varphi_i) \times$$

$$\times \Psi_n(\omega; \mathbf{x}/\vartheta_i, \varphi_i) \Psi_m^*(\omega'; \mathbf{x}'/\vartheta_i, \varphi_i) d\sigma_i.$$

Для стационарного поля

$$Q(\omega, \omega'; \vartheta_i, \varphi_i) = g(\omega; \vartheta_i, \varphi_i) \delta(\omega - \omega'),$$

где $g(\omega; \vartheta_i, \varphi_i)$ — спектрально-угловая плотность дисперсии падающей волны. Следовательно,

$$K(\omega, \omega'; \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\omega - \omega') \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\sigma} g(\omega; \vartheta_i, \varphi_i) \times$$

$$\times \Psi_n(\omega; \mathbf{x}|\vartheta_i, \varphi_i) \Psi_m^*(\omega'; \mathbf{x}'|\vartheta_i, \varphi_i) d\sigma_i.$$

Так как спектральная плотность дисперсии (пространственная корреляционная функция)

$$g(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, \omega'; \mathbf{x}, \mathbf{x}') d\omega',$$

то

$$g(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\sigma} g(\omega; \vartheta_i, \varphi_i) \times$$

$$\times \Psi_n(\omega; \mathbf{x}/\vartheta_i, \varphi_i) \Psi_m^*(\omega; \mathbf{x}'/\vartheta_i, \varphi_i) d\sigma_i,$$

или, учитывая формулу (2),

$$g(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{4\pi^2}{\Phi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_m \sin \mu_n \varphi \sin \mu_m \varphi' \times \tag{5}$$

$$\times \exp\left[i \frac{\pi}{2} (\mu_n - \mu_m)\right] \int_0^{\pi} \int_0^{\Phi} g(\omega; \vartheta_i, \varphi_i) \sin \mu_n \varphi_i \sin \mu_m \varphi_i \times$$

$$\times \exp[-ik(z - z') \cos \vartheta_i] J_{\mu n}(kr \sin \vartheta_i) J_{\mu m}(kr' \sin \vartheta_i) \sin \vartheta_i d\vartheta_i \, d\varphi_i.$$

Если интенсивность падающей волны не зависит от углов падения, т. е. $g(\omega;\ \vartheta_i,\ \varphi_i)=g(\omega)$, выражение (5) существенно упрощается, поскольку с учетом формулы (3)

$$\int_0^{\Phi} \sin\mu_n\varphi_i \sin\mu_m\varphi_i d\varphi_i = \begin{cases} \dfrac{\Phi}{2}, & n=m, \\ 0 & n\neq m. \end{cases}$$

При этом

$$(6)\qquad g(\omega;\mathbf{x},\mathbf{x}')=g(\omega)\frac{2\pi^2}{\Phi}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n^2\sin\mu_n\varphi\sin\mu_n\varphi'\times$$

$$\times\int_0^{\pi}\exp[-ik(z-z')\cos\vartheta_i]J_{\mu n}(kr\sin\vartheta_i)J_{\mu n}(kr'\sin\vartheta_i)\sin\vartheta_i d\vartheta_i.$$

Заметим, что, согласно формуле (6), шумовое поле по координате z (т. е. при $r=r'$, $\varphi=\varphi'$) является однородным.

Поскольку формула (6) описывает в общем случае неоднородное стационарное шумовое поле, то нормированная пространственная корреляционная функция будет

$$(7)\qquad \rho(\omega;\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}')=g(\omega;\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}')/\sqrt{g(\omega;\ \mathbf{x},\ \mathbf{x})g(\omega;\ \mathbf{x}',\ \mathbf{x}')}.$$

Если шумовое поле создается достаточно удаленными точечными источниками, расположенными в точках $\{\rho_i,\ \vartheta_i,\ \varphi_i\}$; $(0\leqslant\varphi_i\leqslant\Phi;\ k\rho_i\sin\vartheta_i\gg1)$, то, проведя аналогичные выкладки, можно показать, что

$$(8)\qquad g(\omega;\mathbf{x},\mathbf{x}')=g(\omega)\frac{8\pi\sqrt[3]{4}}{\Phi}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\mu_n\varphi\sin\mu_n\varphi'\times$$

$$\times\int_0^{\pi}\exp[-ik(z-z')\cos\vartheta_i]f_n(kr\sin\vartheta_i)f_n(kr'\sin\vartheta_i)\sin\vartheta_i d\vartheta_i,$$

где

$$f_n(kr\sin\vartheta_i)=v(t_n)/\sqrt[3]{kr\sin\vartheta_i};\quad t_n=\sqrt[3]{2}(\mu_n-kr\sin\vartheta_i)/\sqrt[3]{kr\sin\vartheta_i};$$

$v(t_n)$ — функция Эйри.

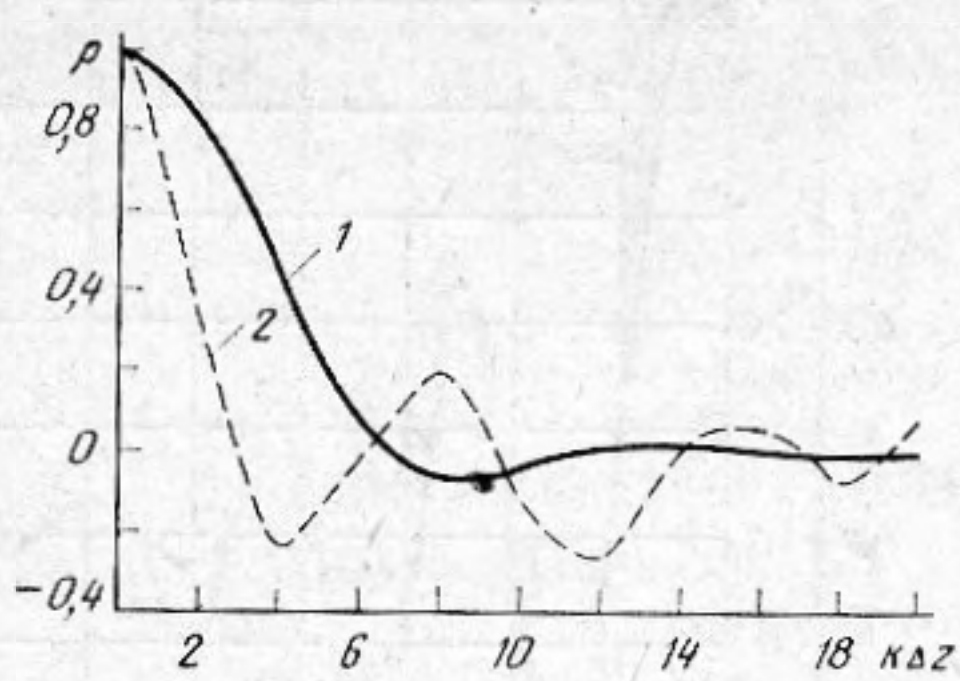
При выводе этого выражения в качестве исходного определения моды $\Psi_n(\omega;\ \mathbf{x}/\vartheta_i,\ \varphi_i)$ вместо формулы (2) применено выражение, полученное в работах [6, 7]. Заметим, что при $\sin\vartheta_i$, равном 0 или π, асимптотические выражения в [7] становятся недействительными, однако это не отражается на значении функции $g(\omega;\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}')$, определенной согласно формуле (8), так как вклад соответственных источников в выражение для $g(\omega;\ \mathbf{x},\ \mathbf{x}')$, согласно формуле (8), равен нулю.

Выражение (6) отличается от выражения (8) лишь постоянным множителем и заменой функции $J_{\mu n}(kr\sin\vartheta_i)$ на функцию $f_n(kr\sin\vartheta_i)$. Сходство выражений (6) и (8) особенно наглядно при больших значениях $kr\sin\vartheta_i$, когда действительны следующие асимптотические выражения:

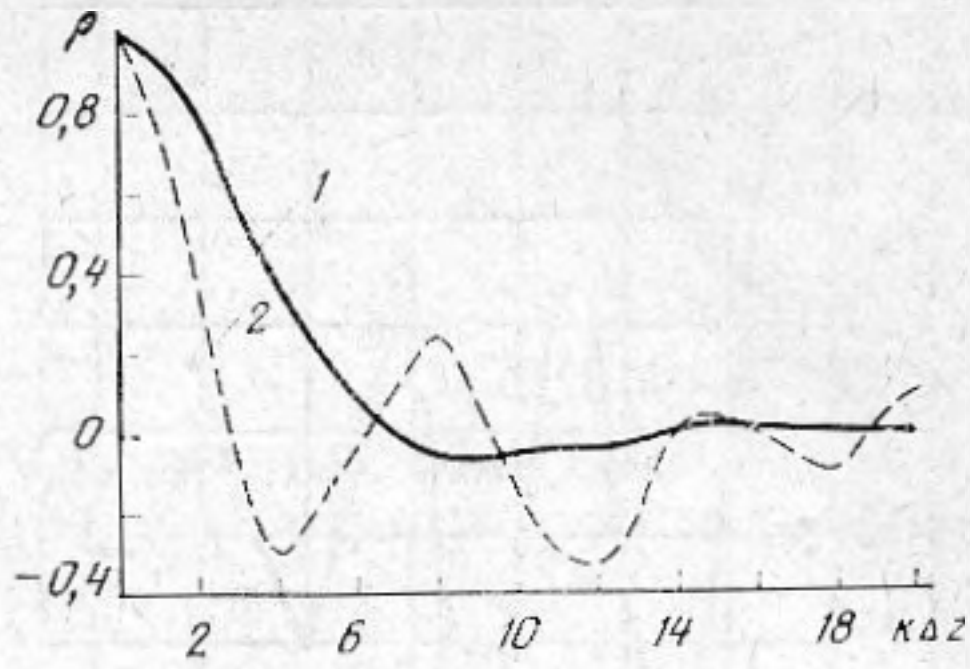
$$f_n(kr\sin\vartheta_i)=\frac{1}{\sqrt[12]{2}\sqrt{kr\sin\vartheta_i}}\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}kr\sin\vartheta_i-\frac{\pi}{4}\right)$$

и

$$J_{\mu n}(kr\sin\vartheta_i)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{kr\sin\vartheta_i}}\cos\left(kr\sin\vartheta_i-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\mu_n\right).$$



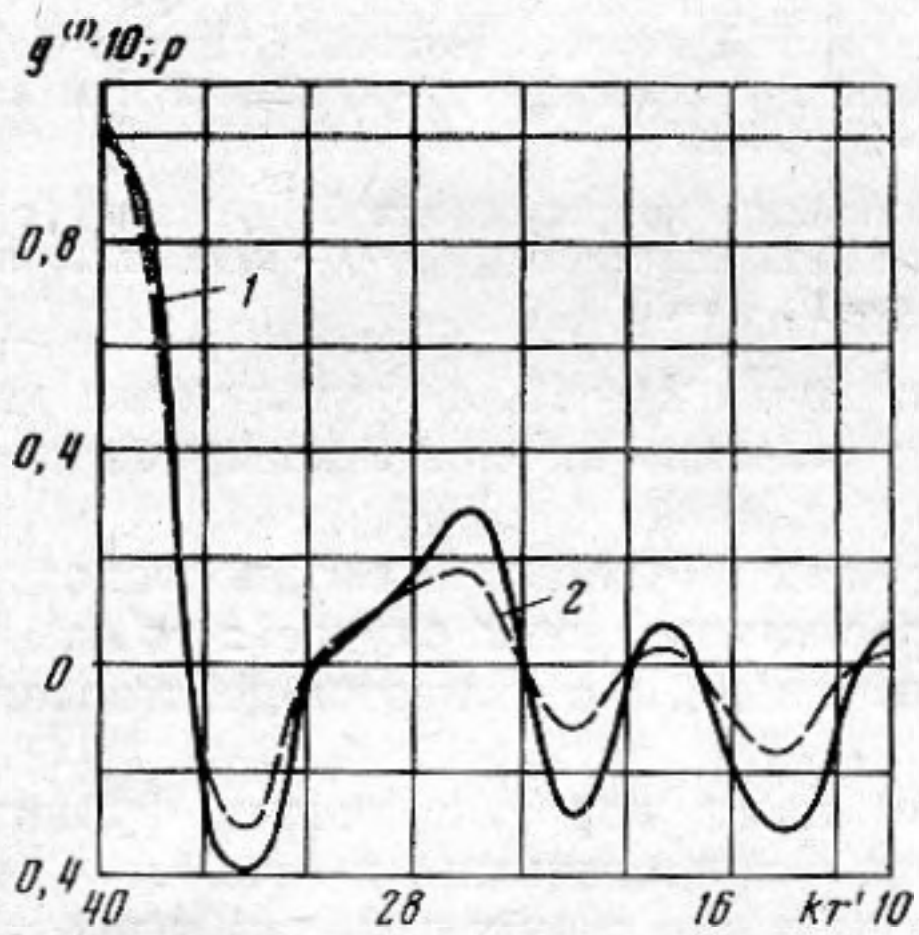
Фиг. 2



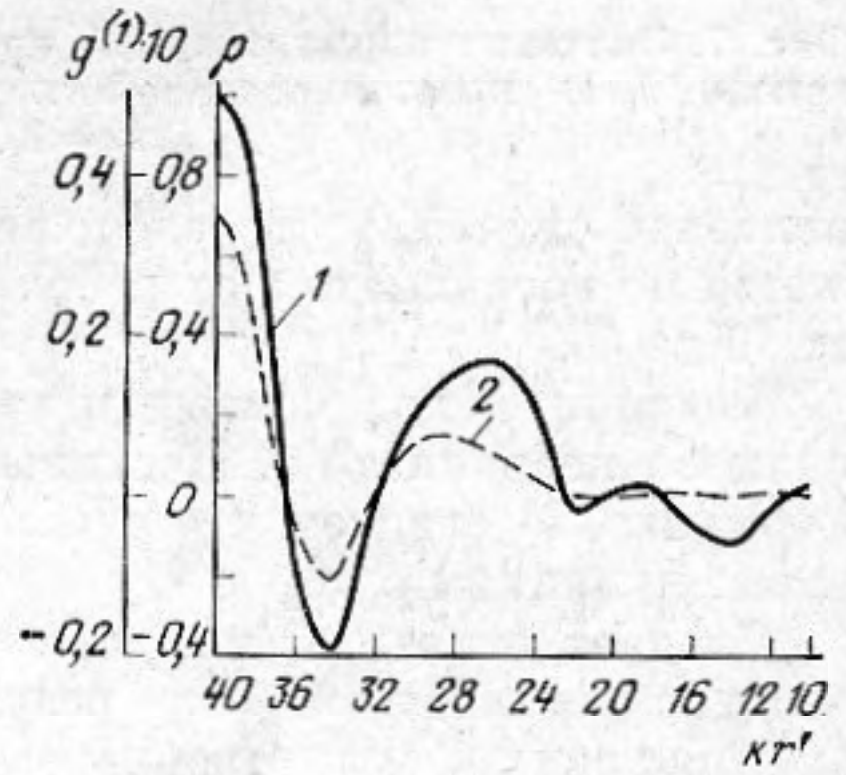
Фиг. 3

Фиг. 2. Значение нормированной пространственной корреляционной функции при $\varphi=1°$, $\Phi=10°$, для $kr=10$, $N=2$ – кривая *1* и $kr=20$, $N=3$ – кривая *2*

Фиг. 3. Значение нормированной пространственной корреляционной функции при $\varphi=9°$, $\Phi=10°$ для $kr=10$, $N=2$ – кривая *1* и $kr=20$, $N=3$ – кривая *2*



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 4. Значение нормированной пространственной корреляционной функции (ρ) – кривая *1* и пространственной корреляционной функции ($g^{(1)}$) – кривая *2* при $kr=40$, $N=5$, $\varphi=5°$, $\Phi=10°$

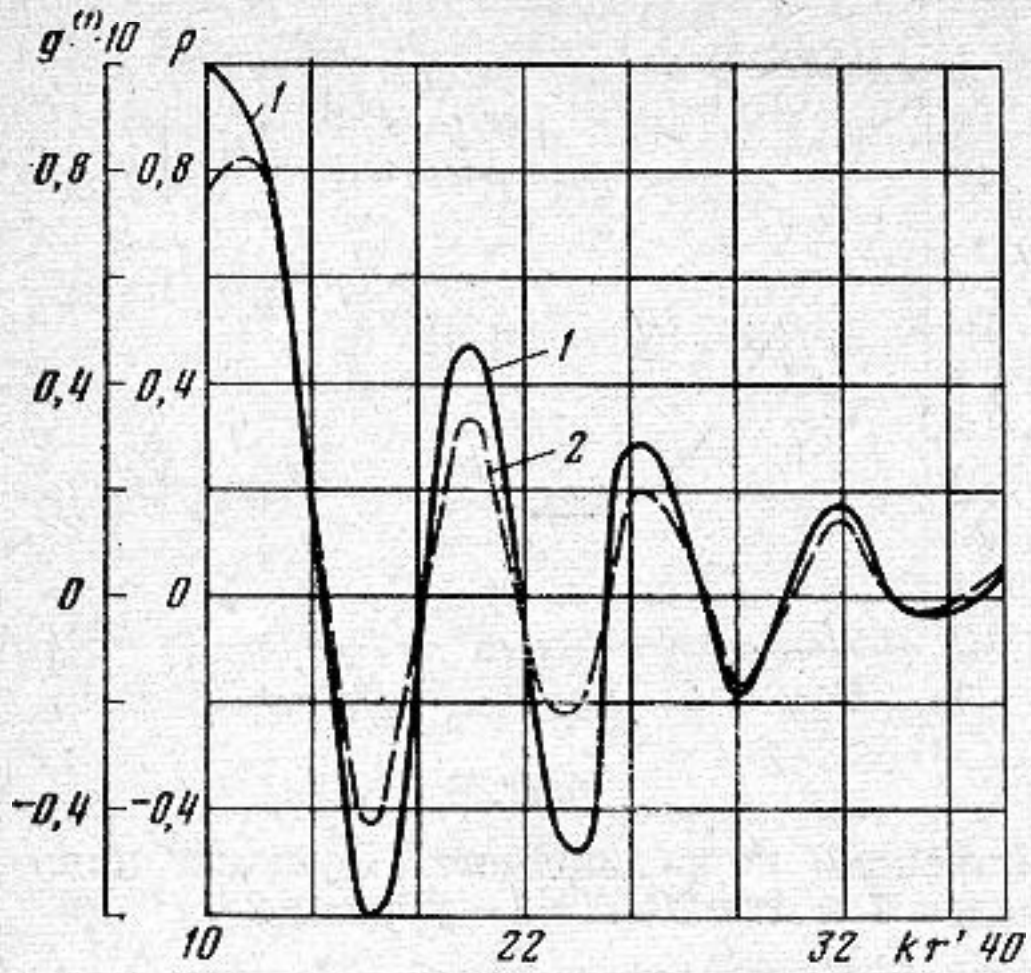
Фиг. 5. Значение нормированной пространственной корреляционной функции (ρ) – кривая *1* и пространственной корреляционной функции ($g^{(1)}$) – кривая *2* при $kr=40$, $N=5$, $\varphi=1°$, $\Phi=10°$

Результаты вычислений функции $\rho(\omega;\ r,\ z,\ \varphi;\ r',\ z',\ \varphi')$ и $g^{(1)}(\omega;\ r,\ z,\ \varphi,\ r',\ z',\ \varphi')=[g(\omega)2\pi^2/\Phi]^{-1}g(\omega;\ r,\ z,\ \varphi,\ r',\ z',\ \varphi')$ приведены на фиг. 2–7.

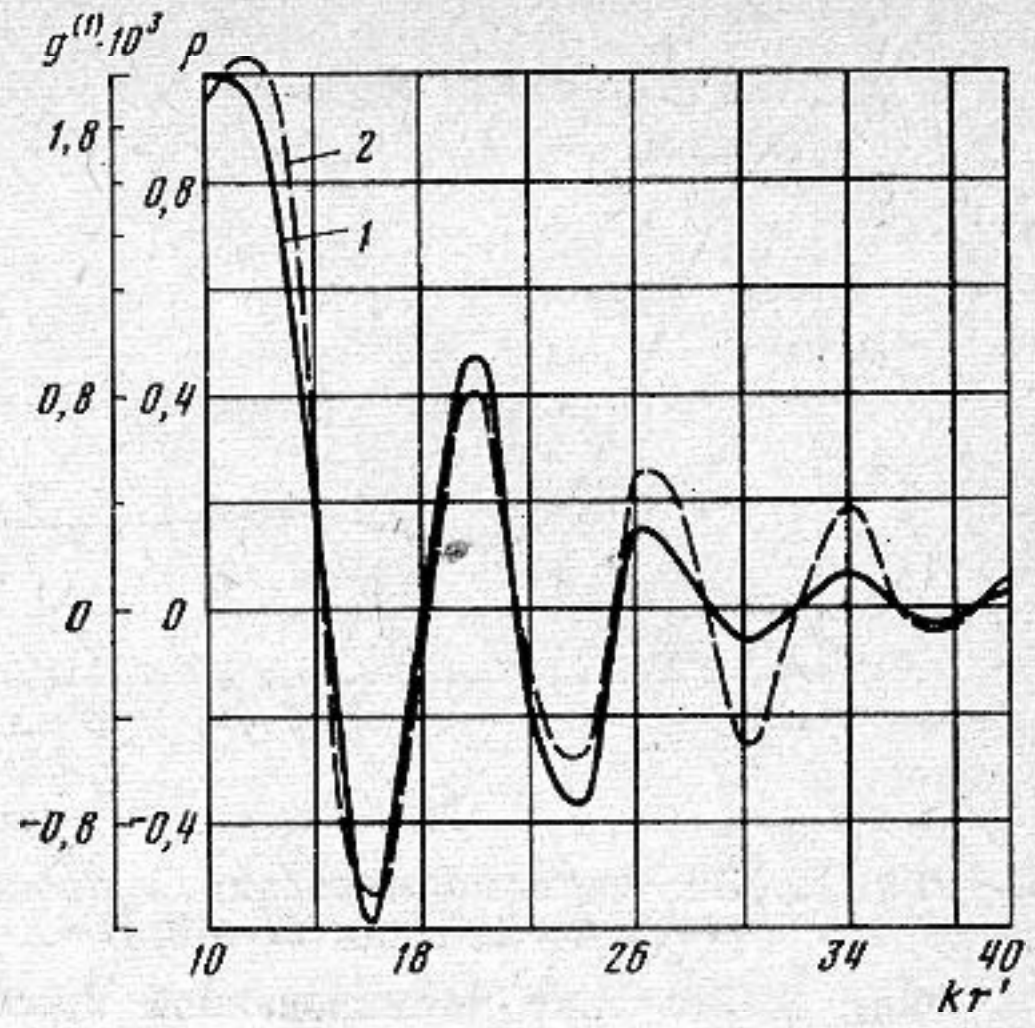
Значения $g^{(1)}(\omega;\ r,\ z,\ \varphi;\ r',\ z',\ \varphi')$ и $\rho(\omega;\ r,\ z,\ \varphi;\ r',\ z',\ \varphi')$ вычислялись согласно выражениям (6) и (7) при ограничении числа N учитываемых мод шумового поля. Значение N выбиралось так, чтобы μ_N лишь несколько превышало значение kr или kr'. При соблюдении этого условия моды более высоких порядков практически можно не учитывать, поскольку соответствующие значения функций Бесселя в формуле (6) весьма малы.

На фиг. 2, 3 приведены значения ρ при $r=r'$, $\varphi=\varphi'$; на фиг. 4–7 – значения ρ при $z=z'$, $\varphi=\varphi'$. При $kr=10$ значение $g^{(1)}(\omega;\ r,\ z,\ \varphi,\ r,\ z,\ \varphi)=0{,}186\cdot10^{-2}$ при $\varphi=1°$ и $7\cdot10^{-2}$ при $\varphi=9°$. При $kr=20$ значение $g^{(1)}(\omega;\ r,\ z,\ \varphi,\ r,\ z,\ \varphi)=1{,}89\cdot10^{-2}$ при $\varphi=4°$ и $5{,}33\cdot10^{-2}$ при $\varphi=9°$.

Поскольку по координате r случайное поле является неоднородным, на фиг. 4–7 приведены значения ρ и $g^{(1)}$ для различных значений kr и kr'. На фиг. 4, 5 величина $kr=40$ остается неизменной, тогда как вторая точка движется к ребру клина; kr' изменяется от 40 до 10. На фиг. 6, 7



Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 6. Значение нормированной пространственной корреляционной функции (ρ) – кривая *1* и пространственной корреляционной функции ($g^{(1)}$) – кривая *2* при $kr=10$, $N=5$, $\varphi=9°$, $\Phi=10°$

Фиг. 7. Значение нормированной пространственной корреляционной функции (ρ) – кривая *1* и пространственной корреляционной функции ($g^{(1)}$) – кривая *2* при $kr=10$, $N=5$, $\varphi=1°$, $\Phi=10°$

приведен случай, когда зафиксирована точка $kr=10$, а другая точка движется по координате r от ребра клина; значения kr' при этом изменяются от 10 до 40.

Различный ход кривых в этих случаях обусловлен неоднородностью поля по координате r. Поскольку в рассматриваемом случае $z=z'$, то из формулы (6) следует, что $g^{(1)}$, а следовательно, и ρ являются действительными функциями.

Следует отметить, что полученные нами корреляционные функции заметно отличаются от результатов, приведенных в работе [1], что приводит к существенному изменению как структуры, так и помехоустойчивости трактов обработки сигналов по сравнению с трактами, построенными без учета специфики шумового поля в рассматриваемой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крон Б., Шерман Ч.* Функции пространственной корреляции для различных моделей шума. Некоторые проблемы обнаружения сигнала, маскируемого флуктуационной помехой. Сб. статей под ред. И. И. Шнер. М., «Советское радио», 1965, 114–128.
2. *Фалькович С. Е.* Оценка параметров сигнала. М., «Советское радио», 1970.
3. *Гаткин Н. Г., Горбенко В. С.* Некоторые модели корреляционных функций поля случайного процесса. IV Всес. симп. по методам представления и аппаратурному анализу случайных процессов и полей. Секция II, Л., ВНИИЭП, 1971, 55–60
4. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л., ОНТИ, 1937.
5. *Тужилин А. А.* Новые представления дифракционных полей в клиновидных областях с идеальными границами. Акуст. ж., 1963, *9*, 2, 209–214.
6. *Тужилин А. А.* Дифракционные поля в узкой клиновидной области с идеально мягкими гранями. III Всес. симп. по дифракции волн. Рефераты докладов. Тбилиси, 1964.
7. *Комиссарова Н. Н.* Асимптотическое представление поля точечного источника для одной модели берегового клина. Акуст. ж., 1972, *18*, 2, 259–264.
8. *Кузнецов В. К.* О новом методе решения задачи о звуковом поле в жидком клине. Акуст. ж., 1959, *5*, 2, 171–175.
9. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск, «Наука и техника», 1968.

Поступила
19 апреля 1977 г.
После повторного исправления
27 марта 1978 г.