АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 6

УДК 534.26

ИЗОЛЯЦИЯ ПРОДОЛЬНОЙ И ИЗГИБНОЙ ВОЛН В ТОНКОЙ ПЛАСТИНЕ, СОЗДАВАЕМАЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕРОВНОСТЯМИ ЕЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А. Д. Лапин

Исследовано распространение продольной и изгибной волн в тонкой пластине с малыми периодическими неровностями на поверхностях при учете многократного рассеяния этих волн.

В работе [1] был предложен способ создания звукоизоляции в волноводе при помощи периодических неровностей на его стенках. Этим способом можно создавать большую звукоизоляцию не только в жидкостном [2], но и в твердом волноводе. Ниже мы покажем это на простейшем примере: рассчитаем изоляцию продольной и изгибной волн в тонкой пластине, создаваемую малыми периодическими неровностями ее поверхностей.

Рассмотрим пластину со свободными поверхностями, заданными в декартовых координатах уравнениями $z=-h$ и $z=h+\zeta(x)$, где функция $\zeta(x)$ равна нулю при $x<0$ («левая полупластина») и является периодической функцией координаты x при $x>0$ («правая полупластина»), $|\zeta|\ll h\ll 2\pi/\xi$, ξ — волновое число волны, бегущей по пластине. Пусть из левой полупластины падает продольная волна со смещением

$$u_i(x)=\exp(i\xi_{\text{п}}x), \tag{1}$$

где $\xi_{\text{п}}=\omega/c_{\text{п}}$, $c_{\text{п}}=\sqrt{E_{\text{пл}}/\rho}$ — скорость распространения продольной волны, $E_{\text{пл}}$ и ρ — соответственно модуль Юнга и плотность материала пластины. Найдем отраженную волну u_r в левой полупластине и исследуем влияние неровностей на затухание поля в правой полупластине. Решение этой задачи получим методом малых возмущений, ограничиваясь первым приближением по высоте неровностей.

Обозначим через $u(x)$ смещение частиц в полном поле. В пластине переменной толщины смещение $u(x)$ удовлетворяет уравнению Вебстера

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{H(x)}\frac{dH}{dx}\frac{du}{dx}+\xi_{\text{п}}^2u=0, \tag{2}$$

где $H(x)=[2h+\zeta(x)]$ — толщина пластины в сечении x.

Представим полное поле в пластине в виде суммы падающего и рассеянного полей и предположим, что рассеянное поле $u^{(1)}=u-u_i$ мало по сравнению с падающим. Пользуясь уравнением (2), мы получим для $u^{(1)}$ приближенное уравнение с правой частью:

$$\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2}+\xi_{\text{п}}^2u^{(1)}=-\frac{1}{2h}\frac{d\zeta}{dx}\frac{du_i}{dx}.$$

Решение этого уравнения дает отраженную волну

$$u_r=u^{(1)}=\frac{1}{i2\xi_{\text{п}}}\int_0^\infty f(X)\exp(i\xi_{\text{п}}X)\,dX\exp(-i\xi_{\text{п}}x),\quad x<0, \tag{3}$$

где

$$f(x)=-\frac{1}{2h}\frac{d\zeta}{dx}\frac{du_i}{dx}.$$

Согласно формуле (3) амплитуда отраженной волны растет пропорционально длине неровного участка в том случае, когда функция $f(x)$ содержит гармонику $\exp(-i\xi_{\text{п}}x)$. Если же спектр функции $f(x)$ не имеет этой гармоники или близкой к ней, то амплитуда отраженной волны будет малой величиной (порядка $|\xi_{\text{п}}\zeta|$) при любой длине неровного участка. Отсюда следует, что падающая волна (1) эффективно отражается от периодических неровностей с периодом, равным $\pi/\xi_{\text{п}}$ и близким к нему, и слабо отражается от неровностей с другим периодом.

На основе полученных формул можно выбрать неровности, создающие большую изоляцию продольной волны в пластине. Однако в рассматриваемом приближении оценить ослабление этой волны можно лишь для таких длин неровного участка, при которых отраженная волна еще мала по сравнению с падающей.

При достаточно большой длине неровного участка пластины отраженная волна становится не малой по сравнению с падающей, и тогда при решении задачи нельзя выбирать u_i в качестве нулевого приближения. В этом случае ослабление падающей волны с расстоянием можно рассчитать методом малых возмущений при специальном выборе формы нулевого приближения, соответствующей основной части полного поля [3].

Пусть неровности в правой полупластине заданы в виде

$$\zeta(x)=a\cos(2\xi_{\text{п}}{}^0x+\varepsilon)=\zeta_0\exp(i2\xi_{\text{п}}{}^0x)+\zeta_0{}^*\exp(-2\xi_{\text{п}}{}^0x), \tag{4}$$

где $\zeta_0=\frac{a}{2}e^{i\varepsilon}$; индекс «0» сверху означает, что соответственная величина взята при частоте ω^0. Рассчитаем затухание продольной волны в правой полупластине при частоте ω, равной ω^0 и близкой к ней. Падающая волна (1) эффективно отражается от неровностей (4), и поэтому нулевое приближение $u^{(0)}$, учитывающее основную часть полного поля, будем искать в виде

$$u^{(0)}=\exp(i\xi_{\text{п}}x)+V\exp(-i\xi_{\text{п}}x) \qquad \text{при } x<0, \tag{5}$$

$$u^{(0)}=M\exp[i(\xi_{\text{п}}+\chi)x]+N\exp[i(\xi_{\text{п}}+\chi-2\xi_{\text{п}}{}^0)x] \qquad \text{при } x>0, \tag{6}$$

где $|\chi|\ll\xi_{\text{п}}{}^0$.

В этих формулах постоянные χ, V, M и N выберем таким образом, чтобы поле удовлетворяло следующим условиям: 1) смещение $u^{(0)}$ и напряжение $Edu^{(0)}/dx$ непрерывны при $x=0$; 2) поле ограничено при $x\to\infty$; 3) поправка $u^{(1)}=(u-u^{(0)})$ мала по сравнению с нулевым приближением $u^{(0)}$.

Подставив $u=u^{(0)}+u^{(1)}$ в уравнение (2) и предположив, что выполнено неравенство $|u^{(1)}|\ll|u^{(0)}|$, мы получим для $u^{(1)}$ приближенное уравнение с правой частью

$$\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2}+\xi_{\text{п}}{}^2u^{(1)}=-\left\{\frac{d^2u^{(0)}}{dx^2}+\xi_{\text{п}}{}^2u^{(0)}+\frac{1}{2h}\frac{d\zeta}{dx}\frac{du^{(0)}}{dx}\right\}.$$

При учете выражений (4) и (6) это уравнение можно привести к виду

$$\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2}+\xi_{\text{п}}{}^2u^{(1)}=\frac{\zeta_0}{h}\xi_{\text{п}}{}^0(\xi_{\text{п}}+\chi)M\exp[i(\xi_{\text{п}}+\chi+2\xi_{\text{п}}{}^0)x]-$$

$$-\left\{[\xi_{\text{п}}{}^2-(\xi_{\text{п}}+\chi)^2]M-\frac{\zeta_0}{h}\xi_{\text{п}}{}^0(\xi_{\text{п}}+\chi-2\xi_{\text{п}}{}^0)N\right\}\exp[i(\xi_{\text{п}}+\chi)x]- \tag{7}$$

$$-\left\{\frac{\zeta_0^*}{h}\xi_{\text{п}}^0(\xi_{\text{п}}+\chi)M+[\xi_{\text{п}}^2-(\xi_{\text{п}}+\chi-2\xi_{\text{п}}^0)^2]N\right\}\exp[i(\xi_{\text{п}}+\chi-2\xi_{\text{п}}^0)x]-$$

$$-\frac{\zeta_0^*}{h}\xi_{\text{п}}^0(\xi_{\text{п}}+\chi-2\xi_{\text{п}}^0)N\exp[i(\xi_{\text{п}}+\chi-4\xi_{\text{п}}^0)x].$$

Правая часть уравнения (7) содержит две резонансные гармоники: $\exp[i(\xi_{\text{п}}+\chi)x]$ и $\exp[i(\xi_{\text{п}}+\chi-2\xi_{\text{п}}^0)x]$, дающие нарастание поля $u^{(1)}$ с увеличением длины неровного участка. Приравняем их амплитуды нулю:

$$(8)\qquad \begin{aligned}&[\xi_{\text{п}}^2-(\xi_{\text{п}}+\chi)^2]M-\frac{\zeta_0}{h}\xi_{\text{п}}^0(\xi_{\text{п}}+\chi-2\xi_{\text{п}}^0)N=0,\\ &\frac{\zeta_0^*}{h}\xi_{\text{п}}^0(\xi_{\text{п}}+\chi)M+[\xi_{\text{п}}^2-(\xi_{\text{п}}+\chi-2\xi_{\text{п}}^0)^2]N=0,\end{aligned}$$

и тогда поле $u^{(1)}$ будет малым по сравнению с $u^{(0)}$ при любой длине неровного участка.

Соотношения (8) являются системой однородных алгебраических уравнений для амплитуд M и N. Линеаризуя коэффициенты этой системы по малым величинам χ и $\Omega\equiv\omega-\omega^0$, мы приведем ее к виду

$$\left(\delta-\frac{\Omega}{c_{\text{п}}}\right)M-\frac{\zeta_0\xi_{\text{п}}^0}{2h}N=0,\qquad \frac{\zeta_0^*\xi_{\text{п}}^0}{2h}M+\left(\delta+\frac{\Omega}{c_{\text{п}}}\right)N=0,$$

где $\delta=\chi+\dfrac{\Omega}{c_{\text{п}}}$. Из равенства определителя этой системы нулю найдем допустимые значения δ; они равны δ_0 и $-\delta_0$, где

$$\delta_0=\sqrt{\frac{\Omega^2}{c_{\text{п}}^2}-\left[\frac{|\zeta_0|\xi_{\text{п}}^0}{2h}\right]^2},\quad \operatorname{Re}\delta_0\geqslant 0,\quad \operatorname{Im}\delta_0\geqslant 0.$$

Величина δ_0 — чисто мнимая при $|\Omega|<\Omega_{\text{зап}}\equiv\dfrac{|\zeta_0|\omega^0}{2h}$ и вещественная при $|\Omega|>\Omega_{\text{зап}}$.

Исследуем поведение $u^{(0)}$ при $x\to\infty$. Для малых χ и Ω формулу (6) можно привести к виду

$$u^{(0)}=M\{\exp[i(\xi_{\text{п}}^0+\delta)x]+N/M\exp[i(-\xi_{\text{п}}^0+\delta)x]\}.$$

Согласно этой формуле поле $u^{(0)}$ ограничено на бесконечности при $\delta=\delta_0$ и неограничено при $\delta=-\delta_0$. В соответствии с условием ограниченности поля мы выберем $\delta=\delta_0$ и тогда нулевое приближение примет вид

$$(9)\qquad u^{(0)}=M\{\exp[i(\xi_{\text{п}}^0+\delta_0)x]+Q\exp[i(-\xi_{\text{п}}^0+\delta_0)x]\},$$

где

$$Q=\left[\frac{N}{M}\right]_{\delta=\delta_0}=-\frac{\zeta_0^*\xi_{\text{п}}^0}{2h\left(\dfrac{\Omega}{c_{\text{п}}}+\delta_0\right)}=-\frac{\zeta_0^*\omega^0}{2h(\Omega+\sqrt{\Omega^2-\Omega_{\text{зап}}^2})}.$$

Из условия «сшивания» решений (5) и (9) при $x=0$ найдем амплитуды V и M:

$$V=\frac{[\xi_{\text{п}}-(\xi_{\text{п}}^0+\delta_0)]+Q[\xi_{\text{п}}+(\xi_{\text{п}}^0-\delta_0)]}{[\xi_{\text{п}}+(\xi_{\text{п}}^0+\delta_0)]+Q[\xi_{\text{п}}-(\xi_{\text{п}}^0-\delta_0)]}$$

$$M=\frac{2\xi_{\text{п}}}{[\xi_{\text{п}}+(\xi_{\text{п}}^0+\delta_0)]+Q[\xi_{\text{п}}-(\xi_{\text{п}}^0-\delta_0)]}$$

Соотношение $|\Omega|<\Omega_{зап}$ дает частотную полосу запирания для пластины с неровной поверхностью. При частотах, удовлетворяющих этому соотношению, поле в правой полупластине экспоненциально затухает с ростом x. Коэффициент затухания $\beta=\mathrm{Im}\,\delta_0$ принимает максимальное значение, равное $|\zeta_0|\xi_п^0/2h$, в середине ($\omega=\omega^0$) полосы запирания и монотонно убывает до нуля при приближении частоты ω к границам этой полосы, определяемым по формулам $\omega_н=\omega^0-\Omega_{зап}$, $\omega_в=\omega^0+\Omega_{зап}$. Для частот, лежащих внутри полосы запирания, выполняется соотношение $|V|=|Q|=1$, и падающая волна полностью отражается от правой полупластины. Относительная ширина полосы запирания равна

$$\frac{\omega_в-\omega_н}{\omega^0}=\frac{|\zeta_0|}{h}=\frac{a}{2h}.$$

При помощи найденного коэффициента затухания β можно оценить ослабление продольной волны в пластине, имеющей неровности (4) на конечном участке длиной L. Пренебрегая отражениями от концов неровного участка, мы получим, что амплитуда волны, прошедшей через этот участок, уменьшится в $\exp(\beta L)$ раз, где

$$\beta=\frac{1}{c_п}\sqrt{\Omega^2_{зап}-\Omega^2},\quad |\Omega|<\Omega_{зап}=\frac{a\omega^0}{4h}.$$

Учет отражений от концов неровного участка дает лишь малую ($\sim\delta_0/\xi_п^0$) поправку к этому результату. Величина затухания падающей волны в децибелах дается формулой

$$\Delta,\ дб=20\lg\exp(\beta L)=8{,}7(\beta L).$$

Например, при $a/2h=0{,}15$ продольная волна с частотой $\omega=\omega^0$ затухает в e раз (8,7 *дб*) на расстоянии, равном удвоенной ее длине волны ($L=4\pi/\xi_п^0$).

Аналогичным способом можно рассчитать ослабление изгибной волны в пластине с неровными поверхностями. Пусть поперечное смещение в падающей изгибной волне равно

$$w_i(x)=\exp(i\xi_и x),\tag{10}$$

где $\xi_и=\sqrt[4]{3\omega^2\rho/E_{пл}h^2}$ — волновое число изгибной волны, $E_{пл}$ — модуль Юнга для пластины. Найдем затухание поля в правой полупластине.

Согласно работам [4, 5], поперечное смещение w в пластине переменной толщины удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{D(x)\frac{d^2w}{dx^2}\right\}-\omega^2\rho Hw=0,\tag{11}$$

где $D(x)=\frac{1}{12}E_{пл}H^3(x)$ — цилиндрическая жесткость, $H(x)=2h+\zeta(x)$. Решение задачи рассеяния методом малых возмущений при выборе падающей волны в качестве нулевого приближения показывает, что изгибная волна (10) эффективно отражается от периодических неровностей с периодом, равным $\pi/\xi_и$ и близким к нему, и слабо отражается от неровностей с другим периодом.

Пусть неровности заданы в виде

$$\zeta(x)=a\cos(2\xi_и^0x+\varepsilon)=\zeta_0\exp(i2\xi_и^0x)+\zeta_0^*\exp(-i2\xi_и^0x).$$

где $\zeta_0=\frac{a}{2}e^{i\varepsilon}$. Рассчитаем затухание изгибной волны при частоте ω, равной ω^0 и близкой к ней. Расчет произведем методом малых возмущений при специальном выборе формы нулевого приближения; нулевое приближение $w^{(0)}$, учитывающее основную часть полного поля, будем искать в виде

$$w^{(0)}=\exp(i\xi_и x)+V\exp(-i\xi_и x) \quad \text{при } x<0, \tag{12}$$

$$w^{(0)}=M\exp[i(\xi_и+\chi)x]+N\exp[i(\xi_и+\chi-2\xi_и^0)x] \quad \text{при } x>0,$$

где $|\chi|\ll\xi_и^0$.

Подставив $w=w^{(0)}+w^{(1)}$ в уравнение (11) и предположив, что выполнено неравенство $|w^{(1)}|\ll|w^{(0)}|$, мы получим для $w^{(1)}$ уравнение с правой частью, содержащей две резонансные гармоники: $\exp[i(\xi_и+\chi)x]$ и $\exp[i(\xi_и+\chi-2\xi_и^0)x]$. Приравняем амплитуды этих гармоник нулю, и тогда поле $w^{(1)}$ будет малым по сравнению с $w^{(0)}$ при любой длине неровного участка. Линеаризованные уравнения для M и N имеют вид

$$\left(\delta-\frac{\xi_и^0}{2w^0}\Omega\right)M+\frac{\zeta_0\xi_и^0}{4h}N=0,$$

$$\frac{\zeta_0^*\xi_и^0}{4h}M+\left(\delta+\frac{\xi_и^0}{2\omega^0}\Omega\right)N=0,$$

где $\delta=\left(\chi+\frac{\xi_и^0}{2\omega^0}\Omega\right)$, $\Omega=\omega-\omega^0$. Из условия совместности этих уравнений найдем допустимые значения δ; они равны δ_0 и $-\delta_0$, где

$$\delta_0=\sqrt{\left(\frac{\Omega\xi_и^0}{2\omega^0}\right)^2-\left[\frac{|\zeta_0|\xi_и^0}{4h}\right]^2}, \quad \operatorname{Re}\delta_0\geqslant0, \quad \operatorname{Im}\delta_0\geqslant0. \tag{13}$$

В соответствии с условием ограниченности поля мы выберем $\delta=\delta_0$, и тогда нулевое приближение примет вид

$$w^{(0)}=M\{\exp[i(\xi_и^0+\delta_0)x]+Q\exp[i(-\xi_и^0+\delta_0)x]\}, \tag{14}$$

где

$$Q=\left[\frac{N}{M}\right]_{\delta=\delta_0}=-\frac{\zeta_0^*\xi_и^0}{4h\left(\frac{\xi_и^0\Omega}{2\omega^0}+\delta_0\right)}.$$

Смещение и наклон пластины непрерывны при $x=0$. В результате «сшивания» решений (12) и (14) при $x=0$ найдем коэффициенты V и M.

Согласно формуле (13) затухание изгибной волны в пластине с неровными поверхностями происходит при частотах, удовлетворяющих соотношению

$$|\omega-\omega^0|<\Omega_{зап}\equiv\frac{a\omega^0}{4h};$$

коэффициент затухания этой волны равен

$$\beta=\operatorname{Im}\delta_0=\sqrt{\left[\frac{a\xi_и^0}{8h}\right]^2-\left(\frac{\Omega\xi_и^0}{2\omega^0}\right)^2}.$$

Например, при $a/2h=0{,}15$ изгибная волна с частотой $\omega=\omega^0$ затухает в e раз на расстоянии, равном учетверенной ее длине волны ($L=4\cdot2\pi/\xi_и^0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исакович М. А.* Рассеяние звуковых волн на малых неоднородностях в волноводе. Акуст. ж., 1957, *3*, 1, 37–45.
2. *Лапин А. Д.* Звукоизоляция в многомодальном волноводе, создаваемая периодическими неровностями и неоднородностями его стенок. Акуст. ж., 1977, *23*, 6, 899–906.
3. *Рыбак С. А.* Рассеяние плоской волны на малых периодических неоднородностях. Акуст. ж., 1965, *11*, 1, 89–92.
4. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М., Гостехтеориздат, 1958.
5. *Красильников В. Н.* Рефракция изгибных волн. Акуст. ж., 1962, *8*, 1, 79–84.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
20 января 1978 г.