АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 6

УДК 534.213.4

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА В ТРУБАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

А. В. Попов

Методом плавных возмущений для нерегулярных акустических волноводов с мягкими или жесткими стенками построены приближенные решения волнового уравнения, аналогичные нормальным волнам регулярных волноводов.

В работе [1] были построены асимптотические решения общего линейного волнового уравнения, описывающие распространение колебаний в волноводах с медленно меняющимися параметрами. Эти решения, представляющие обобщение понятия нормальных волн [2] на случай плавнонерегулярного волновода, имеют вид $ue^{-i\omega t}$, где

$$u(x, y, z) = B(x, y, \zeta)\exp\left[\frac{i}{\varepsilon}\int p(\zeta)\,d\zeta\right].$$

Фазовая скорость волны $\omega/p(\zeta)$ зависит от продольной координаты z через «медленную» переменную $\zeta=\varepsilon z$, где ε — малый параметр, характеризующий медленность изменения волновода. Комплексная амплитуда $B(x, y, \zeta)$ определяется в виде формального ряда по степеням $i\varepsilon$

$$B(x, y, \zeta) = B^{(0)} + i\varepsilon B^{(1)} + (i\varepsilon)^2 B^{(2)} + \ldots \tag{1}$$

Для функций $B^{(m)}$ возникает рекуррентная последовательность дифференциальных уравнений, которые могут быть решены явно, если известны нормальные волны регулярных волноводов сравнения [3]. Приложению теории [1] к задачам распространения звука посвящены работы [4, 5].

Недостатки метода работы [1] проявляются, когда поперечные размеры волновода велики по сравнению с длиной волны. Дело в том, что разложение (1) должно описывать как амплитудные, так и фазовые искажения волн в нерегулярном волноводе. В коротковолновом случае, когда даже небольшие изменения геометрических параметров заметно меняют фазу волны, поправки $B^{(1)}$, $B^{(2)}, \ldots$ становятся велики и метод теряет свою эффективность. В этой ситуации более адекватным является вариант метода плавных возмущений [6], развитый в работе [7], который мы и будем использовать в настоящем исследовании, а именно будем искать нормальные волны акустического волновода переменного сечения в виде

$$u(x, y, z) = A(x, y, \zeta)\exp\left[\frac{i}{\varepsilon}\Psi(x, y, \zeta)\right], \tag{2}$$

где вещественная амплитуда A и фаза Ψ — ряды по степеням ε^2:

$$\begin{aligned} A(x, y, \zeta) &= A^{(0)} + \varepsilon^2 A^{(1)} + \ldots, \\ \Psi(x, y, \zeta) &= \Psi^{(0)} + \varepsilon^2 \Psi^{(1)} + \varepsilon^4 \Psi^{(2)} + \ldots. \end{aligned} \tag{3}$$

Физической интерпретацией решения (2) является гармоническая волна частоты ω, распространяющаяся с переменной амплитудой $A(x, y, \zeta)$ и слабо искривленным фазовым фронтом $\frac{1}{\varepsilon}\Psi(x, y, \zeta)=\omega t$.

Выбор «эйкональной» формы решения (2) позволяет ослабить ограничения на скорость изменения параметров волновода, возникающие в методе работы [1], и получить результаты, согласующиеся с коротковолновой теорией [8, 9], исходящей из приближения геометрической акустики.

Пусть волновод представляет собой трубу переменного сечения $S(\varepsilon z)$, ограниченную акустически мягкой стенкой $G(\varepsilon z)$. Величина ε, обратно пропорциональная характерному продольному масштабу неоднородности волновода, считается малым параметром. Будем рассматривать распространение гармонических звуковых колебаний с волновым числом $k=\omega/c$. Напишем уравнение Гельмгольца в «растянутой» системе координат $(x, y, \varepsilon z)$:

$$\varepsilon^2 u_{\zeta\zeta}+\Delta u+k^2 u=0, \quad (x, y)\in S(\zeta); \tag{4}$$

$$u|_{G(\zeta)}=0 \tag{5}$$

$\left(\zeta=\varepsilon z, \ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ и будем искать его частные решения в виде (2).

Подставляя выражение (2) в уравнение (4) и разделяя действительную и мнимую части, получим систему уравнений для A и Ψ:

$$\begin{gathered}-(\nabla\Psi)^2 A+\varepsilon^2[\Delta A+(k^2-\Psi_\zeta^2)A]+\varepsilon^4 A_{\zeta\zeta}=0,\\ 2\nabla A\nabla\Psi+A\Delta\Psi+\varepsilon^2(2A_\zeta\Psi_\zeta+A\Psi_{\zeta\zeta})=0.\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x} \ \ \frac{\partial}{\partial y}\right)$ — «поперечный» градиент. Переходя при $\varepsilon\to 0$ к асимптотическим разложениям (3) и приравнивая нулю старший член в первом уравнении, мы придем к уравнению $(\nabla\Psi^{(0)})^2 A^{(0)}=0$. Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы фаза $\Psi^{(0)}(x, y, \zeta)$ была функцией только переменной ζ. Вводя для нее обозначение

$$\Psi^{(0)}(\zeta)=\int p(\zeta)\,d\zeta$$

и разлагая левые части уравнений (6) по степеням ε^2, получим две цепочки рекуррентных уравнений для определения поправок к фазе $\Psi^{(m)}$ и амплитуд $A^{(m)}$. Выпишем лишь те из них, которые необходимы для построения $A^{(0)}$ и $\Psi^{(1)}$:

$$\Delta A^{(0)}+(k^2-p^2)A^{(0)}=0,$$

$$\Delta A^{(1)}+(k^2-p^2)A^{(1)}=[2p\Psi_\zeta^{(1)}+(\nabla\Psi^{(1)})^2]A^{(0)}-A_{\zeta\zeta}^{(0)}=0, \tag{7}$$

$$A^{(0)}\Delta\Psi^{(1)}+2\nabla A^{(0)}\nabla\Psi^{(1)}+2pA_\zeta^{(0)}+p'A^{(0)}=0. \tag{8}$$

Для выполнения граничного условия (5) потребуем, чтобы амплитуды $A^{(m)}(x, y, \zeta)$ обращались в нуль на границе $G(\zeta)$, а функции $\Psi^{(m)}(x, y, \zeta)$ были регулярны.

Обозначим через $\lambda_n(\zeta)$ и $U_n(x, y, \zeta)$ собственные числа и собственные функции задачи Дирихле:

$$\Delta U+\lambda U=0, \quad (x, y)\in S(\zeta); \quad U|_{G(\zeta)}=0.$$

Из формулы (7) видно, что ненулевое решение $A^{(0)}(x, y, \zeta)$ существует только для

$$p(\zeta)=\sqrt{k^2-\lambda_n(\zeta)}, \ n=1, 2, \ldots. \tag{9}$$

При этом, если собственное значение $\lambda_n(\zeta)$ не вырождено (что мы и будем в дальнейшем предполагать), функция $A^{(0)}$ может отличаться от U_n лишь множителем, зависящим от ζ. Чтобы найти нормировку $A^{(0)}$, умножим уравнение (8) на $A^{(0)}$ и проинтегрируем по $S(\zeta)$, используя формулу Грина и граничное условие $A^{(0)}|_{G(\zeta)}=0$. В результате оказывается, что зависимость $A^{(0)}$ от переменной ζ определяется тождеством

$$p(\zeta)\iint\limits_{S(\zeta)}[A^{(0)}(x,y,\zeta)]^2dxdy=\text{const}, \tag{10}$$

являющимся приближенной формой закона сохранения энергии.

Найдя $A^{(0)}(x, y, \zeta)$, мы можем использовать уравнение (8) для определения зависимости функции $\Psi^{(1)}$ от поперечных координат (x, y). Нетрудно показать, что регулярное решение уравнения (8), вырождающегося на границе области $S(\zeta)$, определено с точностью до слагаемого, зависящего только от ζ. Оно находится из требования, чтобы второе из уравнений (7) было разрешимо относительно $A^{(1)}$, что возможно лишь при выполнении условия ортогональности (ср. [1]):

$$\iint\limits_{S(\zeta)}[2p\Psi_\zeta^{(1)}+(\nabla\Psi^{(1)})^2](A^{(0)})^2dxdy=\iint\limits_{S(\zeta)}A_{\zeta\zeta}^{(0)}A^{(0)}dxdy. \tag{11}$$

Следующие члены рядов (3) могут быть найдены аналогично.

Рассмотрим теперь случай подобного изменения сечения волновода. Пусть переменное сечение волновода $S(\zeta)$ получается из произвольной области Σ с границей Γ, заданной в плоскости (ξ, η), линейным преобразованием

$$x=X_0(\zeta)+\xi R(\zeta),\quad y=Y_0(\zeta)+\eta R(\zeta) \tag{12}$$

(сдвиг и растяжение). Покажем, что в этом случае амплитуда $A^{(0)}$ и поправка к фазе $\Psi^{(1)}$ могут быть найдены явно. Положим

$$A^{(0)}(x, y, \zeta)\equiv a^{(0)}(\xi, \eta, \zeta)=M(\zeta)u_n(\xi, \eta),$$

$$\Psi^{(1)}(x, y, \zeta)\equiv\psi^{(1)}(\xi, \eta, \zeta),$$

где $u_n(\xi, \eta)$ — нормированная собственная функция задачи

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+\nu u=0,\quad (\xi,\eta)\in\Sigma;\quad u|_\Gamma=0, \tag{13}$$

соответствующая собственному значению ν_n. Согласно формулам (9) и (12), $\lambda_n(\zeta)=\nu_n/R^2(\zeta)$, так что

$$p(\zeta)=\sqrt{k^2-\nu_n/R^2(\zeta)},$$

а из формулы (10) следует

$$M(\zeta)=\text{const}/R(\zeta)\sqrt{p(\zeta)}.$$

Перейдем к определению $\psi^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)$. В переменных (ξ, η) уравнение (8) приобретает вид

$$u_n\left(\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial\eta^2}\right)+2\left(\frac{\partial u_n}{\partial\xi}\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial u_n}{\partial\eta}\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\eta}\right)= \tag{14}$$

$$=2pR\left[(X_0'+\xi R')\frac{\partial u_n}{\partial\xi}+(Y_0'+\eta R')\frac{\partial u_n}{\partial\eta}+R'u_n\right].$$

Как легко видеть, оно имеет частное решение

$$\psi_1(\xi,\eta,\zeta)=pR\left[\xi X_0'+\eta Y_0'+\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)R'\right] \tag{15}$$

регулярное по переменным (ξ, η). Полагая $\psi^{(1)}=\psi_1+q(\xi, \eta, \zeta)$, мы получим для функции q, которая также должна быть регулярной, однородное уравнение

$$u_n\left(\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2}\right)+2\left(\frac{\partial u_n}{\partial \xi}\frac{\partial q}{\partial \xi}+\frac{\partial u_n}{\partial \eta}\frac{\partial q}{\partial \eta}\right)=0. \tag{16}$$

Заменой $\tilde{u}(\xi, \eta, \zeta)=u_n(\xi, \eta)q(\xi, \eta, \zeta)$ оно сводится к уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}+\nu_n \tilde{u}=0, \quad (\xi, \eta)\in\Sigma \tag{17}$$

с граничным условием $\tilde{u}|_\Gamma=0$. Сравнивая его с уравнением (13), мы видим, что $\tilde{u}(\xi, \eta, \zeta)=q_0(\zeta)u_n(\xi, \eta)$ и, следовательно, $q(\xi, \eta, \zeta)=q_0(\zeta)$. Таким образом, все регулярные решения (14) имеют вид

$$\psi^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)=\psi_1(\xi, \eta, \zeta)+q_0(\zeta). \tag{18}$$

Функция $q_0(\zeta)$ определяется интегрированием тождества

$$q_0'(\zeta)=\iint\limits_\Sigma u_n^2\left(\frac{X_0'+\xi R'}{R}\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{Y_0'+\eta R'}{R}\frac{\partial}{\partial \eta}-\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\psi_1\, d\xi\, d\eta-$$
$$-\frac{1}{R^2 p}\iint\limits_\Sigma u_n^2\left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta}\right)^2\right]d\xi\, d\eta+$$
$$+\frac{R}{2\sqrt{p}}\iint\limits_\Sigma u_n\left(\frac{X_0'+\xi R'}{R}\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{Y_0'+\eta R'}{R}\frac{\partial}{\partial \eta}-\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^2\times$$
$$\times\frac{u_n}{R\sqrt{p}}\, d\xi\, d\eta,$$

возникающего при подстановке $A^{(0)}$ и $\Psi^{(1)}$ в (11).

Основным результатом здесь являются формулы (15), (18), показывающие, что в волноводах с подобно меняющимся сечением фазовая поправка $\Psi^{(1)}(x, y, \zeta)$ квадратична по поперечным переменным. Это означает, что фазовые искажения сводятся в данном случае к слабому искривлению и наклону фронта волны, причем угол наклона и радиус кривизны фазового фронта определяется лишь локальным наклоном стенок волновода. Что касается слагаемого $q_0(\zeta)$, то оно, как и $\Psi^{(0)}(\zeta)$, имеет интегральный характер, т. е. зависит от геометрии волновода на всем пути, пройденном волной.

Полученные результаты легко переносятся на случай акустического волновода с жесткой стенкой, более интересный для практики. Укажем кратко изменения в выкладках, возникающие в этом случае. Пусть граница волновода $G(\zeta)$ задается уравнениями

$$x=X(\sigma, \zeta), \quad y=Y(\sigma, \zeta),$$

где σ — длина дуги в сечении $\zeta=\text{const}$. Положим $\alpha=X_\sigma$, $\beta=Y_\sigma$, $\gamma=X_\sigma Y_\zeta-Y_\sigma X_\zeta$ $(\alpha^2+\beta^2=1)$. Тогда нормаль $\mathbf{v}$ к границе сечения $\zeta=\text{const}$ имеет компоненты $\mathbf{v}=(\beta, -\alpha, 0)$, а нормаль к $G(\zeta)$ в трехмерном пространстве (x, y, z)

$$\mathbf{n}=\left(\frac{\beta}{\sqrt{1+\varepsilon^2\gamma^2}}, \frac{-\alpha}{\sqrt{1+\varepsilon^2\gamma^2}}, \frac{\varepsilon\gamma}{\sqrt{1+\varepsilon^2\gamma^2}}\right).$$

В случае волновода с жесткой стенкой граничное условие (5) заменяется следующим:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{G(\zeta)}=0.$$

Подставляя сюда выражение (3) и разделяя вещественную и мнимую части, получим для $(x, y) \in G(\zeta)$:

$$(\beta\Psi_x - \alpha\Psi_y + \varepsilon^2\gamma\Psi_\zeta)A = 0,$$

$$\beta A_x - \alpha A_y + \varepsilon^2\gamma A_\zeta = 0,$$

откуда следуют граничные условия для амплитуд и фазовых функций:

$$\frac{\partial A^{(m)}}{\partial \nu}\Big|_{G(\zeta)} = -\gamma A_\zeta^{(m-1)}|_{G(\zeta)}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial \Psi^{(m)}}{\partial \nu}\Big|_{G(\zeta)} = -\gamma \Psi_\zeta^{(m-1)}|_{G(\zeta)}.$$

Здесь $m=0, 1, 2, \ldots, A^{(-1)} \equiv 0, \quad \Psi^{(-1)} \equiv 0$.

Из формул (7) и (19) следует, что функция $A^{(0)}$ пропорциональна одной из собственных функций U_n задачи Неймана

$$\Delta U + \lambda U = 0, \quad (x, y) \in S(\zeta); \quad \frac{\partial U}{\partial \nu}\Big|_{G(\zeta)} = 0$$

(если соответствующее собственное число $\lambda_n(\zeta)$ не вырождено). Нормирующий множитель, зависящий от продольной координаты ζ, находится аналогично случаю волновода с мягкой стенкой и определяется соотношением

$$\iint\limits_{S(\zeta)} (2pA_\zeta^{(0)} + p'A^{(0)})A^{(0)}\,dx\,dy = p\int\limits_{G(\zeta)} \gamma(A^{(0)})^2\,d\sigma,$$

которое в силу тождества

$$\frac{d}{d\zeta}\iint\limits_{S(\zeta)} f(\mathbf{r}, \zeta)\,dx\,dy = \iint\limits_{S(\zeta)} f_\zeta(\mathbf{r}, \zeta)\,dx\,dy +$$

$$+ \int\limits_{G(\zeta)} (\mathbf{v}, \mathbf{R}_\zeta) f[\mathbf{R}(\sigma, \zeta), \zeta]\,d\sigma$$

сводится к формуле (10). Для определения фазы $\Psi^{(1)}(x, y, \zeta)$ служат уравнение (8) с граничным условием $\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \nu}\Big|_{G(\zeta)} = -\gamma p$, вытекающим из формулы (19), и условие разрешимости второго из уравнений (7), которое формулируется следующим образом:

$$\iint\limits_{S(\zeta)} [2p\Psi_\zeta^{(1)} + (\nabla\Psi^{(1)})^2](A^{(0)})^2\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{S(\zeta)} A_{\zeta\zeta}^{(0)} A^{(0)}\,dx\,dy - \int\limits_{G(\zeta)} \gamma A_\zeta^{(0)} A^{(0)}\,d\sigma.$$

Покажем, что в случае волновода с подобно меняющимся сечением фазовая функция $\Psi^{(1)}(x, y, \zeta)$ сохраняет тот же вид (18), что и для волновода с мягкой стенкой (с точностью до слагаемого $q_0(\zeta)$). Действительно, согласно формуле (15),

$$\frac{1}{R}\left[\beta\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi} - \alpha\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta}\right]_\Gamma = p[\beta(X_0' + \xi R') - \alpha(Y_0' + \eta R')]_\Gamma =$$

$$= p(Y_\sigma X_\zeta - X_\sigma Y_\zeta) = -\gamma p.$$

Поэтому, если положить, как и прежде, $\Psi^{(1)} = \Psi_1(x, y, \zeta) + Q(x, y, \zeta) = \psi_1(\xi, \eta, \zeta) + q(\xi, \eta, \zeta)$, то в силу формулы (19) нормальная производная

$\left.\frac{\partial Q}{\partial \nu}\right|_{G(\zeta)} = \frac{1}{R}\left[\beta\frac{\partial q}{\partial \xi} - \alpha\frac{\partial q}{\partial \eta}\right]_{\Gamma}$ будет обращаться в нуль. Повторяя рассуждения п. 2, можно свести задачу определения $q(\xi, \eta, \zeta)$ к уравнению (17) с граничным условием $\left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = 0$ и показать, что q есть функция только переменной ζ.

Найденные выше асимптотические решения (2) аналогичны нормальным волнам регулярного волновода. Они удовлетворяют уравнению Гельмгольца и граничному условию с точностью $O(\varepsilon^2)$ и в рассматриваемом приближении распространяются независимо, если собственные числа $_n(\zeta)$ не вырождены и если граница $G(\zeta)$ обладает гладкостью в продольном направлении. На стыке двух гладких волноводов происходит трансформация мод, тем большая, чем больше углы излома. Ее можно рассчитать, сшивая в переходном сечении поля, представленные суперпозицией частных решений (2). Если на практике необходимо устранить трансформацию волн, можно использовать фазовый корректор, который легко рассчитать, зная фазу $\Psi^{(1)}(x, y, \zeta)$ [7].

Погрешность полученных формул проще всего оценить, рассматривая двумерную модель волновода [7]. В этом случае явное решение уравнений (7) показывает, что поправкой $A^{(1)}$ к амплитуде $A^{(0)}$ можно пренебречь (для волн старших номеров), если $\varepsilon^2 kR \ll 1$. При этом изменения фазы волны в поперечном сечении, описывающиеся функцией $\Psi^{(1)} = O(\varepsilon kR)$, могут быть велики. Этот результат близок к условиям применимости метода плавных возмущений в теории рассеяния волн [10] (малость флуктуаций амплитуды при значительных флуктуациях фазы), однако аналогия является довольно поверхностной. Полученное приближенное выражение для нормальных волн

$$u(x, y, z) \approx \frac{\text{const}}{R(\zeta)\sqrt{p(\zeta)}} \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int p\, d\zeta + \right. \tag{20}$$
$$\left. + i\varepsilon[\psi_1(\xi, \eta, \zeta) + q_0(\zeta)]\right\} u_n(\xi, \eta)$$

можно рассматривать как результат перенормировки разложения (1), снимающей жесткое ограничение $\varepsilon kR \ll 1$, присущее методу [1]. Если же это условие выполнено, формула (20) согласуется с результатами работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bretherton F. P.* Propagation in Slowly Varying Waveguides. Proc. Roy. Soc., 1968, *A302*, 555–576.
2. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М., «Наука», 1973.
3. *Каценеленбаум Б. З.* Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М., Изд-во АН СССР, 1961.
4. *Weinberg H., Burridge R.* Horizontal Ray Theory for Ocean Acoustics. J. Acoust. Soc. America, 1974, *55*, 1, 63–79.
5. *Rosenfeld G., Keller J. B.* Wave Propagation in Nonuniform Elastic Rods. J. Acoust. Soc. America, 1975, *57*, 5, 1094–1096.
6. *Рытов С. М.* Дифракция света на ультразвуковых волнах. Изв. АН СССР. Сер. физ., 1937, 2, 223–259.
7. *Попов А. В.* Нормальные волны плавно-нерегулярного волновода. В сб. Теория дифракции и распространения волн, *2*, М., «Наука», 1977, 163–166.
8. *Кинбер Б. Е., Мальцев Н. Е., Токатлы В. И.* Асимптотическая теория нерегулярных волноводов и рупоров. Радиотехника и электроника, 1970, *15*, 12, 2512–2521.
9. *Попов А. В.* Коротковолновая асимптотика нормальных волн нерегулярного волновода. Радиотехника и электроника, 1977, *22*, 8, 1577–1582.
10. *Чернов Л. А.* Волны в случайно-неоднородных средах. М., «Наука», 1975.

Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн
Академии наук СССР

Поступила
27 июля 1977 г.
После переработки
22 мая 1978 г.