АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV 1978 Вып. 6

УДК 534.11

КОНЦЕНТРАТОРЫ ИЗГИБНЫХ ВОЛН

И. А. Сазонов

Рассчитаны характеристики концентратора изгибных волн со специальным законом изменения поперечного сечения вдоль оси концентратора. Рассмотрены схемы некоторых конструкций, в которых можно применять концентраторы изгибных волн.

В ультразвуковых инструментах со стержневыми концентраторами обычно используют продольные колебания. Если для данного технологического процесса, например для ультразвуковой сварки, необходимо получить поперечные колебания рабочего элемента, то к концентратору продольных волн присоединяют под прямым углом стержень постоянного сечения так, чтобы в нем возбуждались изгибные колебания [1, 2]. Применяя вместо стержня постоянного сечения сужающийся стержень — концентратор изгибных волн, можно получить дополнительное увеличение амплитуды колебаний рабочего элемента, а следовательно, повысить эффективность ультразвукового инструмента. Нами была разработана теория и даны методы расчета подобных концентраторов изгибных волн. Эти методы позволяют найти резонансную частоту концентратора, распределение поперечных смещений по длине концентратора и его коэффициент усиления по поперечным смещениям.

В основе расчетов лежит решение задачи об изгибных колебаниях стержней переменного сечения с теми или иными граничными условиями. Уравнение гармонических изгибных волн в стержнях переменного сечения в приближении элементарной теории изгиба имеет вид

$$\frac{1}{I}\frac{d^2}{dx^2}\left(I\frac{d^2U}{dx^2}\right)=\varkappa^4U, \tag{1}$$

где x — координата вдоль оси стержня, $U(x)$ — поперечное смещение оси стержня, $I(x)$ — момент инерции сечения стержня, $\varkappa=(\omega/cr)^{1/2}$ — волновое число изгибных волн в стержне постоянного сечения с радиусом инерции $r(x)=(I/S)^{1/2}$ (здесь ω — частота, $c=(E/\rho)^{1/2}$ — скорость распространения продольной волны в стержне постоянного сечения, E — модуль Юнга, ρ — плотность материала стержня, $S(x)$ — площадь поперечного сечения).

Точные решения этого уравнения в конечном виде можно получить только для стержней с некоторыми специальными законами изменения параметров сечения. Сюда относятся, например, стержни, у которых радиус инерции постоянный, а площадь сечения S меняется по закону $S=S^0\exp(-2\alpha x)$. Для них, как будет показано ниже, решения уравнения (1) имеют простой вид и этим типом стержней мы и ограничимся в данной работе. Примерами подобных стержней могут служить полоса с постоянной толщиной и экспоненциально меняющейся шириной или стержень в виде полого тела вращения с радиусами, меняющимися по законам $R_1=r[1+\exp(-2\alpha x)]^{1/2}$, $R_2=r[1-\exp(-2\alpha x)]^{1/2}$ (фиг. 1) и т. п.

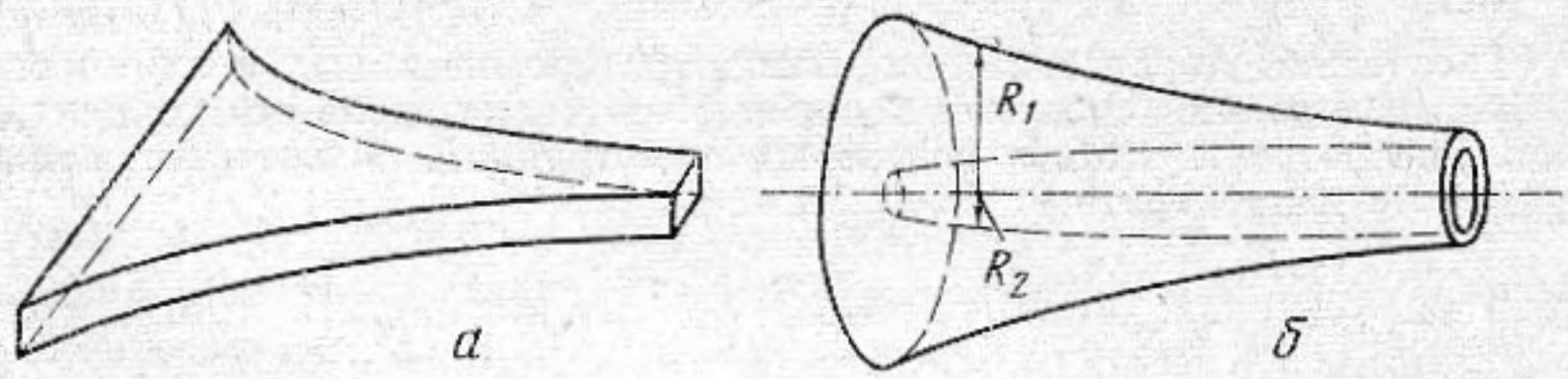
Для стержней выбранного типа уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{d^4U}{dx^4}-4\alpha\frac{d^3U}{dx^3}+4\alpha^2\frac{d^2U}{dx^2}-\varkappa^4U=0. \tag{2}$$

Частные линейно-независимые решения этого уравнения могут быть записаны следующим образом:

$$U_{1,2}=\exp(\pm i\mu x+\alpha x),\quad U_{3,4}=\exp(\pm\nu x+\alpha x),$$

где $\mu=\sqrt{\varkappa^2-\alpha^2}$, $\nu=\sqrt{\varkappa^2+\alpha^2}$. При частоте выше критической $\omega_{кр}=\alpha^2cr$ ($\mu=0$) решения $U_{1,2}$ описывают бегущие синусоидальные волны с экспоненциально меняющейся вдоль оси амплитудой, а решения $U_{3,4}$ — синфазные колебания с экспоненциально меняющейся амплитудой. На критической частоте все решения представляют синфазные колебания, причем



Фиг. 1. Концентратор в виде полосы с постоянной толщиной и экспоненциально меняющейся шириной (*а*), концентратор в виде полого тела вращения (*б*)

для трех из них амплитуда меняется по экспоненциальному закону, а для четвертого — по закону $U=x\exp(\alpha x)$. Наконец, при $\omega<\omega_{кр}$ все решения описывают синфазные колебания с экспоненциально меняющейся амплитудой.

Граничные условия выберем применительно к типичной задаче об ультразвуковых инструментах следующим образом: на широком конце концентратора ($x=0$) зададим амплитуду поперечного смещения U^0 и амплитуду угла поворота входного сечения ψ^0, а на узком конце ($x=l$) — безмоментную нагрузку, которую будем характеризовать отношением $Z_{нагр}$ поперечной силы к скорости поперечного смещения. Эти граничные условия запишутся в виде

$$U(0)=U^0,\quad M(l)=0,$$

$$\psi(0)=\psi^0,\quad Q(l)+i\omega Z_{нагр}U(l)=0,$$

где $\psi=dU/dx$ — угол поворота сечения стержня, $M=EI d\psi/dx$ — изгибающий момент, $Q=-dM/dx$ — перерезывающая сила. Распределение смещений вдоль оси концентратора найдем из общего решения уравнения (1) $U=C_1U_1+C_2U_2+C_3U_3+C_4U_4$, определяя коэффициенты $C_1,\ldots,C_4$ из граничных условий. Это дает:

$$U=U^0u_U+\psi^0u_\psi, \tag{3}$$

где
$$\begin{aligned}u_U=\{&[\gamma\delta(1-2\beta\zeta)\operatorname{ch}\delta+\beta\gamma(3+2\beta\zeta)\operatorname{sh}\delta]\cos\mu(l-x)+\\&+[\delta(\beta+2\gamma^2\zeta)\operatorname{ch}\delta+(2\beta^2-\gamma^2+2\beta^3\zeta)\operatorname{sh}\delta]\sin\mu(l-x)+\\&+[\gamma\delta(1-2\beta\zeta)\cos\gamma+\beta\delta(3+2\beta\zeta)\sin\gamma]\operatorname{ch}\nu(l-x)+\\&+[\gamma(\beta-2\delta^2\zeta)\cos\gamma+(2\beta^2+\delta^2+2\beta^3\zeta)\sin\gamma]\operatorname{sh}\nu(l-x)+\\&+\gamma\delta(1+2\beta\zeta)\cos\mu x-\beta\gamma(1+2\beta\zeta)\sin\mu x+\gamma\delta(1+2\beta\zeta)\operatorname{ch}\nu x-\\&-\beta\delta(1+2\beta\zeta)\operatorname{sh}\nu x\}\frac{\exp(\alpha x)}{\Delta},\end{aligned}$$

$$u_\psi=\{[4\beta\gamma\,\mathrm{ch}\,\delta+\gamma(4\beta^2+\varepsilon^2-2\varepsilon^2\beta\zeta)\,\mathrm{sh}\,\delta]\cos\mu(l-x)+$$
$$+[\delta(4\beta^2-\varepsilon^2+2\varepsilon^2\beta\zeta)\,\mathrm{ch}\,\delta+(4\beta^3+2\varepsilon^4\zeta)\,\mathrm{sh}\,\delta]\sin\mu(l-x)-$$
$$-[4\beta\gamma\delta\cos\gamma+\delta(4\beta^2-\varepsilon^2+2\varepsilon^2\beta\zeta)\sin\gamma]\,\mathrm{sh}\,\nu(l-x)-[\gamma(4\beta^2+\varepsilon^2-$$
$$-2\varepsilon^2\beta\zeta)\cos\gamma+(4\beta^3+2\varepsilon^4\zeta)\sin\gamma]\,\mathrm{sh}\,\nu(l-x)+\delta\varepsilon^2(1+2\beta\zeta)\sin\mu x+$$
$$+\gamma\varepsilon^2(1+2\beta\zeta)\,\mathrm{sh}\,\nu x\}\,\frac{l\exp(\alpha x)}{\Delta\varepsilon^2},$$
$$\Delta=[\gamma\delta(1-2\beta\zeta)\cos\gamma\,\mathrm{ch}\,\delta+\delta(2\beta+\varepsilon^2\zeta)\sin\gamma\,\mathrm{ch}\,\delta+$$
$$+\gamma(2\beta-\varepsilon^2\zeta)\cos\gamma\,\mathrm{sh}\,\delta+\beta^2(3+2\beta\zeta)\sin\gamma\,\mathrm{sh}\,\delta+\gamma\delta(1+2\beta\zeta)],$$
$$\beta=\alpha l,\quad \gamma=\mu l,\quad \delta=\nu l,\quad \varepsilon=\varkappa l,\quad \zeta=iZ_{\text{нагр}}/\rho\omega S(l)\,l.$$

Отсюда найдем частотную зависимость коэффициента усиления концентратора по амплитуде:

$$K_{UU}=U(l)/U^0=(\gamma\delta\cos\gamma+\beta\delta\sin\gamma+\gamma\delta\,\mathrm{ch}\,\delta+\beta\gamma\,\mathrm{sh}\,\delta)\times$$
$$\times\frac{\exp(\beta)}{\Delta}+\frac{\psi^0}{U^0}(1+2\beta\zeta)(\delta\sin\gamma+\gamma\,\mathrm{sh}\,\delta)\frac{l\exp(\beta)}{\varepsilon^2\Delta}. \tag{4}$$

Для определения резонансных частот концентратора найдем поперечную силу и момент, действующие на концентратор на широком конце; полагая, в зависимости от способа закрепления, равными нулю поперечную силу или момент, получим условия резонанса для соответственного колебания. Используя (3), получим:

$$Q(0)=Z_{11}(-i\omega U^0)+Z_{12}(-i\omega\psi^0),$$
$$M(0)=Z_{21}(-i\omega U^0)+Z_{22}(-i\omega\psi^0),$$

где

$$Z_{11}=i\rho cS^0r\varkappa\varepsilon[4\gamma\delta\zeta\cos\gamma\,\mathrm{ch}\,\delta+\delta\sin\gamma\,\mathrm{ch}\,\delta+\gamma\cos\gamma\,\mathrm{sh}\,\delta+$$
$$+\beta(2+\beta\zeta)\sin\gamma\,\mathrm{sh}\,\delta]/\Delta,$$
$$Z_{12}=i\rho cS^0r\{-\delta[\beta+\zeta(\gamma^2-\beta^2)]\cos\gamma\,\mathrm{sh}\,\delta+$$
$$+\gamma[\beta+\zeta(\delta^2+\beta^2)]\sin\gamma\,\mathrm{ch}\,\delta-\varepsilon^2\sin\gamma\,\mathrm{sh}\,\delta\}/\Delta,$$
$$Z_{21}=Z_{12},\quad Z_{22}=i\rho cS^0r/\varkappa\varepsilon[2\beta\gamma\delta(1+2\beta\zeta)-$$
$$-2\beta\gamma\delta(1+2\beta\zeta)\cos\gamma\,\mathrm{ch}\,\delta+\delta\varepsilon^2\sin\gamma\,\mathrm{ch}\,\delta-\gamma\varepsilon^2\cos\gamma\,\mathrm{sh}\,\delta+$$
$$+(2\beta^3-2\varepsilon^4\zeta+4\beta^4\zeta)\sin\gamma\,\mathrm{sh}\,\delta]/\Delta.$$

Величины Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22} образуют матрицу входного механического импеданца изгибно-колеблющегося стержня с безмоментной нагрузкой на втором конце [3, 4].

Применим теперь эти общие результаты к конкретным составным колебательным системам, в которых используются концентраторы изгибных волн.

Рассмотрим колебательную систему, состоящую из преобразователя, концентратора продольных волн и жестко прикрепленного к нему концентратора изгибных волн (фиг. 2). Пусть во время колебаний системы обеспечивается чисто поступательное движение входного сечения концентратора изгибных волн в поперечном направлении с амплитудой U^0. Тогда распределение смещений в концентраторе описывается выражениями (3) и (4), в которых надо положить $\psi^0=0$. Сила и момент, действующие в точке крепления концентраторов, определяются по формулам

$$Q(0)=-i\omega Z_{11}U^0,\quad M(0)=-i\omega Z_{21}U^0.$$

Если собственная частота концентратора изгибных волн без нагрузки при кулисном закреплении его широкого конца (отсутствие поворота и продольных смещений при свободных поперечных смещениях) равна собст-

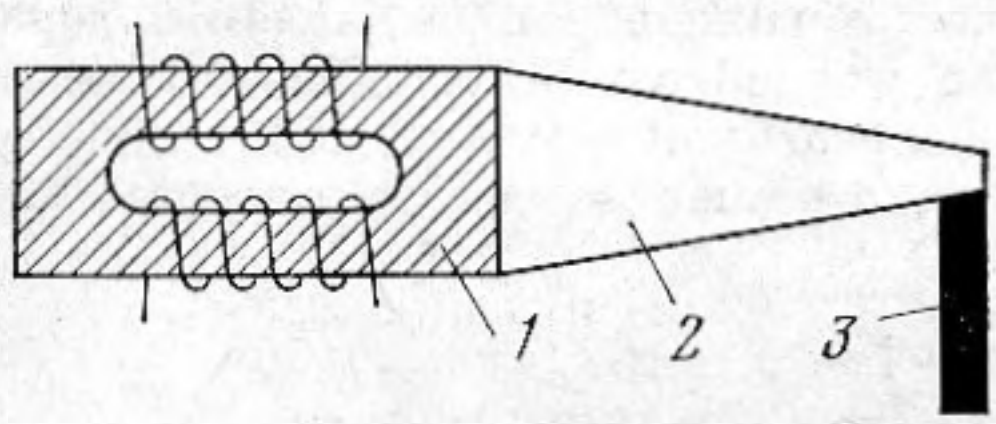
венной частоте колебательной системы без этого концентратора, то система в целом находится в резонансе. Требуемые размеры концентратора изгибных волн найдем, полагая $Q(0)$ равным нулю, что приводит к уравнению * $Z_{11}|_{\zeta=0}=0$ или

$$\gamma \cos \operatorname{sh} \delta + \delta \sin \gamma \operatorname{ch} \delta + 2\beta \sin \gamma \operatorname{sh} \delta = 0. \tag{5}$$

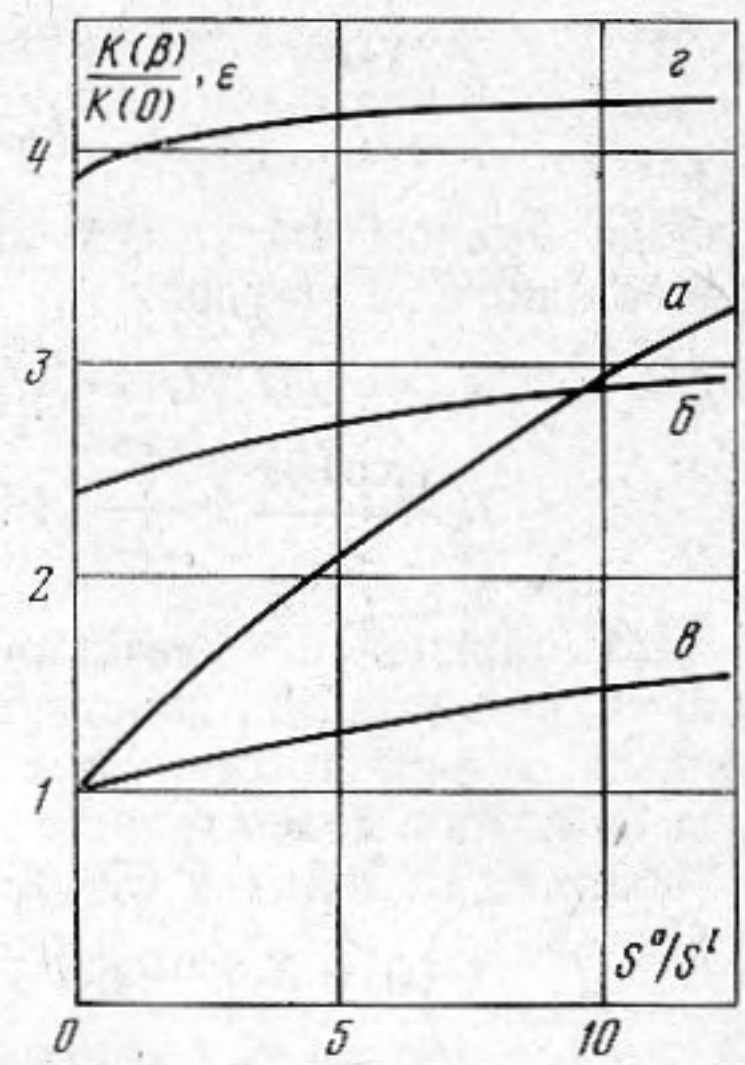
Набег фазы изгибной волны ε, найденный из этого уравнения, и отношение коэффициента усиления концентратора к коэффициенту усиления

Фиг. 2. Колебательная система: *1* — преобразователь, *2* — концентратор продольных волн, *3* — концентратор изгибных волн

Фиг. 3. Зависимости набега фазы изгибной волны (*б*, *г*) и отношения коэффициента усиления концентратора к коэффициенту усиления стержня постоянного сечения (*а*, *в*) от отношения площадей входного и выходного сечений; графики *а* и *б* для концентратора в режиме $Q(0)|_{\zeta=0}=0$, *в* и *г* — для концентратора в режиме $M(0)|_{\zeta=0}=0$



Фиг. 2



Фиг. 3

стержня постоянного сечения, работающего в таком же режиме, показаны на фиг. 3 (кривые *а* и *б*) в зависимости от отношения площадей входного и выходного сечения.

Рассмотрим теперь колебательную систему с другим способом возбуждения, состоящую из двух преобразователей, волновода изгибных волн и концентратора изгибных волн, жестко прикрепленного к волноводу (фиг. 4) (см. [2] стр. 141). Пусть во время колебаний обеспечивается чисто вращательное движение входного сечения концентратора с амплитудой угла поворота ψ^0. Тогда распределение смещений в концентраторе дается выражением (3), в котором следует положить $U^0=0$, а сила и момент, действующие в точке соединения концентратора и волновода, определяются по формулам

$$Q(0)=-i\omega Z_{12}\psi^0, \quad M(0)=-i\omega Z_{22}\psi^0.$$

В этой конструкции для характеристики работы концентратора вместо коэффициента усиления по амплитуде целесообразно ввести отношение амплитуды смещения узкого конца концентратора к амплитуде угла поворота входного сечения. Это отношение назовем коэффициентом преобра-

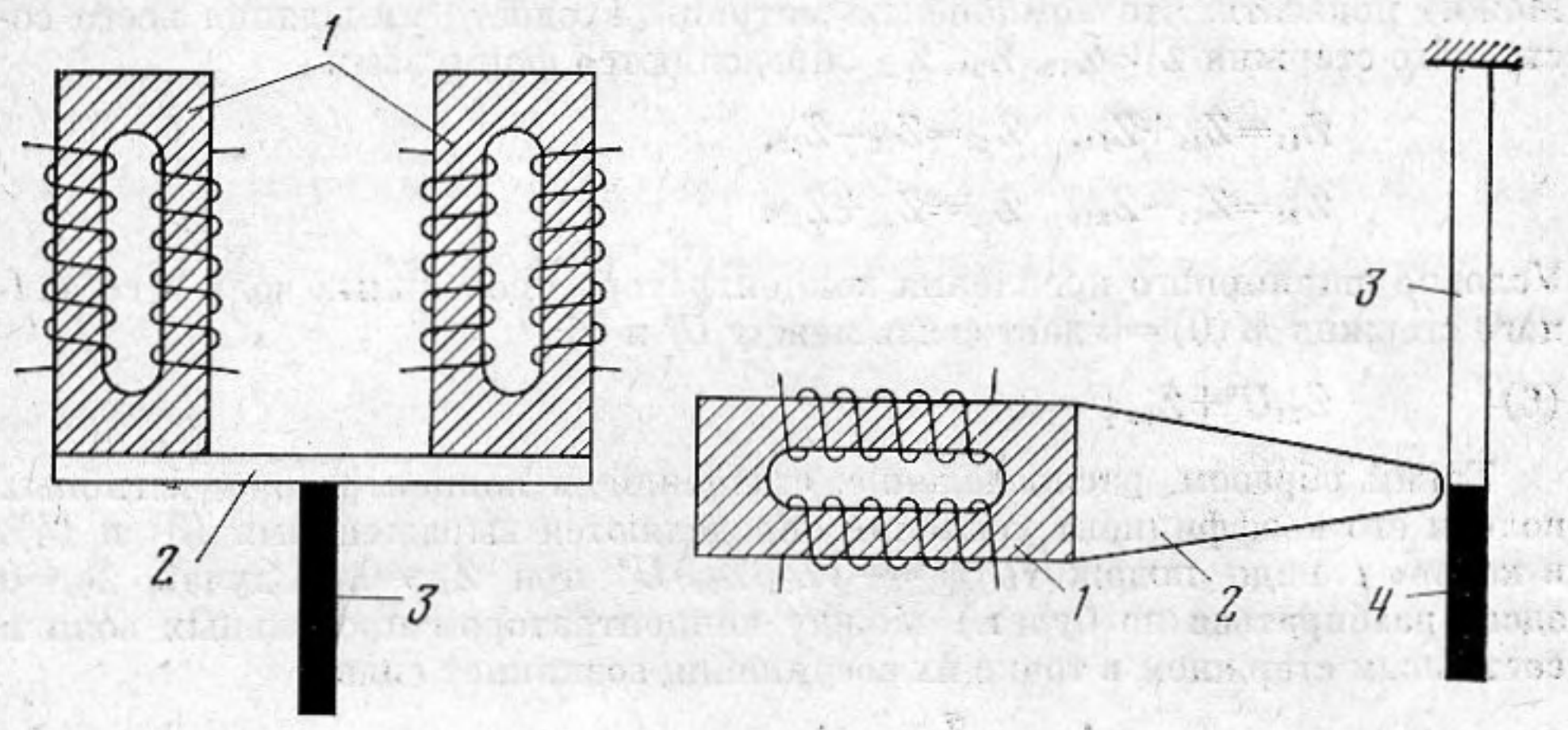
---

* Если в точке $x=0$ имеется граничное условие импеданцного типа с матрицей $\|Z^0_{i,j}\|$, где i, $j=1, 2$, в которой все компоненты конечны, то, согласно [4] (формула (5)), уравнение собственных частот можно записать в виде $\det\|Z_{ij}-Z_{ij}^0\|=0$. В нашем случае, однако, матрица $\|Z_{ij}^0\|$ имеет вид $\left\|\begin{smallmatrix}0 & C_1\\ C_2 & \infty\end{smallmatrix}\right\|$, где C_1, C_2 произвольны (вырожденный случай), и, очевидно, собственные частоты из уравнения вида (5) работы [4] получены быть не могут. То же замечание относится и к случаю закрепления шарнирного типа (см. ниже).

зования. Для него из (2) получается выражение

$$K_{\psi U}=\frac{U(l)}{\mathfrak{h}^0}=(1+2\beta\zeta)\,(\gamma\sin\gamma-\delta\,\mathrm{sh}\,\delta)\frac{l\exp(\beta)}{\Delta}.$$

Если собственная частота концентратора без нагрузки при шарнирном закреплении его широкого конца равна собственной частоте системы без концентратора, то вся система в целом находится в резонансе. Требуемые размеры концентратора найдем, полагая $M(0)$ равным нулю, что приво-



Фиг. 4 Фиг. 5

Фиг. 4. Колебательная система: *1* — преобразователи, *2* — волновод изгибных волн, *3* — концентратор изгибных волн

Фиг. 5. Колебательная система: *1* — преобразователь, *2* — концентратор продольных волн, *3* — стержень постоянного сечения, *4* — концентратор изгибных волн

дит к уравнению $Z_{22}|_{\zeta=0}=0$ или $2\beta\gamma\delta-2\beta\gamma\delta\cos\gamma\,\mathrm{ch}\,\delta+\delta\varepsilon^2\sin\gamma\,\mathrm{ch}\,\delta-\gamma\varepsilon^2\cos\gamma\,\mathrm{sh}\,\delta+2\beta^2\sin\gamma\,\mathrm{sh}\,\delta=0$.

Набег фазы изгибной волны ε, найденный из этого уравнения, и отношение коэффициента преобразования концентратора к коэффициенту преобразования стержня постоянного сечения в зависимости от отношения площадей входного и выходного сечения показаны на фиг. 3 (кривые *в* и *г*), из которой видно, что с увеличением отношения площадей коэффициент преобразования концентратора, работающего в рассмотренном режиме, растет слабо.

Рассмотрим теперь более сложную конструкцию, состоящую из преобразователя, концентратора продольных волн и составного стержня, у которого одна часть имеет постоянное сечение, а другая выполнена в виде концентратора изгибных волн; при этом составной стержень прижат к выпуклой части концентратора продольных волн силой, достаточной для того, чтобы во время работы контакт между стержнем и концентратором не нарушался (фиг. 5). Такое соединение аналогично шарнирному. Матрицу входного механического импеданца составного стержня можно найти, рассчитав отдельно входной импеданц концентратора и входной импеданц стержня постоянного сечения, у которого второй конец жестко закреплен. Компоненты входного импеданца стержня постоянного сечения можно рассчитать тем же методом, которым были определены компоненты входного импеданца концентратора, при этом получаются следующие выражения:

$$Z_{11}=\frac{i\rho cS\tilde{r}\varkappa}{\Lambda}(\cos\tilde{\varepsilon}\,\mathrm{sh}\,\tilde{\varepsilon}+\sin\tilde{\varepsilon}\,\mathrm{ch}\,\tilde{\varepsilon}),$$

$$Z_{12}=Z_{21}=-\frac{i\rho c\tilde{S}\tilde{r}}{\tilde{\Delta}}\sin\tilde{\varepsilon}\,\mathrm{sh}\,\tilde{\varepsilon},$$

$$Z_{22}=\frac{i\rho c\tilde{S}\tilde{r}}{\tilde{\Delta}\tilde{\varkappa}}(\sin\tilde{\varepsilon}\,\mathrm{ch}\,\tilde{\varepsilon}-\cos\tilde{\varepsilon}\,\mathrm{sh}\,\tilde{\varepsilon}),$$

Здесь $\tilde{\Delta}=1-\cos\tilde{\varepsilon}\,\mathrm{ch}\,\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon}=\tilde{\varkappa}\tilde{l}$ — набег фазы изгибной волны на всей длине стержня постоянного сечения, $\tilde{\varkappa}$ — волновое число изгибных волн в этом стержне, $\tilde{l}$ — длина этого стержня, $\tilde{S}$ и $\tilde{r}$ — его площадь и радиус инерции. Можно показать, что компоненты матрицы входного импеданца всего составного стержня $\hat{Z}_{11}$, $\hat{Z}_{12}$, $\hat{Z}_{21}$, $\hat{Z}_{22}$ определяются формулами

$$\hat{Z}_{11}=Z_{11}+\tilde{Z}_{11},\quad \hat{Z}_{12}=Z_{12}-\tilde{Z}_{12},$$

$$\hat{Z}_{21}=Z_{21}-\tilde{Z}_{21},\quad \hat{Z}_{22}=Z_{22}+\tilde{Z}_{22}.$$

Условие шарнирного крепления концентратора продольных волн и составного стержня $M(0)=0$ дает связь между U^0 и ψ^0:

$$\hat{Z}_{21}U^0+\hat{Z}_{22}\psi^0=0. \tag{6}$$

Таким образом, распределение смещений в концентраторе изгибных волн и его коэффициент усиления определяются выражениями (3) и (4), в которых надо положить $\psi^0=-(\hat{Z}_{21}/\hat{Z}_{22})U^0$ при $\hat{Z}_{22}\neq 0$. (Случай $\hat{Z}_{22}=0$ здесь разбираться не будет.) Между концентратором продольных волн и составным стержнем в точке их соединения возникнет сила

$$Q(0)=-i\omega\left(\hat{Z}_{11}-\frac{\hat{Z}_{21}}{\hat{Z}_{22}}\hat{Z}_{12}\right)U^0.$$

Если частота собственных колебаний составного стержня равна резонансной частоте системы «преобразователь — концентратор продольных волн», то на этой частоте в отсутствие внешней нагрузки вся система находится в резонансе *. Резонансные размеры составного стержня находятся из условия $Q(0)|_{\zeta=0}=0$, откуда

$$(\hat{Z}_{11}\hat{Z}_{22}-\hat{Z}_{21}\hat{Z}_{12})|_{\zeta=0}=0.$$

Рассмотрим более частный случай, когда точка соединения находится в пучности смещений составного стержня, что эквивалентно условию $\psi^0=0$. В этом случае $\hat{Z}_{21}=\hat{Z}_{12}=0$ (это видно из формулы (6)); и, следовательно, формула для $Q(0)$ упрощается и принимает вид

$$Q(0)=-i\omega\hat{Z}_{11}U^0,$$

а условие $Q(0)|_{\zeta=0}=0$ соответственно сводится к уравнению

$$\hat{Z}_{11}|_{\zeta=0}=0.$$

Рассмотрим еще более частный случай, когда кроме всех этих условий выполняется еще условие

$$Z_{11}|_{\zeta=0}=0,$$

и, следовательно,

$$Z_{11}=0.$$

Для этого необходимо, чтобы резонансной частоте системы «преобразователь — концентратор продольных волн» равнялись собственные частоты в отдельности стержня постоянного сечения, защемленного на одном

* Кроме этих условий необходимо добавить еще одно: точка соединения концентратора продольных волн и стержня не должна являться узлом смещений для изгибных волн. В противном случае существенна роль даже малых потерь в изгибных волнах.

конце и кулисно закрепленного на другом, и концентратора изгибных волн, кулисно закрепленного на входном конце и свободного на другом. Вид колебаний и зависимость коэффициента усиления и набега фазы изгибной волны от отношения площадей в этом случае точно такие же, как и в случае концентратора, работающего в режиме $Q(0)|_{\zeta=0}=0$ и изображенного на фиг. 2. Соответствующие графики представлены на фиг. 3 (кривые *а* и *б*).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брук М. В.* Расчет стержней продольно-поперечных колебательных систем для ультразвуковой сварки. Ультразвуковая техника, 1966, *3*, 28–42.
2. *Мицкевич А. М.* Ультразвуковая сварка металлов. В кн. Физика и техника мощного ультразвука, под ред. Л. Д. Розенберга, т. 3, М., «Наука», 1970, 71–164.
3. *Тютекин В. В., Шкварников А. П.* Внутренние изгибные импеданцы и их применение для задач распространения волн по неоднородным стержням. Акуст. ж., 1968, *14*, 2, 275–281.
4. *Тютекин В. В., Шкварников А. П.* Расчет резонансных частот изгибно-колеблющихся неоднородных стержней импеданцным методом. Акуст. ж., 1968, *14*, 2, 305–307.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
22 марта 1977 г.
После повторного исправления
14 марта 1978 г.