

УДК 534.231.1-14

**АКУСТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ
НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ***И. А. Чабан*

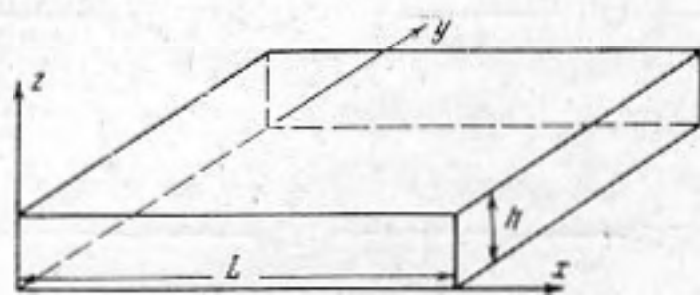
Показано, что в нормальном слое нематического жидкого кристалла под влиянием периодического сближения пластин, ограничивающих этот слой, возникает неустойчивость. Пороги этой неустойчивости рассчитаны в двух случаях: когда жидкий кристалл не может растекаться в стороны и когда он может растекаться в одном направлении. Во втором случае порог оказывается значительно ниже, чем в первом. Найден также порог возникновения доменной структуры во втором случае.

Акустогидродинамическая неустойчивость нематических жидких кристаллов (НЖК), т. е. неустойчивость, возникающая под влиянием звука, наблюдалась в целом ряде работ [1-9]. В [10] была сделана попытка объяснить эту неустойчивость ориентирующим действием акустических потоков, однако при этом величина порога оказалась значительно больше наблюдаемой. Аналогичное объяснение, но без учета анизотропии вязкости, было предложено в [9]. Нетрудно убедиться, что при правильной оценке разности фаз между обыкновенным и необыкновенным лучом в этом случае также получается завышенное значение акустической мощности, при которой возникает значительная переориентация молекул в НЖК. В [3] была сделана попытка объяснить акустогидродинамическую неустойчивость в ориентированных слоях НЖК влиянием квадратичных членов, пропорциональных как углу отклонения директора, так и градиенту скорости. Однако соответствующий расчет проведен в этой работе некорректно. Отсутствие теории акустогидродинамической неустойчивости и явилось основанием к проведению данной работы.

Эта работа является продолжением работы [11], посвященной виброгидродинамической неустойчивости, т. е. неустойчивости, возникающей при колебаниях в своей плоскости нижней пластины, ограничивающей НЖК-слой. Как и в [11], рассматриваемая здесь неустойчивость трактуется как параметрическая. При этом роль периодического параметра, раскачивающего систему, играет решение линеаризованной системы уравнений с периодическими граничными условиями, которое через квадратичные члены входит в систему уравнений для следующего приближения. Как и в [11], здесь будут рассматриваться лишь гомеотропные слои НЖК. Мы ограничимся также рассмотрением устройств, в которых влияние звука сводится к периодическим сближениям верхней и нижней пластины, ограничивающих НЖК-слой. Как будет видно из дальнейшего, пороги возникновения акустогидродинамической неустойчивости существенно зависят от того, может ли НЖК растекаться в стороны при таком сжатии слоя или нет. Мы рассмотрим два случая: устройства, в которых НЖК ограничен боковыми стенками, не позволяющими ему растекаться в стороны, но не препятствующими однородному сжатию, и устройства, в которых НЖК может растекаться при сжатии, но лишь в одном направлении.

Пусть верхняя и нижняя пластины периодически сближаются с амплитудой относительного смещения u_0 и частотой ω и НЖК не может растекаться в стороны. Расположим координатные оси по отношению к НЖК-слою так, как указано на фигуре, и обозначим через h и L размеры в направлении осей z и x (при покоящихся пластинах директор в каждой точке слоя направлен вдоль оси z). Будем считать, что неустойчивость связана с появлением колебаний, при которых директор остается в плоскости zx . Найдем порог неустойчивости по отношению к этим колебаниям.

Ход расчета будет следующим. Напишем систему уравнений, связывающих компоненты скорости смещений v_x и v_z и угол θ отклонения директора от оси z ; v_x , v_z , θ будем считать малыми величинами. Систему уравнений напишем с точностью до квадратичных по v_x , v_z , θ членов, а линейную систему уравнений, которая получается при пренебрежении этими квадратичными членами, назовем порождающей. Обозначим через $v_x^{(0)}$, $v_z^{(0)}$, $\theta^{(0)}$ решение этой порождающей системы с заданными граничными условиями.



Расположение координатных осей относительно НЖК-слоя

Решение системы уравнений, записанных с учетом квадратичных членов, представим в виде

$$v_x = v_x^{(0)} + v_x^{(1)}, \quad v_z = v_z^{(0)} + v_z^{(1)}, \quad \theta = \theta^{(0)} + \theta^{(1)},$$

где $v_x^{(1)}$, $v_z^{(1)}$, $\theta^{(1)}$ — малые поправки, удовлетворяющие нулевым граничным условиям (граничным условиям, наложенным на полное решение, но с нулевой правой частью). Подставляя эти выражения в систему уравнений, записанных с учетом квадратичных членов, и сохраняя лишь линейные по $v_x^{(1)}$, $v_z^{(1)}$, $\theta^{(1)}$ члены, получаем систему линейных уравнений для $v_x^{(1)}$, $v_z^{(1)}$, $\theta^{(1)}$, в которую решение порождающей системы входит как периодический параметр (систему уравнений в вариациях). Именно этот периодический параметр, так называемая накачка, раскачивает систему и приводит к ее неустойчивости. По причине, указанной в [11], в этих уравнениях квадратичные по $v_x^{(0)}$, $v_z^{(0)}$, $\theta^{(0)}$ слагаемые можно отбросить как не существенные для анализа неустойчивости. Систему уравнений для $v_x^{(1)}$, $v_z^{(1)}$, $\theta^{(1)}$ будем решать методом Хилла. При этом найдем условия, при которых возможны неограниченно возрастающие со временем решения. Чтобы более наглядно продемонстрировать этот метод, проведем расчет без учета акустических потоков. Результаты же, которые получаются с учетом акустических потоков, дадим без вывода. Далее будем считать, что $k_{зв}h \ll 1$, где $k_{зв}$ — волновое число звуковой волны. При этом условии решение порождающей системы представляется в виде

$$v_x^{(0)} = \theta^{(0)} = 0, \quad v_z^{(0)} = \frac{2}{h} \left(z - \frac{h}{2} \right) \omega u_0 \cos \omega t.$$

Система уравнений в вариациях имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2 v_z^{(1)}}{\partial t^2} &= \mathcal{K} \left(\frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z^{(1)}}{\partial x \partial z} \right) + \eta \frac{\partial^3 v_x^{(1)}}{\partial t \partial z^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 v_z^{(1)}}{\partial t \partial x^2} + \\
 &+ \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left[\frac{\mathcal{K}_{11}}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \theta^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\mathcal{K}_{33}}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \theta^{(1)}}{\partial z^2} \right] + \\
 &+ (\alpha_5 + \mu_2) \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left(\theta^{(1)} \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial z} \right), \\
 \rho \frac{\partial^2 v_z^{(1)}}{\partial t^2} &= \mathcal{K} \left(\frac{\partial^2 v_z^{(1)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial z \partial x} \right) + \eta \frac{\partial^3 v_z^{(1)}}{\partial t \partial x^2} + \eta_2 \frac{\partial^3 v_x^{(1)}}{\partial t \partial z^2} + \\
 &+ (\alpha_2 + \alpha_5) \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \left(\theta^{(1)} \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial z} \right) + (\alpha_5 + \mu_2) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\theta^{(1)} \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial z} \right), \\
 \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial z} + \frac{\mathcal{K}_{11}}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \theta^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\mathcal{K}_{33}}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \theta^{(1)}}{\partial z^2} - \theta^{(1)} \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial z}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность, \mathcal{K} — модуль всестороннего сжатия, α_i — постоянные Лесли, μ_2 — коэффициент объемной вязкости (см. [11]), $\mathcal{K}_{11}, \mathcal{K}_{33}$ — постоянные Франка, $\eta = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)$, $\eta_1 = \frac{1}{2}(\alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_2)$, $\eta_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_4 + 3\alpha_5)$,

$\gamma_1 = \alpha_5 - \alpha_6$. Линеаризация системы уравнений (1) сводится к пренебреже-

нию в первом уравнении членом $(\alpha_5 + \mu_2) \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left(\theta^{(1)} \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial z} \right)$ по сравнению с

$(\alpha_5 + \mu_2) \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left(\theta^{(1)} \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial z} \right)$ и аналогичной операции в остальных уравнениях,

что возможно в силу предположенной малости $v_z^{(1)}/v_z^{(0)}$; малость $v_x^{(1)}/v_x^{(0)}$, $\theta^{(1)}/\theta^{(0)}$ в данном случае не требуется. При написании (1) предполагалось, что $\alpha_3 = 0$ в силу малости этого коэффициента, а также отбрасывались квадратичные члены в слагаемых, связанные с франковской энергией, из-за малости последней всюду, кроме очень тонкого слоя (толщиной $\sim \sqrt{\mathcal{K}_{33}/\gamma_1 \omega}$) вблизи пластин, ограничивающих НЖК. В линейной части уравнений (но не в квадратичной) при написании вязких членов НЖК считался несжимаемым. Учет акустических потоков сводится к добавлению к правым частям первых двух уравнений слагаемых:

$$-\rho \frac{\partial}{\partial t} \left[v_z^{(0)} \frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial z} \right] \quad \text{и} \quad -\rho \frac{\partial}{\partial t} \left[v_z^{(0)} \frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial z} + v_z^{(1)} \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial z} \right]$$

соответственно. Периодическим параметром, раскачивающим систему, является величина $\partial v_z^{(0)}/\partial z$, которую представим в виде

$$\frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial z} = F_1 (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}),
 \tag{2}$$

где $F_1 = \omega u_0/h$.

Решение системы (1) будем искать в виде

$$(3) \quad v_x^{(1)} = \sum_{l=0, \pm 1}^{\pm \infty} A(k, q, \sigma - l\omega) \exp[iqx + ikz - i(\sigma - l\omega)t],$$

$$v_z^{(1)} = \sum_{l=0, \pm 1}^{\pm \infty} \tilde{A}(k, q, \sigma - l\omega) \exp[iqx + ikz - i(\sigma - l\omega)t],$$

$$\theta^{(1)} = \sum_{l=0, \pm 1}^{\pm \infty} \tilde{\tilde{A}}(k, q, \sigma - l\omega) \exp[iqx + ikz - i(\sigma - l\omega)t].$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем бесконечную алгебраическую систему уравнений для коэффициентов, входящих в (3). Как условие существования отличного от нуля решения этой системы получаем дисперсионное уравнение $\Delta = 0$, где Δ — определитель бесконечного ранга. Это дисперсионное уравнение определяет возможные значения σ как функции k и q . Из решений, соответствующих фиксированным k и q , следует составить решение, удовлетворяющее нулевым граничным условиям, что и определит возможные значения k и q . В нулевом по накачке приближении этими значениями являются $k = \frac{\pi}{h} n$ и $q = \frac{\pi}{L} m$, где n и m — произвольные целые

числа, а также любые значения q , удовлетворяющие условию $|qL| \ll 1$. В силу малости $F_1/\rho\omega^2$ ограничимся в дисперсионном уравнении квадратичными по F_1 членами. При этом все корни дисперсионного уравнения сведутся к корням уравнения

$$(4) \quad d = \begin{vmatrix} L(\sigma - \omega, k); & -\mathcal{H}qk; & M(\sigma - \omega, k); & 0 & 0 & n(\sigma, k)F_1 \\ -\mathcal{H}qk & N(\sigma - \omega, k); & 0 & 0 & 0 & q(\sigma, k)F_1 \\ ik & 0 & P(\sigma - \omega, k); & 0 & 0 & -F_1 \\ 0 & 0 & n(\sigma - \omega, k)F_1; & L(\sigma, k); & -\mathcal{H}qk & M(\sigma, k) \\ 0 & 0 & q(\sigma - \omega, k)F_1; & -\mathcal{H}qk; & N(\sigma, k) & 0 \\ 0 & 0 & -F_1 & ik & 0 & P(\sigma, k) \end{vmatrix} = 0$$

и корням, полученным из них заменой σ на $\sigma + l\omega$.

Здесь введены обозначения:

$$L(\sigma, k) = \rho\sigma^2 - \mathcal{H}q^2 + i\sigma k^2 \eta + i\sigma q^2 \eta_1,$$

$$N(\sigma, k) = \rho\sigma^2 - \mathcal{H}k^2 + i\sigma q^2 \eta + i\sigma k^2 \eta_2,$$

$$M(\sigma, k) = -\alpha_2 \sigma k \left[\frac{\mathcal{H}_{11}}{\gamma_1} q^2 + \frac{\mathcal{H}_{33}}{\gamma_1} k^2 \right],$$

$$P(\sigma, k) = i\sigma - \frac{\mathcal{H}_{11}}{\gamma_1} q^2 - \frac{\mathcal{H}_{33}}{\gamma_1} k^2,$$

$$n(\sigma, k) = (\alpha_5 + \mu_2) \sigma k,$$

$$q(\sigma, k) = (\alpha_5 + \alpha_2) \sigma k + (\alpha_5 + \mu_2) \sigma q.$$

Прежде всего найдем корни уравнения $d=0$ при $F_1=0$. Среди этих корней лишь корень

$$\sigma = -iv_0 Q(q, k), \quad \text{где} \quad v_0 = \frac{\mathcal{H}_{11}}{\gamma_1} q^2 + \frac{\mathcal{H}_{33}}{\gamma_1} k^2,$$

$$Q(q, k) = 1 - \alpha_2 \left[\eta + \frac{q^2}{k^2} (\eta_1 + \eta_2) + \frac{q^4}{k^4} \eta \right]^{-1},$$

имеет малую мнимую часть (отрицательную). И только для этого корня можно надеяться, что квадратичные по F_1 слагаемые окажутся достаточно большими, чтобы выполнялось условие $\text{Im } \sigma > 0$ и, следовательно, решение стало неограниченно возрастающим со временем. Близкий к этому корню корень уравнения (4) представим в виде

$$\sigma = -i\nu_0 Q(q, k) + \delta,$$

и будем считать, что $|\delta| \ll \nu_0 Q(q, k)$. Подставляя это выражение для σ в уравнение (4), найдем выражение для $\text{Im } \delta$. Для частот порядка 1 МГц можно воспользоваться соотношениями $\rho\omega^2 \gg \omega\eta\alpha_i$ и получить следующее выражение:

$$(5) \quad \text{Im } \delta = F_1^2 k^2 \frac{(\alpha_5 + \mu_2) \left(1 - \frac{k^2}{k_{зв}^2}\right) + [(\alpha_5 + \alpha_2)k + (\alpha_5 + \mu_2)q] \frac{q}{k_{зв}^2}}{\rho\omega^2 \left(\frac{q^2 + k^2}{k_{зв}^2} - 1\right)} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{(\alpha_5 + \mu_5)(1 - q^2/k^2) - (\alpha_5 + \mu_2) \frac{q}{k}}{\eta + \frac{q^2}{k^2}(\eta_1 + \eta_2) + \frac{q^4}{k^4} \eta} \right].$$

Это выражение может быть упрощено благодаря неравенству $k \gg k_{зв}$. Дальнейший расчет проведем для наиболее широко используемого жидкого кристалла МББА (*p*-метоксибензилиден-*p*-*n*-бутиланилин).

Нетрудно видеть, что для МББА при q/k порядка единицы величина $\text{Im } \delta$ оказывается положительной. Пороговое смещение пластин $(u_0)_{\text{пор}}$ при этом находится из условия $\text{Im } \delta = \nu_0 Q(q, k)$, которое дает при $k = \pi/h$

$$(6) \quad (u_0)_{\text{пор}} = h \left\{ \left(\frac{\mathcal{K}_{11}}{\gamma_1} a^2 + \frac{\mathcal{K}_{33}}{\gamma_1} \right) \left(1 - \frac{\alpha_2}{a^4 \eta + a^2(\eta_1 + \eta_2) + \eta} \right) \frac{\rho(a^2 + 1)}{\alpha_5 + \mu_2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(a^2 + a \frac{\alpha_5 + \alpha_2}{\alpha_5 + \mu_2} - 1 \right)^{-1} \left[1 + \frac{(\alpha_5 + \mu_2)(1 - a^2) - (\alpha_5 + \alpha_2)a}{a^4 \eta + a^2(\eta_1 + \eta_2) + \eta} \right]^{-1} \right\}^{1/2}$$

где $a = qh/\pi$. Это выражение для МББА имеет два примерно одинаковых минимума при $a \approx 1,4$ и 5. Подставляя $a = 5$ в (6), получим для порогового смещения выражение

$$(7) \quad (u_0)_{\text{пор}} = 5h \left[\frac{\mathcal{K}_{11}\rho}{\gamma_1(\alpha_5 + \mu_2)} \right]^{1/2}$$

или для порогового давления $p_{\text{пор}}$ внутри слоя

$$(8) \quad p_{\text{пор}} = 5\mathcal{K} \left[\frac{\mathcal{K}_{11}\rho}{\gamma_1(\alpha_5 + \mu_2)} \right]^{1/2}.$$

При учете акустических потоков в выражении (6) единица в квадратной скобке заменяется на $(1 + a^2)^{-1}$. Минимум соответственно измененного выражения имеет место при $a \approx 1,2$. Подставляя это значение a в (6), приходим к выражению для $(u_0)_{\text{пор}}$ с учетом акустических потоков. Это пороговое смещение имеет тот же порядок величины и ту же зависимость от основных параметров, что и порог в отсутствие акустических потоков. Численная оценка по формуле (7) дает для МББА при $h = 10^{-2}$ см значение $(u_0)_{\text{пор}} \approx 10^{-5}$ см.

При превышении порогового смещения, определяемого выражением (7), возникает синусоидальное изменение угла поворота директора θ по толщине слоя с волновым числом π/h , а также изменение θ по оси x с волновым числом того же порядка. Наряду с почти статическим изме-

неиом ориентации (с частотой $\sim F_1^2$) появляются также ее периодические изменения с частотами $\omega, 2\omega, \dots$, которые включаются последовательно (см. [11]). Эти изменения θ сопровождаются движением молекул с той же периодичностью. Поскольку направление x ничем не выделено, доменная структура при этом не образуется.

При распространении звуковой волны в безграничном НЖК, ориентированном магнитным полем, вопрос об устойчивости ориентации молекул сводится к рассмотренной задаче. Порог при этом можно найти из выражения (6), где, однако, h следует заменить на λ (λ — длина звуковой волны).

Вышеприведенный расчет базировался на предположении, что неустойчивость связана с появлением колебаний, при которых директор остается в плоскости. Нами был проведен аналогичный анализ в предположении, что неустойчивость связана с появлением цилиндрически-симметричных колебаний. Оказалось, что в этом случае порог имеет тот же порядок величины и ту же зависимость от основных параметров, что и порог, представленный выражением (8).

Полученные выше результаты для нерастекающихся НЖК позволяют вывести определенные заключения о причине неустойчивости в устройствах, где НЖК может растекаться в стороны. Действительно, сравнивая полученные значения $(u_0)_{\text{пор}}$ с наблюдавшимися в таких устройствах, можно видеть, что первые примерно на порядок больше вторых. Это дает основание предполагать, что неустойчивость в устройствах, позволяющих НЖК растекаться в стороны, связана с существованием скоростей, параллельных плоскостям пластин.

Перейдем теперь к более строгому рассмотрению устройств, в которых при сжатии слоя НЖК может растекаться в стороны. Рассмотрим устройство, использовавшееся в работе [9]. В нем между пластинами помещались две параллельные прокладки, задающие толщину слоя h и препятствующие движению НЖК в направлении оси y ; в направлении же оси x НЖК мог свободно растекаться при сжатии (см. фигуру). При нахождении решения порождающей системы будем представлять НЖК просто в виде вязкой жидкости с коэффициентом вязкости η . Пренебрегая неоднородными волнами и используя условия $k_{zv}h \ll 1$, $\kappa h \gg 1$ ($\kappa = \sqrt{\omega\rho/2\eta}$), это решение можно представить в следующем виде*:

$$(9) \quad v_x^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{m=\pm 1, \pm 3, \dots} A_m \frac{\pi m}{L} \cos \frac{\pi m x}{L} [1 - e^{-(1+i)\kappa z} - e^{(1+i)\kappa(z-h)}] e^{i\omega t} + \text{к. с.},$$

$$v_z^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{m=\pm 1, \pm 3, \dots} A_m \sin \frac{\pi m x}{L} \left\{ \left[k_{zv}^2 - \left(\frac{\pi m}{L} \right)^2 \right] \left(z - \frac{h}{2} \right) - \frac{\pi m}{L} \frac{1}{(1+i)\kappa} [e^{-(1+i)\kappa z} - e^{(1+i)\kappa(z-h)}] \right\} e^{i\omega t} + \text{к. с.},$$

где

$$A_m = - \frac{4u_0\omega}{\pi m h} \left[k_{zv}^2 - \left(\frac{\pi m}{L} \right)^2 \left(1 + \frac{i}{\kappa h} \right) \right]^{-1}.$$

Здесь, как и ранее, u_0 — амплитуда относительного смещения u пластин ($u = u_0 \cos \omega t$).

В системе уравнений в вариациях оставим лишь наибольшие из членов, содержащих решение порождающей системы, а именно члены с $\theta^{(0)}$. При этом рассматриваемая задача сведется к решенной ранее задаче о

* Это решение было получено Н. Н. Дуловым.

виброгидродинамической неустойчивости [11], но с другим $\theta^{(0)}$. В данной задаче, как следует из (9),

$$\theta^{(0)} = -\frac{2u_0(1+i)\kappa}{ihL} \sum_{m=\pm 1, \pm 3, \dots} \cos \frac{\pi m x}{L} \left[e^{-(1+i)\kappa z} - e^{(1+i)\kappa(z-h)} \right] \left[k_{3B}^2 - \left(\frac{\pi m}{L} \right)^2 \left(1 + \frac{i}{\kappa h} \right) \right]^{-1} e^{i\omega t} + \text{к. с.}$$

Представим $e^{-(1+i)\kappa z} - e^{(1+i)\kappa(z-h)}$ в виде суммы $\sum_n F_1 \left(\frac{\pi}{h} n \right) e^{i \frac{\pi}{h} n z}$ по целым n . В этой сумме отличным от нуля оказываются лишь функции $F_1 \left(\frac{\pi}{h} n \right)$ с нечетными n . Таким образом, $\theta^{(0)}$ можно представить как

$$\theta^{(0)} = \sum_{m=\pm 1, \pm 3, \dots} \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots} F \left(\frac{\pi}{h} n, \frac{\pi}{L} m \right) \times \\ \times \exp \left[i \frac{\pi}{L} m x + i \frac{\pi}{h} n z - i \omega t \right] + \text{к. с.,}$$

где

$$\left| F \left(\frac{\pi}{h} n, \frac{\pi}{L} m \right) \right|^2 = \frac{4u_0^2}{h^4 L^2} \frac{4\kappa^4}{4\kappa^4 + \left(\frac{\pi}{h} n \right)^4} \left\{ \left[k_{3B}^2 - \left(\frac{\pi m}{L} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{\pi m}{L} \right)^4 \frac{1}{\kappa^2 h^2} \right\}^{-1}.$$

Решение системы уравнений в вариациях ((2) в работе [11]) будем искать в следующем виде:

$$v_x^{(1)} = \sum_{n=0, \pm 1, \pm 3, \dots} \sum_{m=0, \pm 1, \pm 3, \dots} \sum_{l=0, \pm 1, \pm 2, \dots} A(q, k, \sigma, n, m, l) \times \\ \times \exp \left[i \left(q - \frac{\pi}{L} m \right) x + i \left(k - \frac{\pi}{h} n \right) z - i(\sigma - l\omega) t \right], \\ (10) \quad v_z^{(1)} = \sum_{n=0, \pm 1, \pm 3, \dots} \sum_{m=0, \pm 1, \pm 3, \dots} \sum_{l=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \tilde{A}(q, k, \sigma, n, m, l) \times \\ \times \exp \left[i \left(q - \frac{\pi}{L} m \right) x + i \left(k - \frac{\pi}{h} n \right) z - i(\sigma - l\omega) t \right], \\ \theta^{(1)} = \sum_{n=0, \pm 1, \pm 3, \dots} \sum_{m=0, \pm 1, \pm 3, \dots} \sum_{l=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \tilde{\tilde{A}}(q, k, \sigma, n, m, l) \times \\ \times \exp \left[i \left(q - \frac{\pi}{L} m \right) x + i \left(k - \frac{\pi}{h} n \right) z - i(\sigma - l\omega) t \right].$$

Введем обозначения:

$$l \left(\sigma, k, q, \frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m \right) = i\sigma \left[\alpha_5 q \left(k - \frac{\pi}{h} \right) + \mu_2 k \left(q - \frac{\pi}{L} m \right) \right], \\ m \left(\sigma, k, q, \frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m \right) = i\sigma \left[(\alpha_2 + \alpha_5) q + \mu_2 k \right] \left(k - \frac{\pi}{h} \right),$$

$$n(\sigma, q, \omega) = -i\sigma q (\alpha_2 \sigma + \alpha_3 \omega),$$

$$r\left(\sigma, k, q, \frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m\right) =$$

$$= i\sigma \left[(\alpha_2 + \alpha_3) k \left(k - \frac{\pi}{h}\right) + \mu_2 q \left(q - \frac{\pi}{L} m\right) \right]$$

$$s\left(\sigma, k, q, \frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m\right) = i\sigma \left[\alpha_3 k \left(q - \frac{\pi}{L} m\right) + \mu_2 q \left(k - \frac{\pi}{h}\right) \right],$$

$$q(\sigma, k) = \sigma^2 i k \alpha_2.$$

Через $L(\sigma, k, q)$, $N(\sigma, k, q)$, $M(\sigma, k, q)$, $P(\sigma, k, q)$ будем обозначать введенные ранее величины $L(\sigma, k)$, $N(\sigma, k)$, $M(\sigma, k)$, $P(\sigma, k)$, а через $l_+ \left\{ \sigma, k, q, \frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m \right\}$ обозначим матрицу:

$$\begin{pmatrix} l\left(\sigma, k, q, \frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m\right) \bar{F}; m\left(\sigma, k, q, \frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m\right) \bar{F}; n(\sigma, q, \omega) \bar{F} \\ r\left(\sigma, k, q, \frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m\right) \bar{F}; s\left(\sigma, k, q, \frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m\right) \bar{F}; q(\sigma, k) \bar{F} \\ i\left(q - \frac{\pi}{L} m\right) \bar{F}; -i\left(k - \frac{\pi}{h}\right) \bar{F}; 0 \end{pmatrix},$$

где $\bar{F} = F\left(\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m\right)$. Такую же матрицу, но с заменой $n(\sigma, q, \omega)$

на $n(\sigma, q, -\omega)$ и \bar{F} на \bar{F}^* обозначим $l_- \left\{ \sigma, k, q, \frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m \right\}$. Введем также обозначение $L\{\sigma, k, q\}$ для матрицы

$$\begin{pmatrix} L(\sigma, k, q) & \mathcal{K}kq & M(\sigma, k, q) \\ -\mathcal{K}kq & N(\sigma, k, q) & 0 \\ ik & 0 & P(\sigma, k, q) \end{pmatrix}.$$

Корнями характеристического уравнения с точностью до членов, пропорциональных $\left| F\left(\frac{\pi}{h} n, \frac{\pi}{L} m\right) \right|^2$ (квадратичных по накачке членов), являются корни уравнения $\mathcal{D} = 0$, где

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} L\left\{\sigma - \omega, k, -\frac{\pi}{h}, q - \frac{\pi}{L} m\right\} l_- \left\{\sigma - \omega, k - \frac{\pi}{h}, q - \frac{\pi}{L} m, -\frac{\pi}{h}, -\frac{\pi}{L} m\right\} \\ l_+ \left\{\sigma, k, q, \frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m\right\} L\{\sigma, k, q\} \end{vmatrix},$$

а также корни, получаемые из них заменами $\frac{\pi}{h}$ на $n \frac{\pi}{L}$, ω на $l\omega$, m на $m+j$, где j — нечетные целые числа. В нулевом по накачке приближении корнями уравнения $\mathcal{D} = 0$ являются

$$\sigma = -iv_0 Q(q, k) \text{ и } \sigma = \omega - iv_1 Q\left(q - \frac{\pi}{L} m, k - \frac{\pi}{h}\right),$$

где

$$v_1 = \frac{\mathcal{H}_{11}}{\gamma_1} \left(q - \frac{\pi}{L} m \right)^2 + \frac{\mathcal{H}_{33}}{\gamma_1} \left(k - \frac{\pi}{h} \right)^2,$$

а v_0 и $Q(q, k)$ те же, что и в рассмотренном ранее случае нерастекающегося кристалла. Достаточно рассмотреть лишь первый из этих корней, так как второй получается из него заменами $q \rightleftharpoons q - \frac{\pi}{L} m$, $k \rightleftharpoons k - \pi/h$.

Будем искать σ в виде $\sigma = -i v_0 Q(q, k) + \delta$, считая $|\delta| \ll v_0$. Опуская промежуточные выкладки, приведем выражение для δ при $k = \pi/h$ (возможные значения k и q те же, что и в предыдущем случае):

$$(11) \quad \delta = - \left| F \left(\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m \right) \right|^2 \left[L \left(\sigma - \omega, k - \frac{\pi}{h}, q - \frac{\pi}{L} m \right) \right]^{-1} \times \\ \times n \left(\sigma - \omega, q - \frac{\pi}{L} m, -\omega \right) \left[-q + \frac{\pi}{L} m + \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{H} q k^2 r \left(\sigma, k, q, \frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m \right) + N(\sigma, k, q) k l \left(\sigma, k, q, \frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m \right)}{L(\sigma, k, q) N(\sigma, k, q) - \mathcal{H}^2 q^2 k^2} \right].$$

Отсюда получим

$$(12) \quad \text{Im } \delta = \left| F \left(\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m \right) \right|^2 \frac{\left(q - \frac{\pi}{L} m \right)^2 (-\alpha_2 - \alpha_5)}{\rho \left[1 - \left(q - \frac{\pi}{L} m \right)^2 / k_{3B}^2 \right]} \times \\ \times \left[1 - \mu_2 \frac{1 - q^2 h^2 / \pi^2}{\eta + \frac{q^2 h^2}{\pi^2} (\eta_1 + \eta_2) + \frac{q^4 h^4}{\pi^4} \eta} \right].$$

Наибольшее значение функции $\left| F \left(\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m \right) \right|^2$ и как нетрудно показать,

наименьшее значение порога соответствуют соотношению $\frac{\pi}{L} m \simeq k_{3B}$,

так что далее будем считать, что с точностью до слагаемого порядка π/bL , где $b \ll 1$, $\frac{\pi}{L} m = k_{3B}$. Как видно из (12), при малом отрицательном q

величина $\text{Im } \delta$ для МББА положительная и большая. В этом случае в формулу (11) для δ надо подставлять более точное выражение для $L(\sigma - \omega, k - \pi/h, q - \pi m/L)$ при $k = \pi/h$, а именно

$$L \left(\sigma - \omega, k - \frac{\pi}{h}, q - \frac{\pi}{L} m \right) \Big|_{k = \frac{\pi}{h}} = \\ = \mathcal{H} \left[k_{3B}^2 - \left(q - \frac{\pi}{L} m \right)^2 - i \omega \frac{\left(q - \frac{\pi}{L} m \right)^2}{\mathcal{H}} \eta_1 \right].$$

Величина $\text{Im } \delta$ при этом будет иметь максимальное значение при $q = -\omega k_{3B} \eta_1 / 2\mathcal{H}$. Это значение равно

$$(13) \quad \text{Im } \delta = \left| F \left(\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{L} m \right) \right|^2 \frac{k_{3B}^2 (-\alpha_2 - \alpha_5) (\mu_2 - \eta) \mathcal{H}}{2\rho\omega\eta\eta_1}$$

Приравнивая его величине $v_0 Q(q, k)$, получим следующее выражение для порогового смещения:

$$(14) \quad (u_0)_{\text{пор}} = \pi h L \left\{ \frac{\mathcal{K}_{33}(\eta - \alpha_2) \eta_1 \omega \rho}{2\gamma_1(-\alpha_2 - \alpha_5)(\mu_2 - \eta) \mathcal{K}} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{k_{\text{зв}}^2}{\kappa^2 h^2} + 4 \frac{\pi^2}{b^2 L^2} \right] \right\}^{1/2}.$$

При $k = 3\pi/h, 5\pi/h \dots$ получаются более высокие пороги. При $k_{\text{зв}}^2/\kappa^2 h^2 \gg \gg 4\pi^2/b^2 L^2$ это пороговое смещение не зависит от толщины слоя и пропорционально частоте (если не учитывать частотную зависимость коэффициентов вязкости).

Оценим это пороговое смещение для МББА при частоте 1 МГц, полагая $h = 0,7 \cdot 10^{-2}$ см, $\mu_2 = 2\text{нз}$, $L = 1$ см и считая, что $4\pi^2/b^2 L^2 \ll k_{\text{зв}}^2/\kappa^2 h^2$. Подставляя эти цифры и параметры МББА (см. [11]) в (14), получаем $(u_0)_{\text{пор}} = 4 \cdot 10^{-7}$ см, что соответствует пороговой мощности $W = k_{\text{зв}}^{-1} \rho \omega^3 (u_0)_{\text{пор}}^2 = 0,1$ вт/см². Это пороговое смещение гораздо меньше соответствующего смещения в отсутствие растекания и по порядку величины близко к порогу, наблюдавшемуся экспериментально в [9]. При превышении этого порога появляется однородное по ширине слоя изменение ориентации молекул НЖК по толщине слоя с волновым числом π/h , как практически статическое, так и (после небольшого превышения порога) изменяющееся с частотами $\omega, 2\omega \dots$. Последнее сопровождается перемещениями молекул с той же периодичностью.

Как следует из (14), для МББА величина $\text{Im } \delta$ положительна и при $q - \frac{\pi}{L} m > k_{\text{зв}}$. Соответствующий порог получается наименьшим при усло-

вии $\frac{\pi}{L} m \simeq k_{\text{зв}}$, т. е. $q \simeq 2k_{\text{зв}}$. Считая, что $k_{\text{зв}}$ отличается от ближайшего

к нему числа, кратного π/L и большего его на величину $\frac{\pi}{bL}$, где $\delta \gg 1$, получим следующее выражение для порогового смещения:

$$(15) \quad (u_0)_{\text{пор}} = \pi^2 h \left[\frac{2\mathcal{K}_{33} \rho \frac{\pi}{L} (\eta - \alpha_2) (1 + k_{\text{зв}}^2 \delta^2 L^2 / 4\pi^2 \kappa^2 h^2)}{k_{\text{зв}} \gamma_1 (-\alpha_2 - \alpha_5) \delta^2 (\mu_2 - \eta) b} \right]^{1/2}.$$

При превышении этого порогового смещения появляется доменная структура, наблюдаемая в виде темных и светлых полос, нормальных к направлению растекания. Эта доменная структура соответствует значению $q = 2k_{\text{зв}}$, так что расстояние между светлыми полосами равно $\lambda/4$ (λ — длина звуковой волны). Подобная доменная структура действительно наблюдалась в [9], причем найденное в [9] расстояние между светлыми полосами составляло $(0,29 \pm 0,08)\lambda$. Оценка с помощью выражения (15) порога появления доменной структуры для МББА при тех же параметрах, которые были использованы для оценки порога (14), и при $b = \delta = 100$ дает величину $(u_0)_{\text{пор}} = 9 \cdot 10^{-7}$ см. С увеличением δ порог уменьшается. Таким образом, малость порога появления доменной структуры связана с близостью $k_{\text{зв}}$ к одному из значений $\frac{\pi}{L} m$; при достаточной близости этот порог может оказаться ниже порога (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Капустин А. П., Дмитриева А. М. Влияние ультразвука на доменную структуру жидких кристаллов. Кристаллография, 1962, 7, 2, 332–335.
2. Mailer H., Likins K. L., Taylor T. R., Ferguson J. L. Effect of Ultrasound on a Nematic Liquid Crystal. Appl. Phys. Lett., 1971, 18, 4, 105–107.

3. Nagai S., Iizuka K. On the Effect of Ultrasound to Nematic Liquid Crystal. Japan J. Appl. Phys., 1974, 13, 1, 189-190.
4. Scudieri F., Ferrari A., Bertolotti M. Opto-acoustic Modulator with a Nematic Liquid Crystal. Opt. Com., 1975, 15, 1, 57-59.
5. Bartolino R., Bertolotti M., Scudieri F., Sette D., Sliwinski A. Ultrasonic Modulation of Light with a Liquid Crystal in the Smectic-A and Nematic Phases. J. Appl. Phys., 1975, 46, 5, 1928-1933.
6. Scudier F., Bertolotti M., Melone S., Albertini G. Acoustohydrodynamic Instability in Nematic Liquid Crystals. J. Appl. Phys., 1976, 47, 9, 3781-3783.
7. Hatakeyama T., Kagawa J. Acousto-optical and Acousto-dielectric Effects in a Nematic Liquid Crystals. J. Sound Vibr., 1976, 46, 4, 551-559.
8. Капустина О. А., Луфанов В. Н. Акустооптические свойства слоя нематического кристалла с гомогенной ориентацией. ЖЭТФ, 1976, 71, 6 (12), 2324-2329.
9. Sripaipan C., Hayes C. F., Fang G. T. Ultrasonic - induced Optical Effect in a Nematic Liquid Crystal. Phys. Rev., 1977, 15A, 3, 1297-1303.
10. Helfric W. Orienting Action of Sound on Nematic Liquid Crystal. Phys. Rev. Lett., 1972, 29, 24, 1583-1586.
11. Чабан И. А. Виброгидродинамическая неустойчивость жидких кристаллов. Акуст. ж., 1978, 24, 2, 260-270.

Акустический институт
Академии наук СССР

Поступила
22 декабря 1977 г.
После исправления
19 мая 1978 г.