

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА СФЕРОИДАЛЬНЫМ ТЕЛОМ, НАХОДЯЩИМСЯ У ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД

А. А. Клещев

В общем виде задача о дифракции звуковой волны на упругом сфероидальном рассеивателе, помещенном у границы раздела твердой и жидкой сред, была решена в работе [1]. Рассеянное телом и границей звуковое поле находилось как результат взаимодействия полей двух рассеивателей с аналитическими поверхностями в системе сфероидальных координат. Если жидкая среда граничит с воздухом и вблизи этой границы помещено сфероидальное тело, то мы приходим к задаче о рассеянии полей двух источников (действительного и мнимого) двумя одинаковыми рассеивателями (действительным и мнимым) [1, 2] (фиг. 1). В соответствии с принципом суперпозиции поля от обоих источников находятся независимо, а затем суммируются. Искажение поля плоской монохроматической волны частоты ω и с потенциалом Φ_i двумя сфероидом находится с помощью теоремы сложения для волновых сфероидальных функций [3, 4]. В частном случае осесимметричной задачи (волновой вектор \mathbf{k} падающей плоской волны направлен вдоль оси вращения сфероидов — фиг. 1), для которого и был выполнен расчет, потенциалы Φ_s ($s=1, 2$) волн, рассеянных сфероидом, находятся в виде разложений в обыкновенный ряд по сфероидальным волновым функциям (сфероиды предполагаются вытянутыми):

$$(1) \quad \Phi_s(\xi_s, \eta_s) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{0,n}^s \bar{S}_{0,n}(C_s, \eta_s) \times \\ \times R_{0,n}^{(3)}(C_s, \xi_s) \quad (s=1, 2),$$

где $B_{0,n}^s$ — неизвестные коэффициенты разложения, определяемые граничными условиями, $\bar{S}_{0,n}(C_s, \eta_s)$ — вытянутая нормированная уг-

ловая сфероидальная функция, $R_{0,n}^{(3)}(C_s, \xi_s)$ — вытянутая радиальная сфероидальная функция третьего рода, $C_s = k \cdot h_{0s}$ — волновой размер, k — волновое число в жидкой среде, $h_{01} = h_{02}$ — половина фокусного расстояния сфероидов; ξ_s, η_s — вытянутые сфероидальные координаты точки наблюдения. Для определенности сфероиды будем считать мягкими, т.е. на их поверхностях ($\xi_0 = \xi_0 = \xi_{02}$) выполняется однородное условие Дирихле

$$(2) \quad \Phi_i + \sum_{s=1}^2 \Phi_s = 0 \quad | \xi = \xi_{0s}; \quad s=1, 2.$$

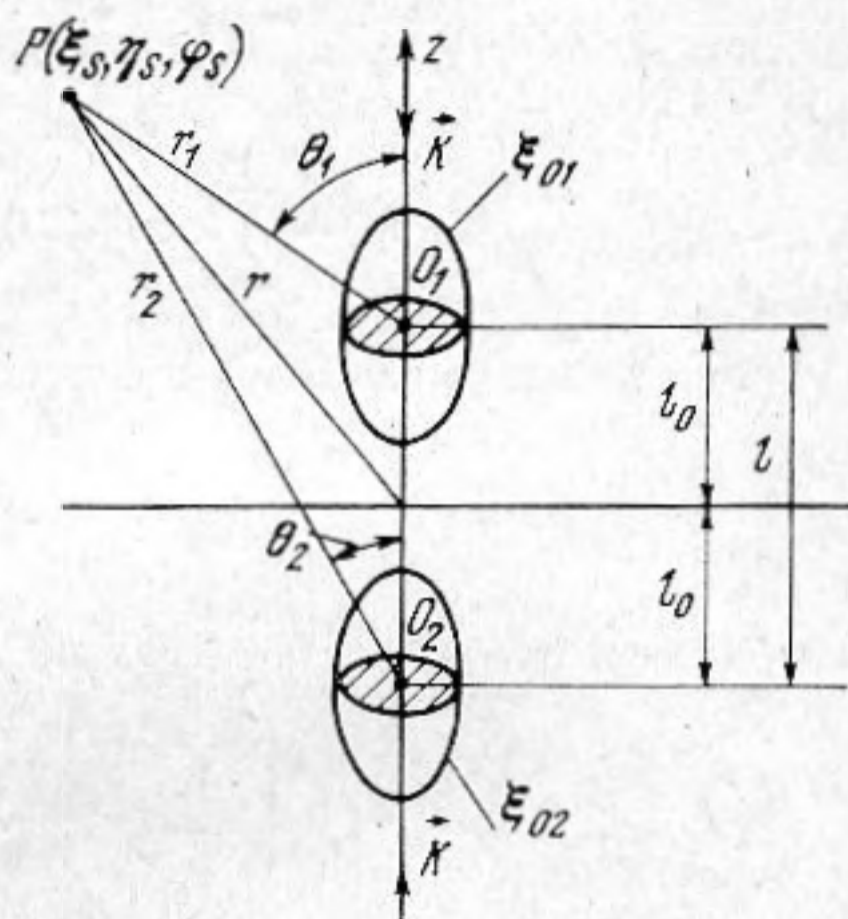
Потенциал Φ_i плоской падающей волны дается в виде ряда:

$$(3) \quad \Phi_i(\xi_s, \eta_s) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \bar{S}_{0,n}(C_s, \eta_s) R_{0,n}^{(1)}(C_s, \xi_s) \bar{S}_{0,n}(C_s, 1), \quad (s=1, 2),$$

где $R_{0,n}^{(1)}(C_s, \xi_s)$ — вытянутая радиальная сфероидальная функция первого рода.

При выполнении условия Дирихле (2) на поверхностях сфероидов неизвестные коэффициенты $B_{0,n}^s$ находятся из бесконечной системы уравнений:

$$(4) \quad B_{0,n}^s + \sum_{q=0}^{\infty} B_{0,q}^t \cdot \frac{R_{0,n}^{(1)}(C_s, \xi_{0s})}{R_{0,n}^{(3)}(C_s, \xi_{0s})} \bar{Q}_{0n0q}^{(3)}(C_t, C_s; l; \theta_{ts}) = \\ = -2 \cdot (-i)^n \bar{S}_{0,n}(C_s, 1) \cdot \frac{R_{0,n}^{(1)}(C_s, \xi_{0s})}{R_{0,n}^{(3)}(C_s, \xi_{0s})} \quad (s=1, 2; t=1, 2; s \neq t),$$



Фиг. 1. Системы сфероидальных координат, связанных с двумя взаимодействующими рассеивателями (действительным и мнимым) сфероидальной формы, находящимися в поле действительного и мнимого источников

где l — расстояние между центрами координатных систем O_1 и O_2 , θ_{ts} — угол между осью Z_s и радиус-вектором из O_s в O_t , в нашем случае

$$\theta_{12}=0, \quad \theta_{21}=\pi, \quad \bar{Q}_{0n0q}^{(3)}(C_t, C_s; l; \theta_{ts}) = 2 \cdot (-i)^{n-q} \sum_{r=0,1}^{\infty} \sum_{j=0,1}^{\infty} \alpha_r^{0q}(C_t) \alpha_j^{0n}(C_s) \times \\ \times \sum_{\sigma=|r-j|}^{r+j} (-i)^{\sigma} b_{\sigma}^{(r,0,j,0)} h_{\sigma}^{(1)}(kl) P_{\sigma}(\cos \theta_{ts}),$$

здесь $h_{\sigma}^{(1)}(kl)$ — сферическая функция Ханкеля первого рода, $P_{\sigma}(\cos \theta_{ts})$ — полином Лежандра, $\alpha_r^{0q}(C_t)$ и $\alpha_j^{0n}(C_s)$ — коэффициенты разложений угловых сферонидальных функций:

$$\bar{S}_{0,q}(C_t, \eta_t) = \sum_{r=0,1}^{\infty} \alpha_r^{0q}(C_t) p_r(\eta_t); \quad \bar{S}_{0,n}(C_s, \eta_s) = \sum_{j=0,1}^{\infty} \alpha_j^{0n}(C_s) p_j(\eta_s).$$

Функции $p_r(\eta_t)$ и $p_j(\eta_s)$ пропорциональны полиномам Лежандра

$$P_r(\eta_t) \quad \text{и} \quad P_j(\eta_s): \quad P_m(\eta) = P_m(\eta) / \sqrt{\frac{1}{2m+1}};$$

коэффициенты $b_{\sigma}^{(r,0,j,0)} = (rj00 | \sigma 0)^2$,

$$(rj00 | \sigma 0) = \begin{cases} 0, & \text{если } a = \sigma + r + j - \text{нечетное;} \\ (-1)^{\sigma+a/2} \cdot \frac{(a/2)}{(a/2-r)! (a/2-j)! (a/2-\sigma)!} \times \\ \times \left[\frac{(2\sigma+1)(a-2r)!(a-2j)!(a-2\sigma)!}{(a+1)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \frac{\sqrt[4]{(2r+1)(2j+1)}}{\sqrt[4]{(2\sigma+1)}}, & \text{если } a - \text{четное.} \end{cases}$$

Для регуляризации системы (4) относительно неизвестных коэффициентов $B_{0,n}^s$ введем новые неизвестные $X_{0,n}^s$, из соотношения

$$(5) \quad B_{0,n}^s = R_{0,n}^{(1)}(C_s, \xi_{0s}) X_{0,n}^s.$$

В результате бесконечная система (4) для неизвестных $B_{0,n}^s$ сведется к другой бесконечной системе относительно новых неизвестных $X_{0,n}^s$:

$$(6) \quad X_{0,n}^s + \sum_{q=0}^{\infty} X_{0,q}^t \frac{R_{0,q}^{(1)}(C_t, \xi_{0t})}{R_{0,n}^{(3)}(C_s, \xi_{0s})} \bar{Q}_{0n0q}^{(3)}(C_t, C_s; l; \theta_{ts}) = \\ = -2 \cdot (-i)^n \cdot \bar{S}_{0,n}(C_s, 1) \cdot \frac{1}{R_{0,n}^{(3)}(C_s, \xi_{0s})}.$$

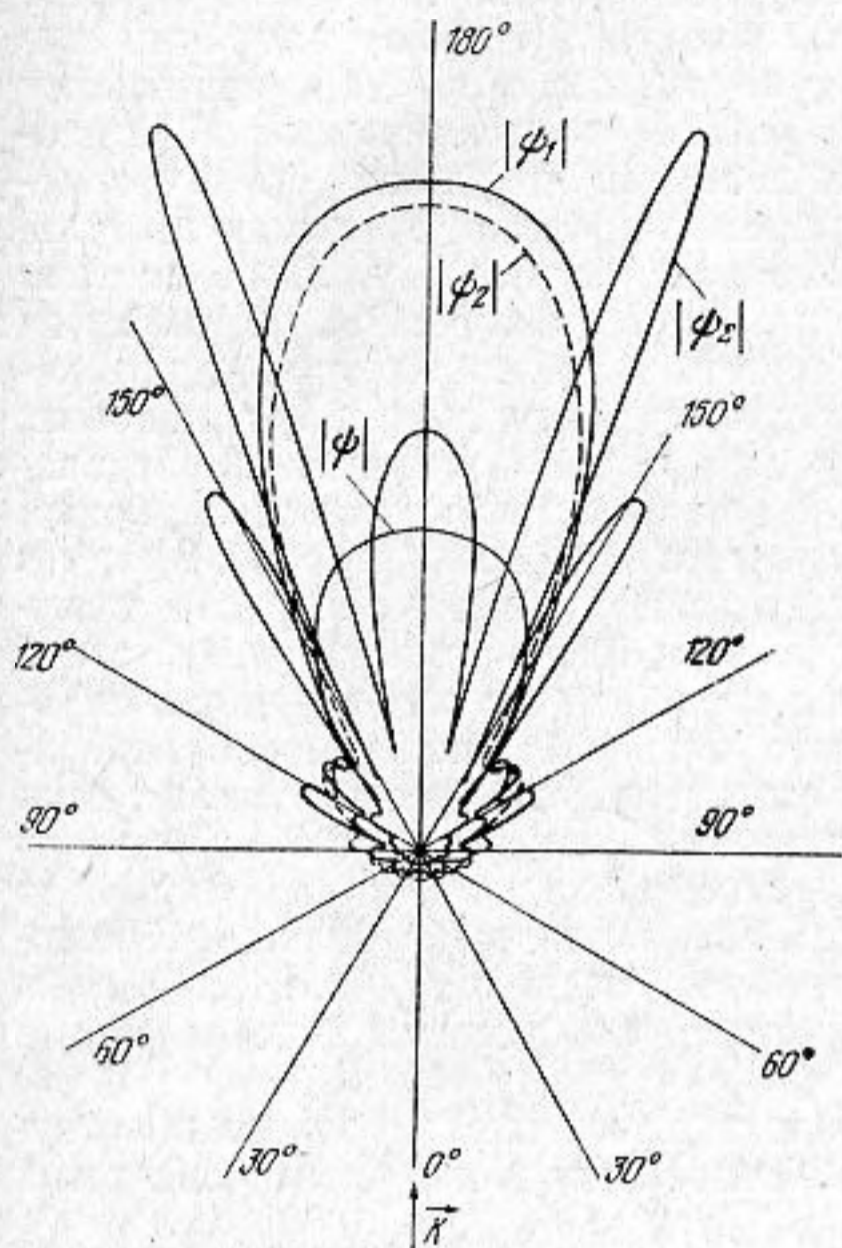
Решение регулярной системы (6) находится методом усечения. В дальнейшем поле обычно интересуются угловой характеристикой рассеяния Ψ_s , которая получается из общего выражения для радиальных функций третьего рода:

$$(7) \quad \Psi_s(\eta_s) = \frac{1}{ik} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \cdot B_{0,n}^s \cdot \bar{S}_{0,n}(C_s, \eta_s) \quad (s=1, 2).$$

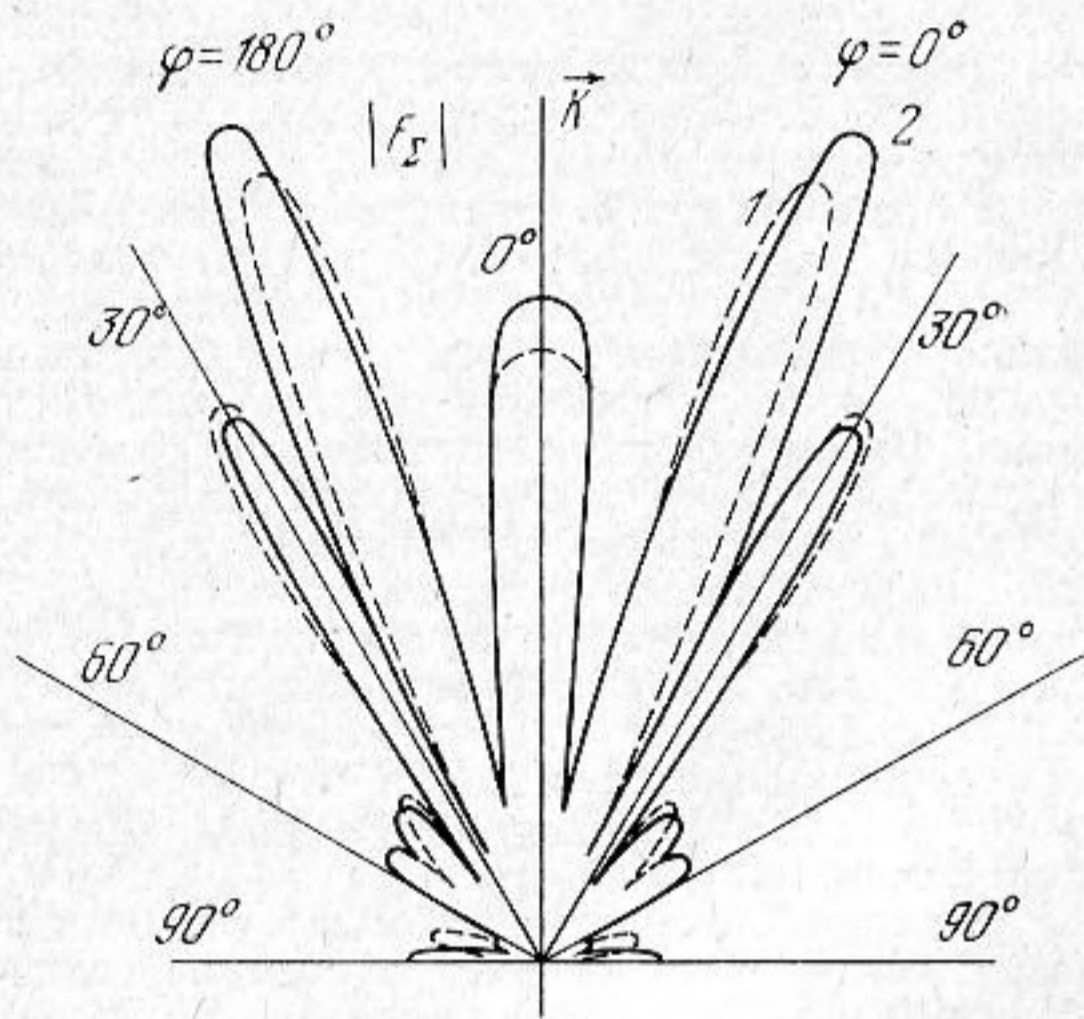
На основе представленного здесь решения на первом этапе были вычислены угловые характеристики рассеяния $\Psi_s(\eta_s)$ ($s=1, 2$) двух мягких сфероидов, искажающих поле плоской монохроматической волны. На фиг. 2 представлены модули угловых характеристик $|\Psi_s|$ ($s=1, 2$) обоих сфероидов с учетом их взаимодействия. Здесь же показан модуль $|\Psi_{\Sigma}|$ суммарной угловой характеристики в координатах первого сфероида:

$$(8) \quad |\Psi_{\Sigma}| = |\Psi_1 + \Psi_2 \cdot e^{i k l \cdot \cos \theta_1}|.$$

Кривая 4 на фиг. 2 представляет собой (в несколько ином масштабе) модуль $|\Psi|$ угловой характеристики рассеяния одиночного мягкого сфероида в безграничной жидкой среде. Все представленные на фиг. 2 функции соответствуют вытянутым сфероидом с волновым размером $C_1=C_2=10$, расстоянием $h_{01}=h_{02}=1$ и радиальной координатой $\xi_{01}=\xi_{02}=1,005$; расстояние l выбиралось равным $8 \cdot h_0$ (были выполнены расчеты также для $l=4 \cdot h_0$). Анализ представленных на фиг. 2 кривых показывает, что при выбранном нами значении l взаимодействие рассеивателей мало, а основную роль в формировании суммарной угловой характеристики Ψ_{Σ} играет разность хода лучей до точки наблюдения от первого и второго рассеивателей.



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Модули угловых характеристик рассеяния одиночного и взаимодействующих сфероидов

Фиг. 3. Модули угловых характеристик рассеяния звука идеальным сфероидом, помещенным вблизи границы раздела жидкой и идеальной сред

На втором этапе (на основе расчета рассеянного поля двух сфероидов) были вычислены угловые характеристики рассеяния F мягкого вытянутого сфероида ($\xi_0=1,005$; $C=10$), находящегося на расстоянии $l=4 \cdot h_0$ от границы раздела жидкой и идеальной сред. Сфероид был ориентирован так, что его ось вращения была перпендикулярна к границе раздела. Нужно отметить, что в этом случае потенциал рассеянной волны характеризует искажение поля стоячей волны, образованной действительным и мнимым источниками. На фиг. 3 представлены модули $|F_{\Sigma}|$ угловых характеристик рассеяния звука мягким сфероидом: кривая 1 соответствует границе раздела жидкой и мягкой сред, кривая 2 — границе жидкой и жесткой сред. При переходе от одного типа границы к другому меняется знак мнимого источника.

Автор выражает благодарность Ю. А. Клокову, А. Г. Галкиной и Ж. А. Коркаину за помощь в проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клещев А. А. Рассеяние звука сфероидальными телами, находящимися у границы раздела сред. Акуст. ж., 1977, 23, 3, 404–410.
2. Клещев А. А. Рассеяние звука полутелами, находящимися на границе раздела двух сред. Тр. Ленинградск. кораблестроит. ин-та, 1975, вып. 97, 24–30.
3. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск, «Наука и техника», 1968.
4. Клещев А. А. Компенсация рассеянного поля в зоне Френеля. Акуст. ж., 1974, 20, 5, 790–794.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила
5 июня 1978 г.