АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 1

УДК 534.26–16+620.179.16

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВЫХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТНОЙ ТРЕЩИНЕ В УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

Н. Н. Егоров, А. В. Харитонов

Методом задачи Римана – Гильберта найдено решение задачи о дифракции сдвиговых нормальных волн на поверхностной трещине в упругой пластине. Приведены результаты численных расчетов зависимостей коэффициентов отражения, прохождения и трансформации от частоты и глубины трещины для первых трех нормальных волн. Указаны соотношения взаимности, характеризующие эффект трансформации.

Рассмотрим неограниченную упругоизотропную пластину толщиной d с плоскопараллельными, свободными от напряжений поверхностями $y=0$, $y=d$. В качестве модели поверхностной трещины примем бесконечно тонкий разрез $0\leqslant y\leqslant c$, $z=0$, ориентированный нормально к поверхности пластины. Из области $z>0$ на разрез падает нормальная волна номера p ($p=0, 1, 2, 3, \ldots$) с волновым вектором, перпендикулярным плоскости разреза. Сдвиговые нормальные волны имеют единственную, направленную в рассматриваемом случае вдоль оси x компоненту смещения U; поэтому для падающей волны можно написать выражение [1]

$$U^{\text{пад}}=A\cos\beta_p y e^{-jk_p z}. \tag{1}$$

Здесь $k_p=\sqrt{k_t^2-\beta_p^2}$ – волновое число падающей волны, $\beta_p=p\pi/d$, $k_t=\omega\sqrt{\rho/\mu}$ – волновое число объемной поперечной волны в материале пластины, A – амплитудный множитель, четные значения индекса p указывают на принадлежность волны к симметричному типу, нечетные – к антисимметричному, временной множитель $\exp(-j\omega t)$ в выражении (1) и далее опускаем.

Отраженное и прошедшее поля можно представить суперпозицией сдвиговых нормальных волн:

$$\begin{aligned} U^{\text{отр}}&=\sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos\beta_n y e^{+jk_n z}, \quad z\geqslant 0,\\ U^{\text{пр}}&=\sum_{n=0}^{\infty} B_n\cos\beta_n y e^{-jk_n z}, \quad z\leqslant 0. \end{aligned} \tag{2}$$

где A_n и B_n – неизвестные амплитудные множители соответственно отраженных и прошедших волн, $k_n=\sqrt{k_t^2-\beta_n^2}$, $\beta_n=n\pi/d$, причем в соответствии с принципом предельного поглощения знак величины k_n следует выбирать из условия $\operatorname{Im} k_n>0$, а если $\operatorname{Im} k_n=0$, то $\operatorname{Re} k_n>0$.

Поле в сечении $z=0$ удовлетворяет граничным условиям

$$U^{\text{пад}}+U^{\text{отр}}=U^{\text{пр}}, \quad c<y\leqslant d, \tag{3}$$

$$\sigma^{\text{пад}}+\sigma^{\text{отр}}=\sigma^{\text{пр}}=0, \quad 0\leqslant y<c, \tag{4}$$

$$\sigma^{\text{пад}}+\sigma^{\text{отр}}=\sigma^{\text{пр}}, \quad 0\leqslant y\leqslant d, \tag{5}$$

сдвиговое напряжение σ определяется соотношением $\sigma=\mu(\partial U/\partial z)$. Подставляя выражения (1) и (2) в формулу (5), получаем

$$(6)\qquad -Ak_p\cos\beta_p y+\sum_{n=0}^{\infty}A_nk_n\cos\beta_n y=-\sum_{n=0}^{\infty}B_nk_n\cos\beta_n y,\ 0\leqslant y\leqslant d.$$

Умножая формулу (6) на $\cos\beta_m y$ и интегрируя по промежутку $[0, d]$, с учетом ортогональности тригонометрических функций находим

$$A_n=-B_n,\ n\neq p,\quad A-A_p=B_p.$$

Разделим эти равенства на A и введем обозначения

$$(7)\qquad A_n/A=R_{pn},\quad B_n/A=T_{pn},$$

тогда

$$(8)\qquad R_{pn}=-T_{pn},\ n\neq p,\quad 1-R_{pp}=T_{pp}.$$

Величины R_{pn} и T_{pn} будем называть коэффициентами трансформации соответственно для отраженных и прошедших волн, R_{pp} и T_{pp} — коэффициентами отражения и прохождения падающей волны. Соотношения (8) свидетельствуют, что амплитуды трансформированных волн в отраженном поле равны соответствующим амплитудам в поле прошедших волн. На основании граничного условия (3)

$$A\cos\beta_p y+\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\beta_n y=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\cos\beta_n y,\ c<y\leqslant d,$$

откуда с помощью формул (7) и (8) получим

$$(9)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}R_{pn}\cos\beta_n y=0,\quad c<y\leqslant d.$$

Из выражения (4) с учетом формул (7) и (8) следует также

$$(10)\qquad -k_p\cos\beta_p y+\sum_{n=0}^{\infty}R_{pn}k_n\cos\beta_n y=0,\quad 0\leqslant y<c.$$

Перейдем к экспоненциальной форме записи рядов в формулах (9), (10) и обозначим

$$k_t d/\pi=q,\quad \pi y/d=\varphi,\quad \pi c/d=\delta,\quad \chi_n=1+j\sqrt{q^2/n^2-1}.$$

Тогда $\beta_n y=n\varphi$, $k_n=\sqrt{k_t^2-(n\pi/d)^2}=(|n|\pi/d)j(1-\chi_n)$ и уравнения (9), (10) можно написать в виде

$$(11)\qquad \begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_{pn}'e^{jn\varphi}=0,\qquad \delta<|\varphi|\leqslant\pi,\\ &\sum_{n\neq 0}R_{pn}'|n|e^{jn\varphi}=jqR_{p0}'+f(e^{j\varphi}),\qquad |\varphi|<\delta,\end{aligned}$$

где а) для случая падения на разрез любой волны номера $p\neq 0$

$$f(e^{j\varphi})=\sum_{n\neq 0}f_ne^{jn\varphi},$$

$$f_n=R_{pn}'|n|\chi_n,\ n\neq\pm p,$$
$$f_{\pm p}=|p|+|p)\chi_p(R_{pp}'-1);$$

б) при падении волны нулевого порядка ($p=0$)

$$f(e^{j\varphi})=-2jq+\sum_{n\neq 0} R_{pn}'|n|\chi_n e^{in\varphi}.$$

В уравнениях (11)

$$R_{pn}'=R_{pn},\ n\neq 0;\quad R_{p0}'=2R_{p0}. \tag{12}$$

Системы уравнений, подобные (11), сводятся методом задачи Римана — Гильберта [2] к бесконечным системам линейных неоднородных алгебраических уравнений. Применительно к нашей задаче такая алгебраическая система с учетом формул (12) относительно искомых величин R_{pn} имеет вид

$$\begin{gathered} j2qV_m^0R_{p0}-mR_{pm}+\sum_{n=1}^{\infty}R_{pn}n\chi_n(V_m^n+V_m^{-n})+ \\ +2F_mC=p(\chi_p-1)(V_m^p+V_m^{-p}),\quad (m=0,1,2,3,\ldots), \\ 2(jqV_s^0+1)R_{p0}+\sum_{n=1}^{\infty}R_{pn}n\chi_n(V_s^n+V_s^{-n})+2F_sC=p(\chi_p-1)(V_s^p+V_s^{-p}), \end{gathered} \tag{13}$$

где, согласно работе [2], $F_m=\frac{1}{2}P_m(u)$, $P_m(u)$ — полиномы Лежандра, $u=\cos\delta$, $F_s=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{2}$,

$$V_m^n=\begin{cases}\frac{1}{2}[P_m(u)-P_{m+1}(u)], & n=-1,\\ \pm\frac{1}{2}\sum\limits_{l=0}^{\pm(n+1)}\rho_{\pm(n+1)-l}(u)P_{l\mp(m+1)}(u),\end{cases}$$

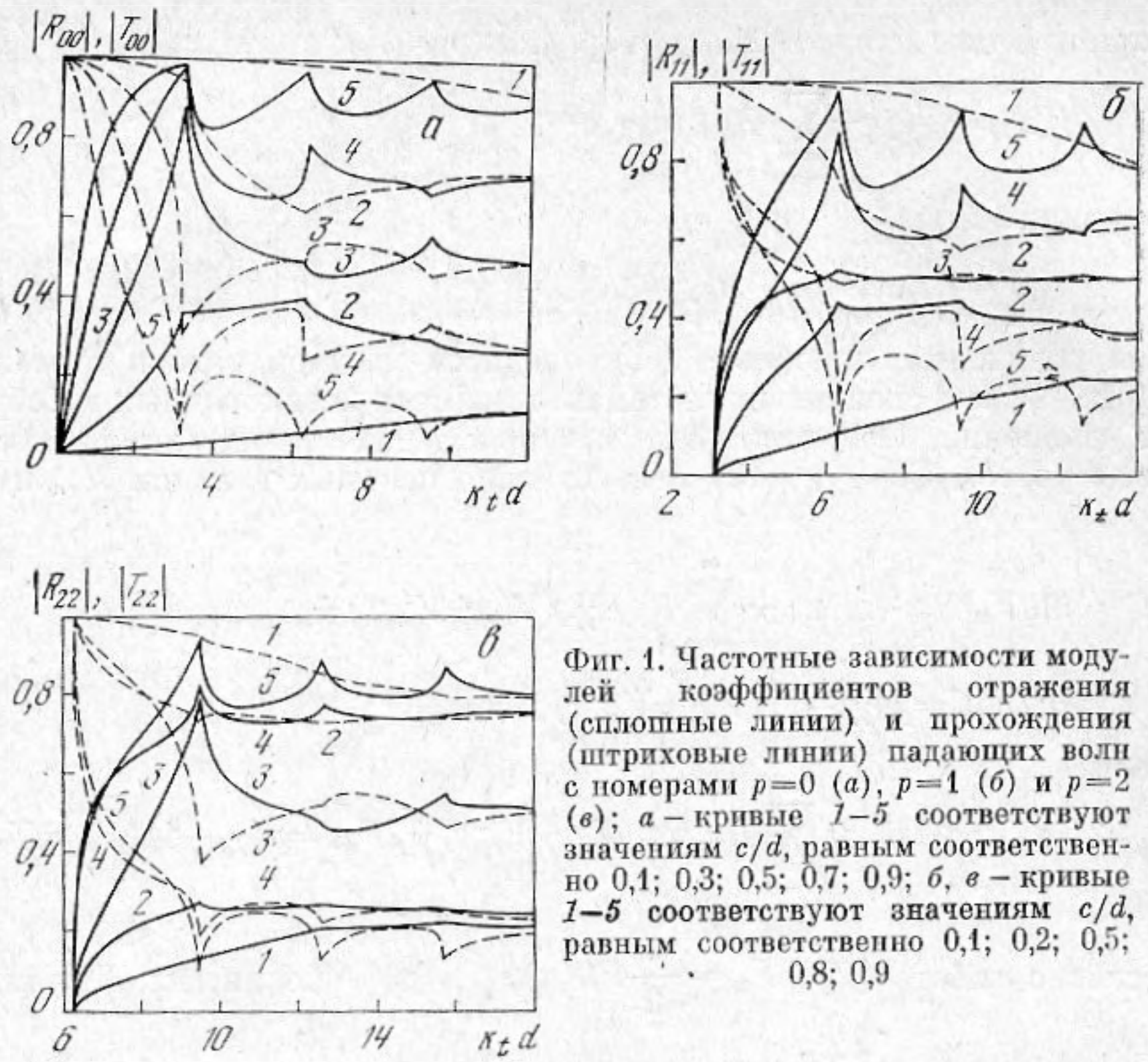
где верхние знаки берутся при $n\geqslant 0$, нижние при $n<-1$,

$$\rho_0(u)=1,\ \rho_1(u)=-u,\ \rho_n(u)=(1/n)[P_{n-2}(u)-uP_{n-1}(u)],\ n\geqslant 2,$$

$$V_s^n=\begin{cases}-\frac{1}{2}\rho_{n+1}(u)\ln\frac{1+u}{2}+\frac{1}{2n}[P_n(u)-P_{n-1}(u)], & n\geqslant 1,\\ \frac{1+u}{2}\ln\frac{1+u}{2}, & n=0,\\ \frac{u-1}{2}\left(\ln\frac{1+u}{2}+1\right), & n=-1,\\ -\frac{1}{2}\rho_{-n}(u)\ln\frac{1+u}{2}-\frac{1}{2n}[P_{-n}(u)-P_{-n-1}(u)], & n<-1;\end{cases}$$

C — некоторая неизвестная величина.

Полученная система уравнений (13) эквивалентна исходной системе функциональных уравнений (9), (10). Она позволяет найти коэффициенты R_{pn} (а также величину C) и, следовательно, получить решение задачи о дифракции сдвиговой нормальной волны на поверхностной трещине. Доказательство теоремы существования и единственности решения подобных систем дано в работе [3]. Для приближенного решения (13) пригоден метод усечения (метод редукции) [4], который используется ниже для по-



Фиг. 1. Частотные зависимости модулей коэффициентов отражения (сплошные линии) и прохождения (штриховые линии) падающих волн с номерами $p=0$ (*а*), $p=1$ (*б*) и $p=2$ (*в*); *а* – кривые *1–5* соответствуют значениям c/d, равным соответственно 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; *б*, *в* – кривые *1–5* соответствуют значениям c/d, равным соответственно 0,1; 0,2; 0,5; 0,8; 0,9

лучения численных результатов. Приведенные ниже данные основаны на решении систем из 11 уравнений, реализованном на ЭВМ. Контроль за правильностью и точностью вычислений производился путем проверки выполнения закона сохранения энергии. Для этого одновременно с расчетами коэффициентов R_{pn} и T_{pn} вычислялась величина

$$\nu=\left[I^{\text{пад}}-\sum_{k_n}(I_n^{\text{пр}}+I_n^{\text{отр}})\right]\Big/ I^{\text{пад}}, \quad \operatorname{Im} k_n=0,$$

где $I^{\text{пад}}$ – поток энергии, переносимый падающей волной, $I_n^{\text{пр}}$ и $I_n^{\text{отр}}$ – потоки энергии соответственно в прошедшей и отраженной волнах номера n. Поток энергии определялся по известной формуле

$$I_n=-\frac{1}{2}\int_0^d \operatorname{Re}(\dot{U}_n\bar{\sigma}_n)\,dy=\begin{cases}-\dfrac{d}{4}\mu\omega k_n|A_n|^2, & n\neq 0,\\[2mm] -\dfrac{d}{2}\mu\omega k_t|A_0|^2, & n=0,\end{cases} \tag{14}$$

где $\dot{U}_n=-j\omega U_n$, а черта сверху обозначает комплексно-сопряженную величину. Численные значения ν во всех расчетах не превышали 10^{-9}, что свидетельствует о достаточно высокой точности вычислений.

На фиг. 1 представлены частотные зависимости модулей коэффициентов отражения $|R_{pp}|$ и прохождения $|T_{pp}|$ для первых трех волн ($p=0, 1, 2$). Как видно, эти зависимости являются немонотонными, с характерными изломами на критических частотах, определяемых уравнением $k_t d=n\pi$ ($n=1, 2, 3, \ldots$). Резкое изменение хода кривых вблизи критических частот обусловлено появлением новых распространяющихся волн и соответствующим перераспределением энергии в спектрах отраженных и прошедших волн. Следует отметить, что коэффициенты отражения и прохождения являются комплексными числами, однако при достаточно высо-

ких частотах их мнимая часть оказывается пренебрежимо малой, так что при $k_t d \to \infty$ выполняется соотношение $1-|R_{pp}|=|T_{pp}|$, эквивалентное формуле (8).

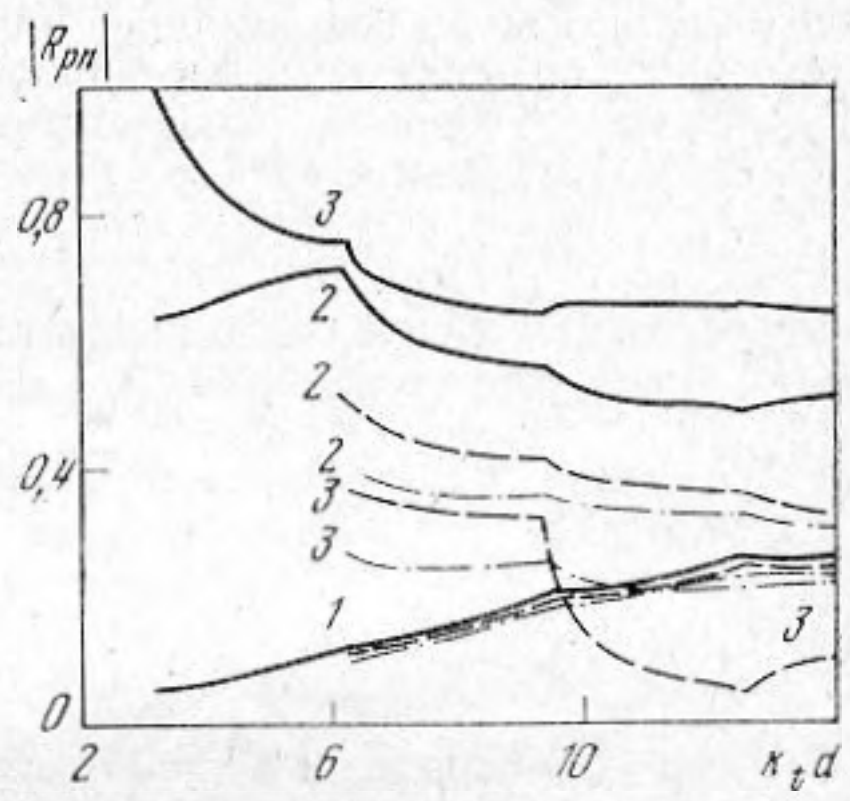
Из фиг. 1 видно, что для трещин малых размеров ($c/d<0{,}1$) в широком диапазоне частот, вплоть до $k_t d \approx 12$, имеет место близкая к линейной зависимость коэффициентов отражения от частоты. Заметим также, что от таких трещин наиболее эффективно отражается волна номера $p=1$.

В области низких частот ($k_t d<1{,}7$) коэффициент отражения R_{00} с ошибкой не более 10% определяется выражением

$$R_{00}=jq\ln\frac{1+u}{2}\Big/\left(1+jq\ln\frac{1+u}{2}\right),\quad q=\frac{k_t d}{\pi},\quad u=\cos\frac{\pi c}{d},$$

которое является решением системы уравнений (13) в нулевом приближении и совпадает с приближенной формулой Лэмба [2] для коэффициента прохождения электромагнитной волны через решетку из металлических полос.

Результаты расчетов для модулей коэффициентов трансформации приведены на фиг. 2 и показывают, что при взаимодействии сдвиговых нормальных волн с поверхностной трещиной явление трансформации играет существенную роль. Наиболее эффективна трансформация волны номера $p=0$ в волну номера $p=1$, причем $|R_{01}|$ заметно превышает все остальные коэффициенты отражения и трансформации для случая $c/d<0{,}6$.



Фиг. 2. Частотные зависимости модулей коэффициентов трансформации $|R_{01}|$ (сплошные линии), $|R_{02}|$ (штриховые линии) и $|R_{12}|$ (штрихпунктирные линии) при отражении. Кривые *1–3* соответствуют значениям c/d, равным соответственно 0,1; 0,3; 0,5

Коэффициенты трансформации удовлетворяют равенствам

$$k_m R_{nm}=k_n R_{mn},\quad k_m R_{0m}=2k_t R_{m0},\quad m,n\neq 0, \tag{15}$$

которые являются своеобразными соотношениями взаимности, характеризующими эффект трансформации. Для распространяющихся волн ($\operatorname{Im} k_{n,m}=0$) выполняются и другие полезные соотношения

$$k_m|R_{nm}|=k_n|R_{mn}|,\quad k_m|R_{0m}|=2k_t|R_{m0}|,\quad m,n\neq 0, \tag{16}$$

с помощью которых легко найти величины $|R_{mn}|$, если известны значения $|R_{nm}|$. В частности, соотношения (16) позволяют определить $|R_{10}|$, $|R_{20}|$, $|R_{21}|$ по данным фиг. 2.

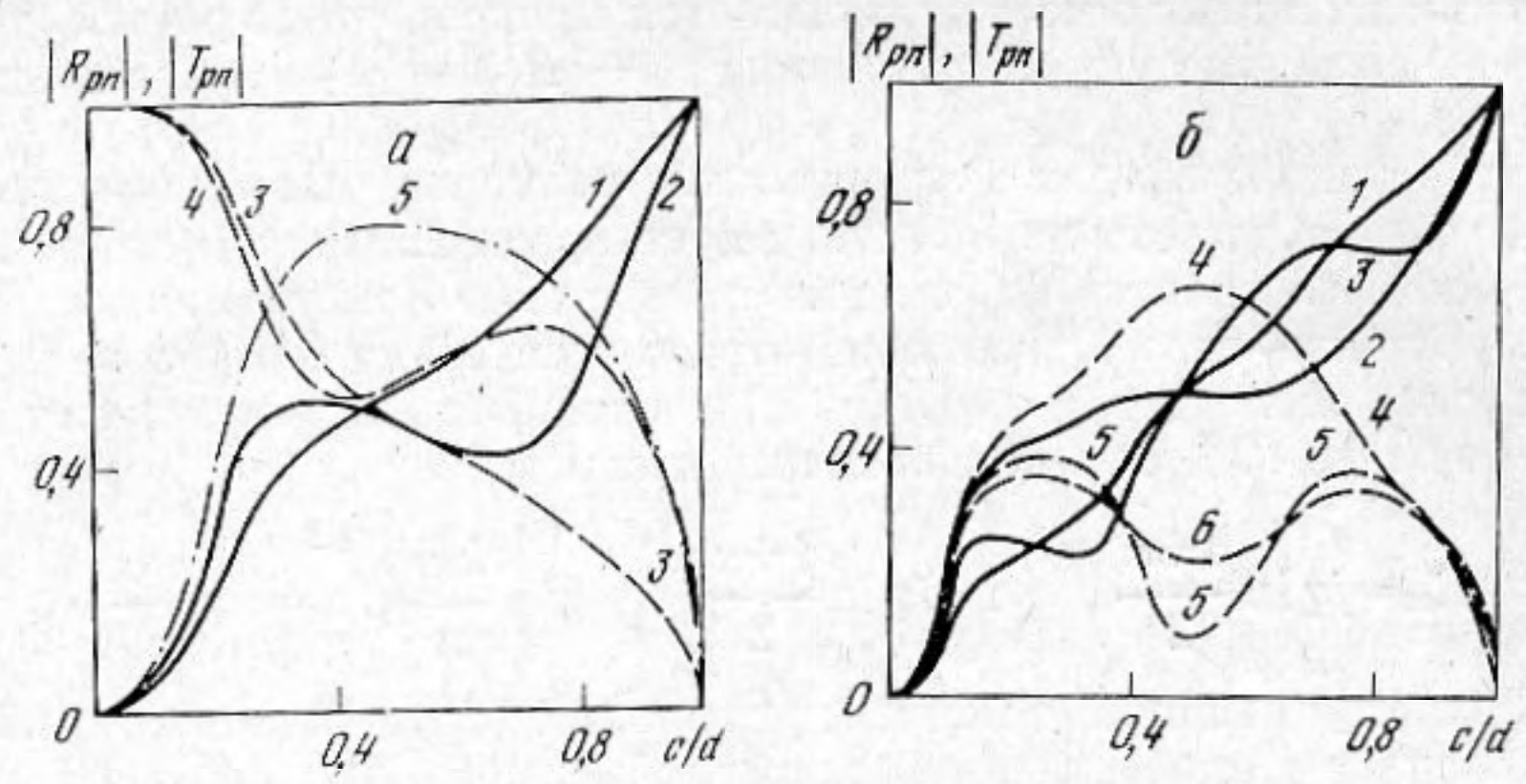
Если ввести в рассмотрение коэффициенты трансформации по энергии r_{nm}, определяемые как отношение потоков энергии, переносимых трансформированной волной номера m и падающей волной номера n, то из формулы (14) с учетом выражений (7) получаем

$$r_{m0}=\frac{2k_t}{k_m}|R_{m0}|^2,\quad r_{0m}=\frac{k_m}{2k_t}|R_{0m}|^2,\quad r_{nm}=\frac{k_m}{k_n}|R_{nm}|^2,\quad n,m\neq 0.$$

Эти выражения вместе с соотношениями (16) показывают, что для энергетических коэффициентов трансформации выполняются равенства

$$r_{nm}=r_{mn}.$$

Соотношения (15), хорошо подтверждаемые результатами численного анализа, могут быть доказаны и теоретически. Для этого введем в рас-



Фиг. 3. Зависимости модулей коэффициентов отражения, прохождения и трансформации от относительной глубины трещины при $k_t d=5$ (*а*) и $k_t d=11$ (*б*); *а* – кривая *1* соответствует зависимости $|R_{00}|$ от c/d; *2* – $|R_{11}|$; *3* – $|T_{00}|$; *4* – $|T_{11}|$; *5* – $|R_{01}|$, $|T_{01}|$; *б* – кривая *1* соответствует зависимости $|R_{00}|$ от c/d; *2* – $|R_{11}|$; *3* – $|R_{22}|$; *4* – $|R_{01}|$, $|T_{01}|$; *5* – $|R_{02}|$, $|T_{02}|$; *6* – $|R_{12}|$, $|T_{12}|$

смотрение два различных результирующих поля в области $z>0$

$$U_1=\cos\beta_m y e^{-jk_m z}+\sum_{l=0}^{\infty} R_{ml}\cos\beta_l y e^{jk_l z},$$

(17)

$$U_2=\cos\beta_n y e^{-jk_n z}+\sum_{l=0}^{\infty} R_{nl}\cos\beta_l y e^{jk_l z}.$$

Поле U_1 является суперпозицией падающей волны номера m с единичным амплитудным множителем и суммы волн, отраженных от трещины; аналогичное ему поле U_2 создается в результате падения на трещину волны номера n.

Поскольку U_1 и U_2 удовлетворяют уравнению Гельмгольца, к ним можно применить формулу Грина для двумерной задачи в области интегрирования, ограниченной поверхностями пластины и двумя сечениями $z=z_1$, $z=z_2$. Из формулы Грина с учетом граничных условий на поверхностях пластины и отсутствия источников в указанной области получаем

$$\int_0^d \left(U_1\frac{dU_2}{\partial z}-U_2\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)_{|z=z_1} dy+\int_0^d \left(U_1\frac{\partial U_2}{\partial z}-U_2\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)_{|z=z_2} dy=0.$$

Так как z_1 и z_2 выбраны произвольно, каждый из написанных интегралов не зависит от z и равен нулю. Таким образом,

$$\int_0^d \left(U_1\frac{dU_2}{\partial z}-U_2\frac{\partial U_1}{\partial z}\right) dy=0.$$

Подставляя сюда выражения (17), с учетом ортогональности тригонометрических функций получаем искомые соотношения (15).

В процессе доказательства никак не использовались данные о расположении и размерах трещины в пластине. Следовательно, соотношения взаимности (15) остаются справедливыми и характеризуют эффект трансформации сдвиговых нормальных волн на неоднородностях любого типа.

Влияние глубины трещины на величину модулей коэффициентов отражения, прохождения и трансформации показано на фиг. 3. Эти зависимости также имеют немонотонный характер, что обусловлено неоднородным по толщине пластины распределением смещений и напряжений в нормальной волне. При сравнительно малых размерах трещины, удовлетворяющих условию $(k_t d)(c/d) = k_t c < 1$, модули коэффициентов отражения и трансформации хорошо описываются квадратичной зависимостью $|R_{pn}| = a_{pn}(c/d)^2$. Множитель a_{pn} зависит от параметра $k_t d$ и номеров рассматриваемых волн; его численное значение может быть найдено из графиков фиг. 1 и 2 (кривые для $c/d=0,1$, обозначенные номером *1*). Например, для $k_t d=10$ находим $a_{11} \approx 20$.

Представленные графические зависимости и соотношения взаимности дают достаточно полную информацию о поведении коэффициентов отражения, прохождения и трансформации сдвиговых нормальных волн в широком частотном диапазоне для трещины произвольной глубины. Они могут быть использованы в технической акустике (например, в ультразвуковой дефектоскопии) для количественного анализа свойств акустических трактов приборов и устройств, основанных на применении сдвиговых нормальных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Микер Т., Мейтцлер А.* Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках. Физическая акустика (под ред. У. Мэзона), т. 1, ч. А, М., «Мир», 1966, 140–203.
2. *Шестопалов В. П.* Метод задачи Римана – Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Изд-во Харьковского гос. ун-та, 1971.
3. *Подольский Е. Н.* Обоснование коротковолновой асимптотики в задаче о дифракции плоской электромагнитной волны на периодической решетке, составленной из металлических полос. Сб. Радиотехника. Изд-во Харьковского гос. ун-та, 1965, 1, 58–68.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила
5 января 1978 г.
После исправления
21 июня 1978 г.