

УДК 534.222

ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИК В ЗВУКОВЫХ ПУЧКАХ

Н. С. Бахвалов, Я. М. Жилейкин, Е. А. Заболотская,
Р. В. Хохлов

Исследовано поведение гармоник, генерируемых в звуковых пучках конечной амплитуды. Рассмотрены квазиплоские волны и сфокусированные пучки в идеальной среде, а также квазиплоские волны в вязкой теплопроводящей среде. Анализ проведен на основе численного решения нелинейных уравнений акустики ограниченных пучков с периодическими во времени граничными условиями и последующего его разложения в ряд Фурье. Проанализированы случаи, соответствующие различным соотношениям нелинейных и дифракционных эффектов, а также фазовой сходимости и диссипации для двух амплитудных распределений: по полиному четвертой степени и по закону Гаусса.

Распространение звуковых пучков конечной амплитуды определяется не только нелинейностью, но и дифракционной расходимостью, что приводит к ряду интересных явлений, например к нарушению симметрии в искажении периодического сигнала [1–3]. Встает вопрос о спектральном составе такого сигнала. Необходимость исследования этой проблемы диктуется узкополосностью акустических приемников. Генерация гармоник в звуковых пучках уже рассматривалась в работах [4–8]. В работе [4] методом последовательных приближений вычислена вторая гармоника, генерируемая в поле поршневого излучателя. Аналогичная задача в более полном виде решена в работе [5]. В работе [6] получены аналитические выражения для ширины пучков различных гармоник в двух предельных случаях, когда определяющую роль играет либо дифракционная расходимость, либо нелинейность. В работе [7] исследовалось поле второй гармоники в сходящемся пучке в приближении заданного поля, что справедливо, когда дифракция проявляется сильнее, чем нелинейность. Энергетические характеристики гармоник низкочастотной огибающей амплитудно-модулированного сигнала приведены в работе [8].

Данная работа посвящена подробному изучению с помощью численных методов поведения гармоник, генерируемых в звуковых пучках конечной амплитуды в условиях сильного проявления нелинейности.

Распространение осесимметричного звукового пучка в слабо нелинейной среде описывается приближенным уравнением [9]

$$(1) \quad N \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta \partial z} + \Delta_{\perp} \rho = -\delta \frac{\partial^3 \rho}{\partial \theta^3}.$$

Здесь введены обозначения: ρ — возмущение плотности, отнесенное к амплитуде гармонического сигнала A , возбужденного на границе; $\theta = \omega(t - x/c_0)$ — безразмерное время в сопровождающей системе координат; $z = x/2l$ — безразмерная координата вдоль пучка; $l = \omega r_0^2/c_0$ — конфокальный параметр; поперечная координата r нормируется на ширину пучка на границе r_0 , $R = r/r_0$; c_0 — скорость распространения слабого сигнала; безразмерный коэффициент $N = l/L$, где $L = 1/\alpha\omega A$ — длина образо-

вания разрыва в плоской волне; коэффициент $\alpha = (\gamma + 1)/2\rho_0 c_0$ характеризует нелинейные свойства среды; γ — показатель адиабаты в уравнении состояния; ρ_0 — равновесная плотность среды; $\delta = b\omega^2 l / \rho_0 c_0^3$ — безразмерный коэффициент затухания, где $b = \zeta + \frac{4}{3}\eta + \kappa(1/c_v - 1/c_p)$, η и ζ — сдвиговая и объемная вязкости, κ — коэффициент теплопроводности, c_v и c_p — коэффициенты теплоемкости при постоянном объеме и давлении соответственно; Δ_{\perp} — поперечный лапласиан.

В уравнении (1) два безразмерных параметра: N и δ . Коэффициент N характеризует соотношение нелинейных и дифракционных эффектов, δ — диссипативных и дифракционных процессов. Заметим, что отношение N/δ выражается через акустическое число Рейнольдса Re , $N/\delta = (\gamma + 1) Re/2$. Для идеальной среды коэффициент затухания $\delta = 0$.

Дополним уравнение (1) граничными условиями. Для квазиплоских волн граничное условие в безразмерных переменных имеет вид

$$(2) \quad \rho|_{z=0} = -F(R) \sin \theta.$$

Для сфокусированного пучка граничное условие запишется в виде [10]

$$(3) \quad \rho|_{z=0} = -F(R) \sin(\theta + R^2/2\beta).$$

Здесь β — радиус кривизны волнового фронта, отнесенный к конфокальному параметру l . Рассмотрены два амплитудных распределения: по полиному четвертой степени

$$F(R) = (1 - R^2)^2, \quad R \leq 1;$$

$$(4) \quad F(R) = 0, \quad R > 1$$

и по закону Гаусса

$$(5) \quad F(R) = \exp(-R^2).$$

Уравнение (1) интегрировалось численно с граничным условием (2) для квазиплоских волн или с граничным условием (3) для сходящихся пучков. Затем производился гармонический анализ формы возмущения. Вычисления проводились для трех значений безразмерного параметра N : 3,25; 5 и 10. Для каждого N безразмерный коэффициент δ принимал значения 0,5 и 0,25. Для каждого N безразмерный радиус кривизны β изменялся от 1 до 0,1. Результаты приведены в виде графиков, изображающих распределение амплитуд $A_i(R)$ и начальных фаз $\varphi_i(R)$ гармоник при фиксированных z . Кроме того, построены графики изменения амплитуд и фаз гармоник при распространении в различных точках поперечного сечения пучка: $A_i(z)$ и $\varphi_i(z)$. Наряду с этим вычислено соотношение между гармониками и представлены кривые, характеризующие отношения A_{i+1}/A_i как функции z на оси пучка. Далее квадраты амплитуд гармоник проинтегрированы по сечению пучка $E_i = \iint_S A_i^2 dS$, где S —

площадь поперечного сечения пучка, и приведены зависимости $E_i(z)$. Индекс i принимает значения $i = 1, 2, 3, \dots, 10$.

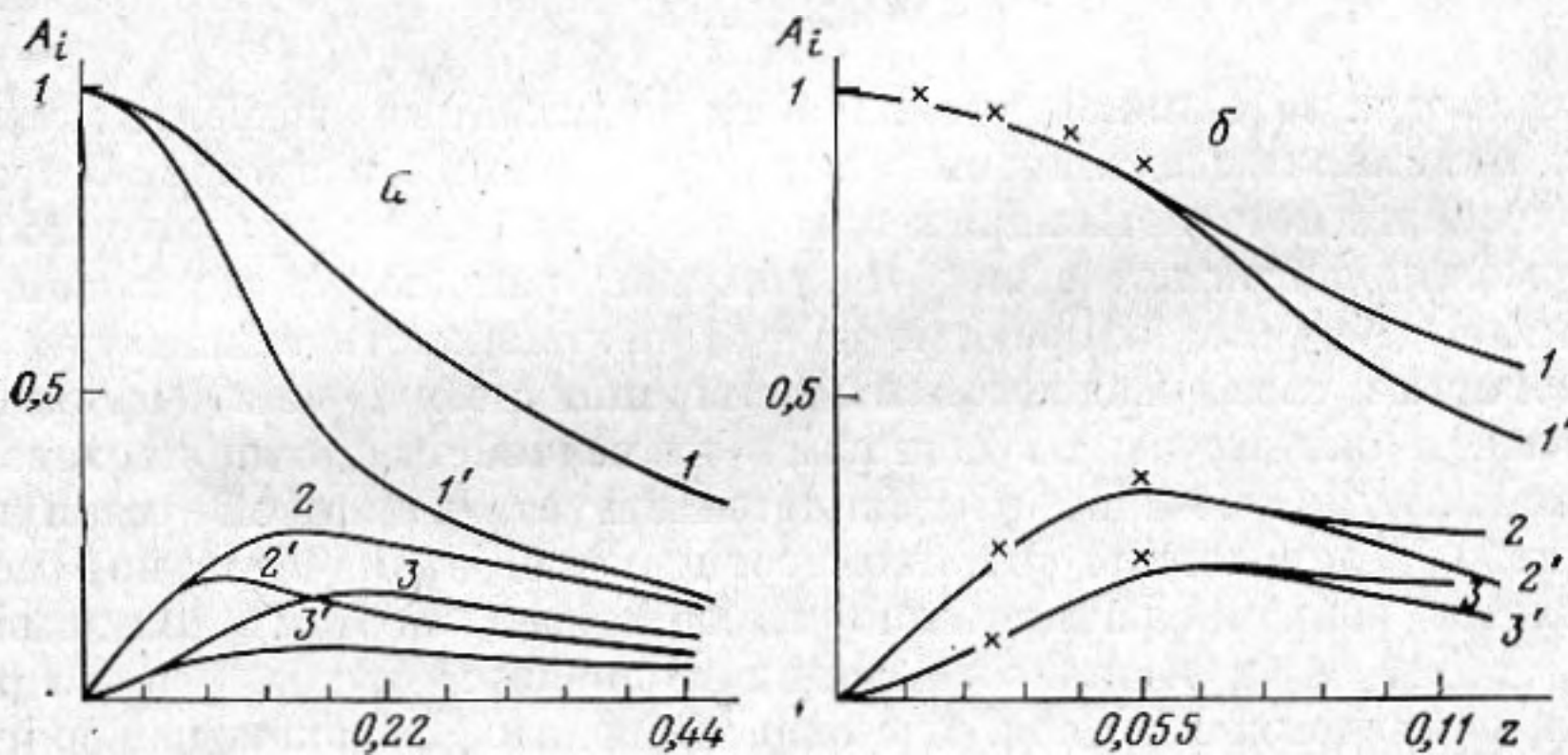
Анализ результатов начнем с квазиплоской волны в идеальной среде.

Распространение квазиплоской гармонической волны в нелинейной среде сопровождается генерацией гармоник, амплитуды которых увеличиваются, достигают максимальной величины, а затем уменьшаются. В табл. 1 приведены максимальные значения амплитуд второй A_{2m} и третьей A_{3m} гармоник на оси пучка и координаты их достижения z_2 и z_3 соответственно для двух рассмотренных амплитудных распределений. При этом амплитуда основной компоненты на оси пучка и в приосевой области уменьшается. Изменения амплитуд основной компоненты A_1 и двух ее гармоник A_2 и A_3 при распространении на оси двух рассмотрен-

Таблица 1

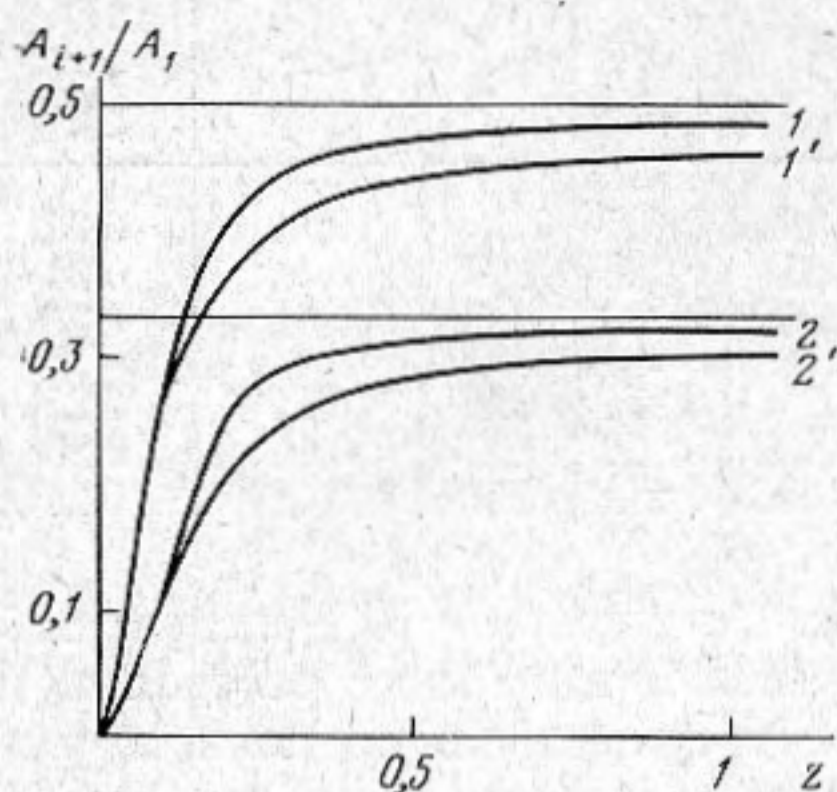
Амплитудное распределение	N	A_{2m}	z_2	A_{2m}/A_1	A_{3m}	z_3	A_{3m}/A_1	z_p	$(A_2/A_1)_{z=z_p}$	$(A_3/A_1)_{z=z_p}$
$(1-R^2)^2$	3,25	0,188	0,1	0,264	0,0876	0,143	0,165	0,3	0,41	0,24
	5	0,256	0,09	0,347	0,143	0,11	0,228	0,125	0,41	0,24
	10	0,336	0,055	0,402	0,213	0,066	0,280	0,055	0,41	0,26
$l-R^2$	3,25	0,272	0,176	0,388	0,165	0,198	0,251	0,2	0,41	0,25
	5	0,311	0,12	0,410	0,195	0,120	0,260	0,120	0,41	0,26
	10	0,340	0,055	0,410	0,220	0,066	0,284	0,055	0,41	0,27

ных пучков изображено для $N=3,25$ на фиг. 1, а и для $N=10$ — на фиг. 1, б. Вначале A_2 и A_3 (кривые 2, 2', 3 и 3') нарастают линейно с расстоянием, однако при $N=3,25$, когда дифракция играет существенную роль, амплитуды гармоник достигают своих максимальных значений раньше, чем образуется разрыв, в отличие от плоских волн. Зависимость $A_1(z)$ (кривые 1 и 1') показывает, что гауссов пучок расходится меньше. При $N=10$ поведение A_1 , A_2 и A_3 в обоих пучках меньше отличается друг от друга и от плоских волн (точки, соответствующие плоским волнам [11], обозначены *). Действительно, амплитуды гармоник достигают максимальной величины при координате разрыва, величины максимумов амплитуд

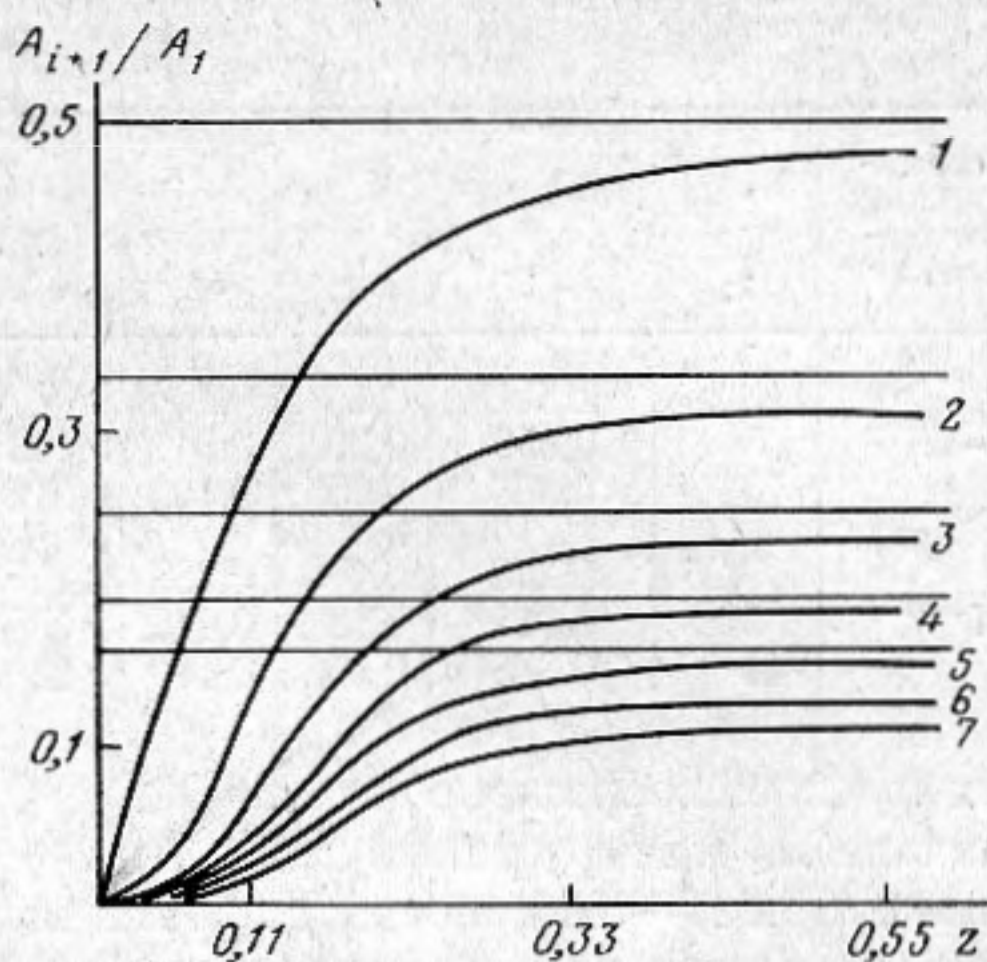


Фиг. 1. Изменение амплитуд основной компоненты и ее второй и третьей гармоник при распространении на оси гауссова пучка (кривые 1, 2, 3) и пучка с распределением амплитуды по полиному четвертой степени (кривые 1', 2', 3'). $N=3,25$ (а), $N=10$ (б) (* обозначены точки, соответствующие плоской волне). Номер кривой соответствует номеру гармоники, i принимает значения 1, 2, 3

гармоник в обоих пучках почти одинаковые, меньше разница в $A_1(z)$ на рассмотренных расстояниях. В процессе распространения доля второй и третьей гармоник по отношению к первой увеличивается и стремится асимптотически $A_2/A_1 \rightarrow 1/2$; $A_3/A_1 \rightarrow 1/3$. Причем в гауссовом пучке (кривые 1 и 2 на фиг. 2) отношения A_{i+1}/A_1 ближе к своим асимптотическим значениям, чем в пучке с распределением амплитуды по полиному четвертой степени (кривые 1' и 2'). На фиг. 3 показано, как в процессе распространения изменяется соотношение между гармониками; число гармоник равно 8. С усилением роли нелинейных эффектов по сравнению с дифракционными отношения A_{i+1}/A_1 быстрее стремятся к своим асимптотическим значениям. Величины отношений A_{i+1}/A_1 в точках максимума соответствующей гармоники z_{i+1} , а также эти отношения при координате образования разрыва в квазиплоской волне $z=z_p$ для пучков с различным значением параметра N для двух амплитудных распределений приведены в табл. 1. Анализируя эту таблицу, можно заметить, что при увеличе-



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Изменение соотношения между амплитудами гармоник на оси при распространении гауссова пучка (кривые 1, 2) и пучка с распределением амплитуды по полиному четвертой степени (кривые 1', 2'), $N=3,25$. Номер кривой соответствует значению $i=1, 2$

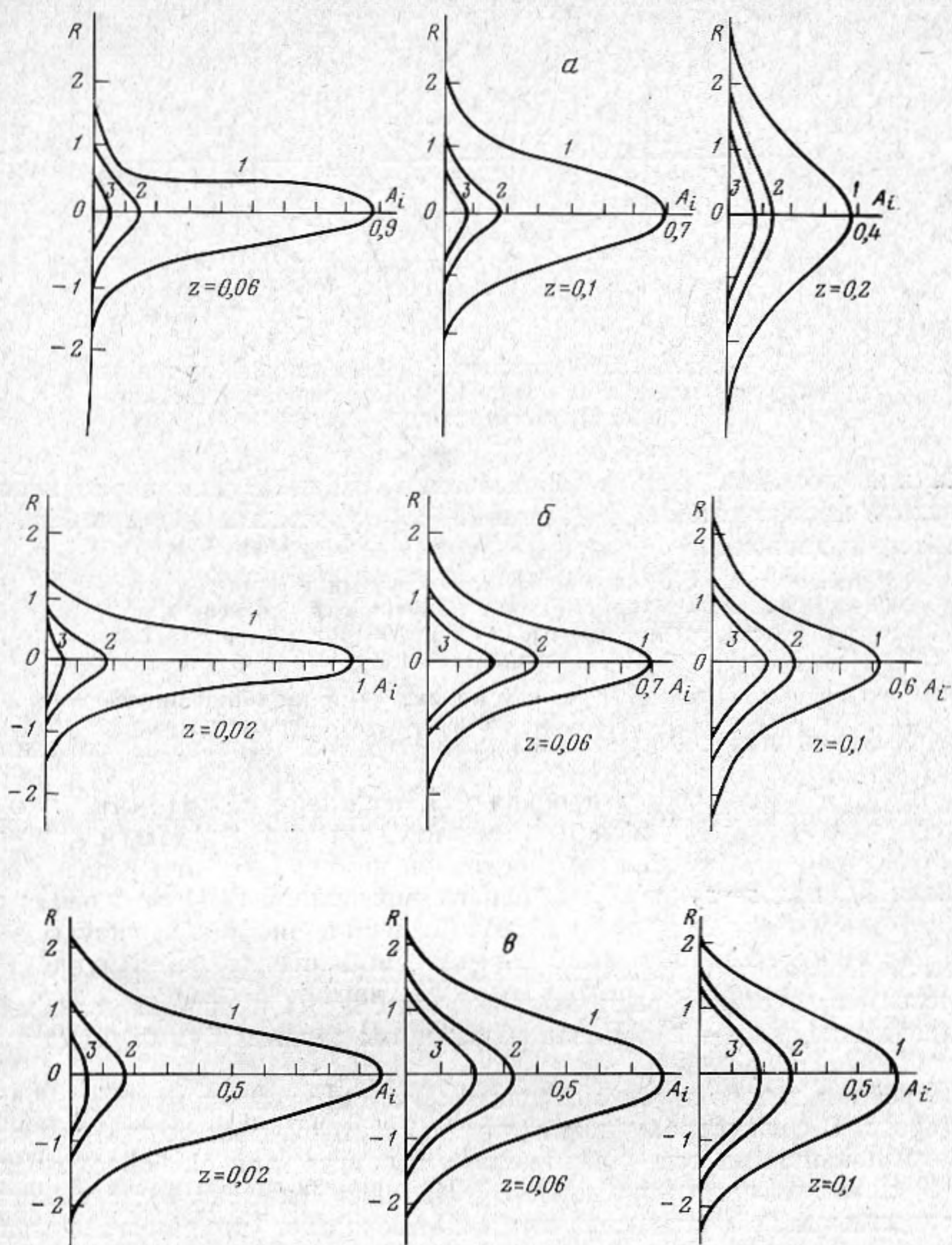
Фиг. 3. Изменение соотношения между амплитудами гармоник на оси при распространении гауссова пучка, $N=3,25$. Номер кривой соответствует значению $i=1, 2, \dots, 7$

нии параметра N сильнее проявляются нелинейные эффекты: увеличиваются максимальные значения амплитуд второй и третьей гармоник, растет их доля по отношению к основной компоненте; при этом амплитуды гармоник достигают своих максимумов раньше. В гауссовом пучке при слабой ($N=3,25$) и средней ($N=5$) нелинейности амплитуды гармоник достигают своих максимальных значений позже, чем в пучке с распределением амплитуды по полиному четвертой степени, но зато величины максимумов больше, что свидетельствует о сильной расходимости последнего. При сильной нелинейности $N=10$ в значительной степени подавляется роль дифракционной расходимости, поэтому величины A_{2m} , z_2 , A_{3m} , z_3 , A_{2m}/A_1 и A_{3m}/A_1 одинаковы для обоих пучков. Сопоставление данных, приведенных в табл. 1, с формой волны [3] показывает, что волновой профиль можно считать ударным при соотношении гармоник $A_2/A_1 \geq 0,41$ и $A_3/A_1 \geq 0,24$.

Динамика изменения амплитудных распределений основной компоненты и ее гармонических составляющих при распространении пучка, когда амплитуда на границе распределена по полиному четвертой степени, показана для слабой нелинейности $N=3,25$ на фиг. 4, а, для сильной нелинейности $N=10$ на фиг. 4, б, в гауссовом пучке при $N=10$ — на фиг. 4, в. Видно, что в пучках с рассмотренными распределениями амплитуды гармоники генерируются в довольно узкой приосевой области; чем выше номер гармоники, тем уже область, где она локализована. Для гауссова пучка это уже отмечалось в работе [6].

Из сравнения фиг. 4, а, б следует, что при сильной нелинейности величины A_2 и A_3 больше не только на оси, что уже было показано (см. фиг. 1, а и б), но и в одинаковых точках поперечного сечения при соответствующих z . Таким образом, при $N=10$ ширина пучка каждой гармоники больше, чем на том же расстоянии при $N=3,25$.

Из сопоставления фиг. 4, б, в видно, что если на оси A_2 и A_3 в обоих пучках отличаются мало, то в точках поперечного сечения $R=0,5$ и $R=1$ их различие становится существенным. Если сравнить фиг. 4, в с фиг. 3 работы [6], то при координате формирования разрыва величина A_1 меньше приближенного значения, приведенного в работе [6], на 6%,

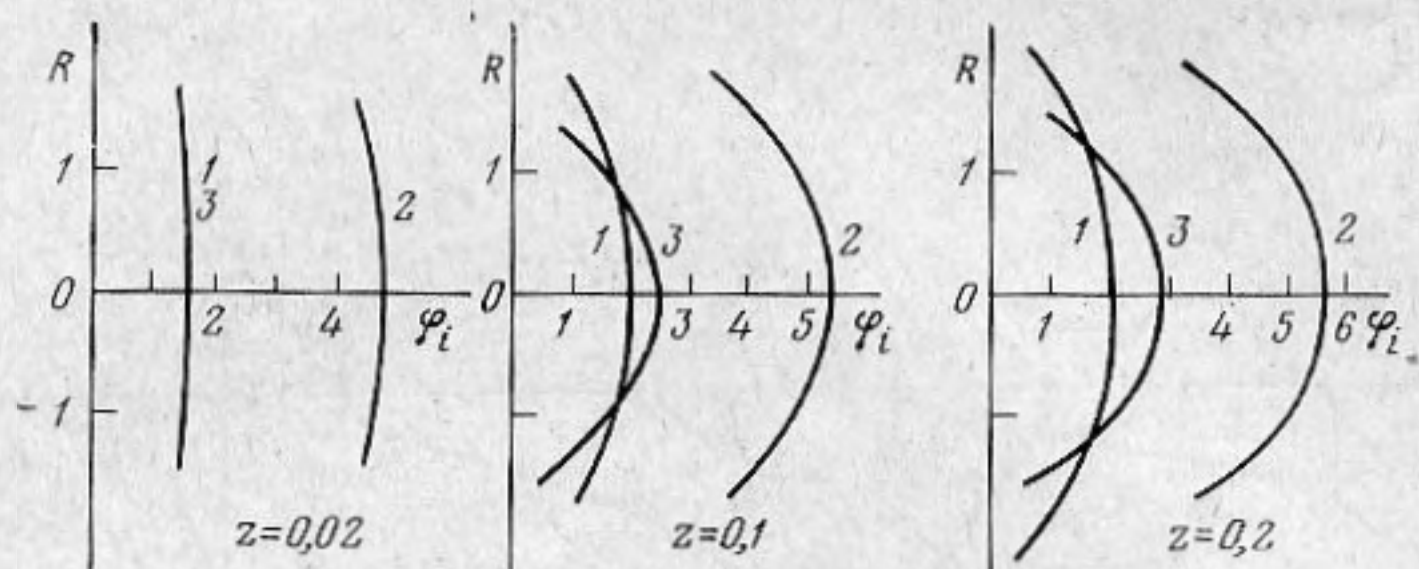


Фиг. 4. Распределение амплитуд основной компоненты и ее гармоник на разных расстояниях от границы нелинейной среды в пучке с амплитудным распределением по полиному четвертой степени. Номер кривой соответствует номеру гармоники, $i=1, 2, 3$; $N=3,25$ (а), $N=10$ (б), для гауссова пучка $N=10$ (в)

а величины A_2 совпадают. При распространении пучка волновой фронт основной компоненты из квазиплоского превращается в сферически расходящийся (кривые 1 на фиг. 5). Волновые фронты гармоник повторяют по форме волновой фронт порождающей их волны (кривые 2 и 3 на фиг. 5). Вдоль пучка начальные фазы изменяются, как показано на фиг. 6.

Энергетические характеристики гармоник представим в следующем виде. $E_i = \int_s A_i^2 dS$ — энергия соответствующей гармоники (S — площадь

поперечного сечения пучка). На фиг. 7 изображена зависимость энергии шести гармоник, начиная со второй, по отношению к полной энергии звукового пучка E . Очевидно, что до образования разрыва $E = E_{i,z=0}$. Изменение энергии основной компоненты представлено на фиг. 8 кривой 1.



Фиг. 5. Распределение начальных фаз по ширине пучка на разных расстояниях от границы. Номер кривой соответствует номеру гармоники, $i=1, 2, 3$

Можно показать, что до образования разрыва для периодического сигнала в предположении $\rho \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \pm\infty$ уравнение (1) при $\delta=0$ имеет интеграл движения

$$\int_0^{2\pi} \int_S \rho^2 d\theta dS = \text{const},$$

причем функция ρ обладает свойством $\int_0^{2\pi} \rho d\theta = 0$. Проверим, сохраняется ли сумма энергий гармоник при распространении. Как видно на фиг. 8

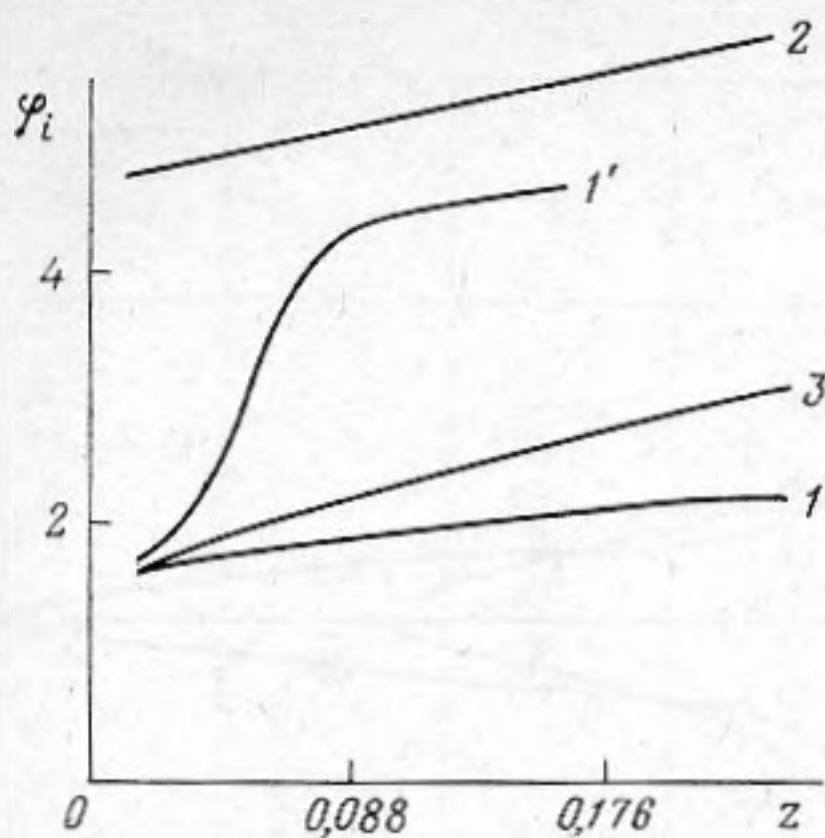
(кривая 2), при $z=z_p \sum_{i=1}^8 E_i$ отличается от полной энергии на 4%; сюда

входит энергия, приходящаяся на более высокие гармоники, отсечение «хвостов» в гауссовом распределении амплитуды и ошибка вычислений, не превышающая 1—2%. После образования разрыва сумма резко уменьшается.

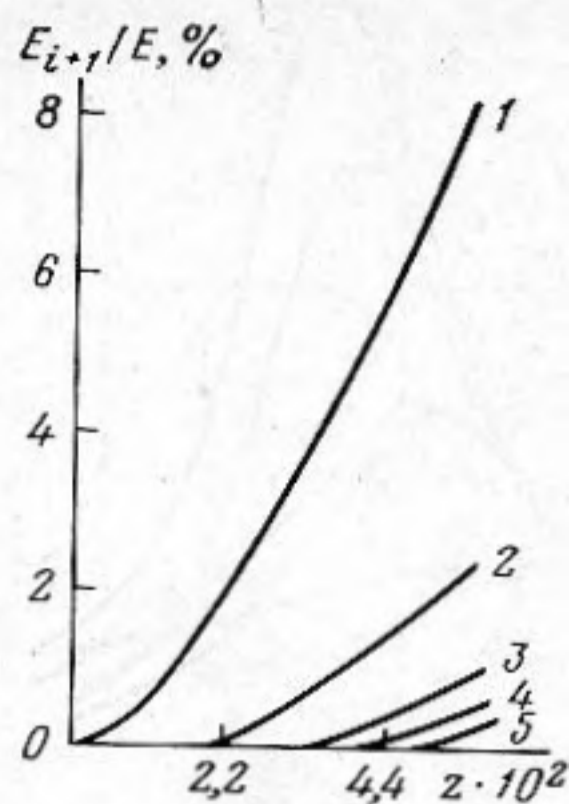
Перейдем теперь к рассмотрению сфокусированных пучков в идеальной среде. В сфокусированном пучке наблюдается рост амплитуды основной компоненты на оси. Увеличение амплитуды при слабой сходимости, ($\beta=1$) незначительное, примерно 5% (кривая 1 на фиг. 9); с увеличением сходимости величина максимума A_1 возрастает, причем максимальное значение A_1 зависит от первоначального амплитудного распределения и от величины параметра N . Кривые 2 и 3 на фиг. 9 относятся к пучку с распределением амплитуды по полиному четвертой степени, кривые 1, 4, 5 определяют гауссов пучок. При сильной нелинейности, когда идет интенсивная перекачка энергии в гармоники, A_{1m} меньше (кривые 2 и 4), чем при слабой нелинейности (кривые 3 и 5 на фиг. 9). Максимальные значения амплитуды основной компоненты A_{1m} и координаты этого максимума z_1 для различных значений параметров β и N для обоих пучков приведены в табл. 2.

Наряду с увеличением амплитуды основной компоненты наблюдается сужение амплитудного распределения. На фиг. 10 изображено самое узкое амплитудное распределение основной компоненты, соответствующее $N=3,25$, $\beta=0,1$ в гауссовом пучке (кривая 1) и в пучке с распределением амплитуды по полиному четвертой степени (кривая 2).

При увеличении сходимости максимальные значения амплитуд второй и третьей гармоник возрастают по абсолютной величине, но по отношению к амплитуде основной компоненты уменьшаются либо остаются прежними. Изменение амплитудных распределений сфокусированной волны и ее гармоник при распространении иллюстрируется фиг. 11. В фо-



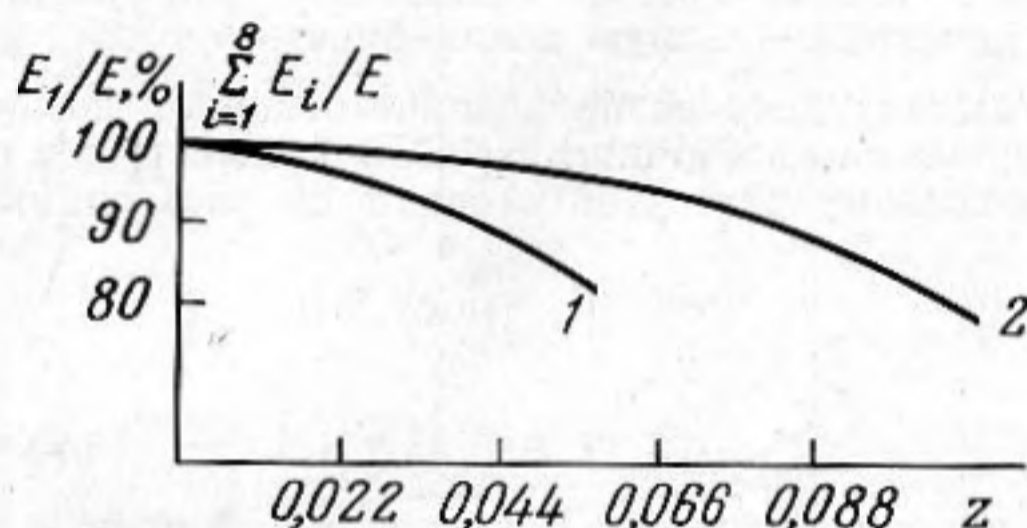
Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 6. Изменение начальных фаз вдоль пучка. Номер кривой соответствует номеру гармоники. Кривая 1' относится к сфокусированному пучку

Фиг. 7. Зависимость энергии гармоник, начиная со второй, по отношению к полной энергии в гауссовом пучке от пройденного расстояния $N=10$. Номер кривой соответствует значению $i=1, 2, \dots, 5$

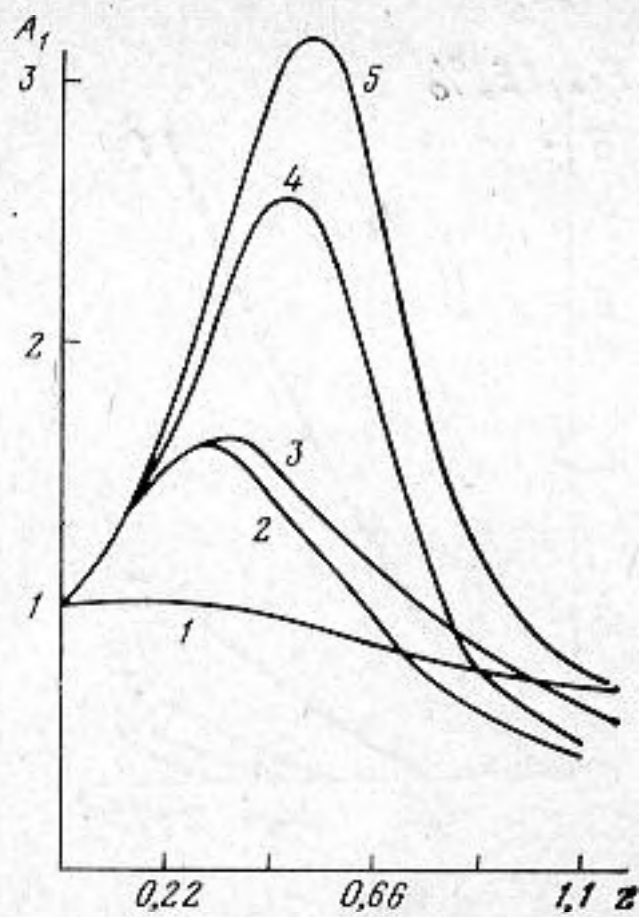


Фиг. 8. Зависимость энергии основной компоненты (кривая 1) и суммы $\sum_{i=1}^8 E_i$ (кривая 2) по отношению к полной энергии в гауссовом пучке, от пройденного расстояния, $N=10$

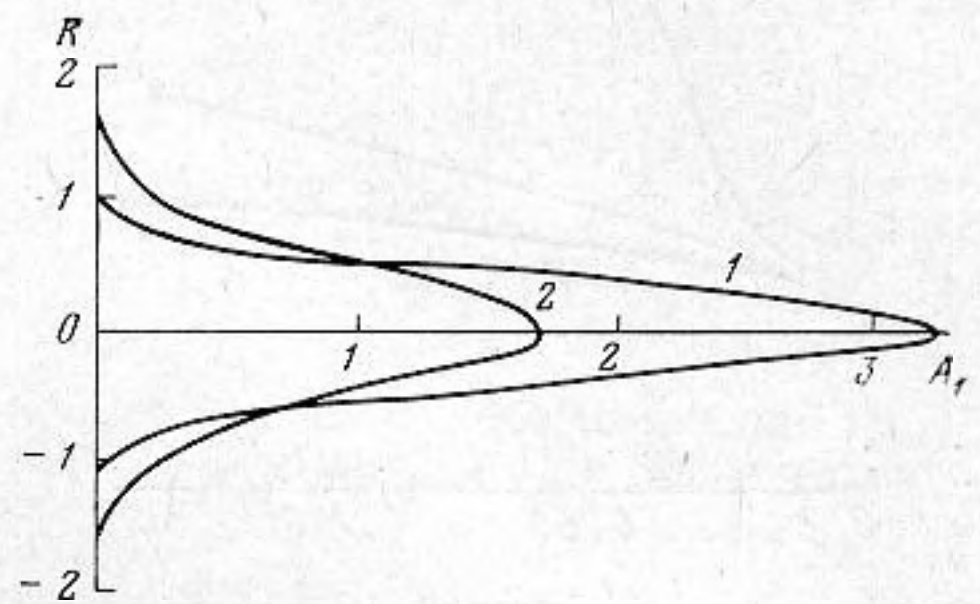
кальной плоскости и вблизи нее гармоники локализованы в очень узкой приосевой области. Сходящиеся волновые фронты основной компоненты и гармонических составляющих после прохождения фокуса становятся расходящимися. Это показано на фиг. 12, а для гауссова пучка и на фиг. 12, б для пучка с распределением амплитуды по полиному четвертой степени. Здесь видно, что волновые фронты гармоник повторяют волновой фронт основной компоненты. При прохождении фокальной области фаза основной компоненты меняется на π (см. фиг. 6 — кривая 1').

Интересно отметить, что при распространении сфокусированного пучка, характеризуемого значением параметров $N=3,25$ и $\beta=0,1$, когда ударная волна в прожекторной зоне не образуется, отношения A_{i+1}/A_1 очень медленно приближаются к своим асимптотическим значениям. Это хорошо видно из сравнения фиг. 2 и 13, где изображены отношения A_{i+1}/A_1 как функции пройденного расстояния z .

Перейдем к анализу распространения квазиплоских волн в вязкой теплопроводящей среде. Все рассмотренное ранее относилось к идеальным средам. При распространении пучка в вязкой теплопроводящей среде амплитуды гармоник возрастают до меньших значений. Это видно из сравнения соответствующих величин табл. 1 и табл. 3, относящихся к диссипативным средам. Сильное поглощение высоких гармоник приводит к появлению максимума в функции A_{i+1}/A_1 , характеризующей соот-



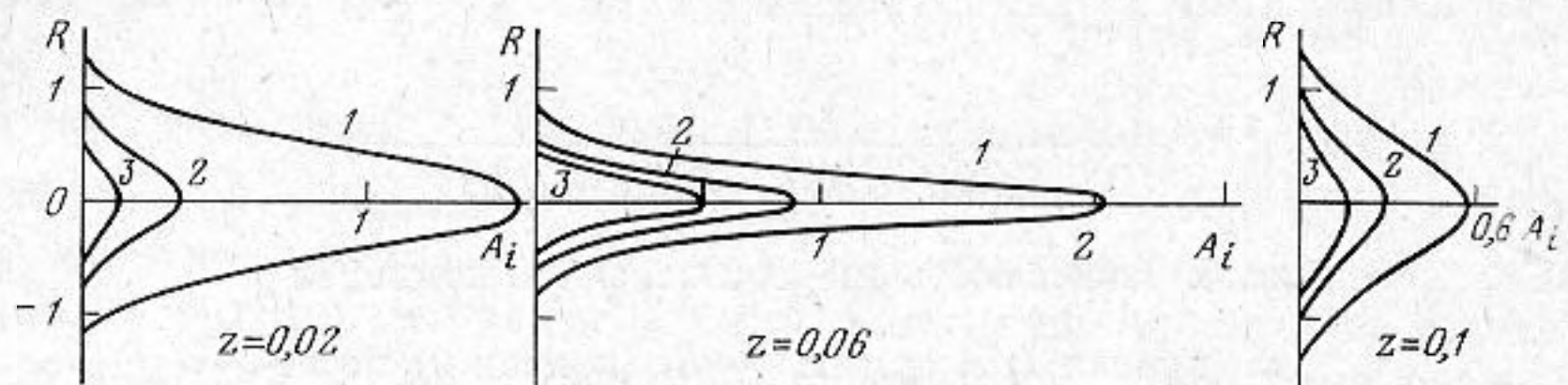
Фиг. 9



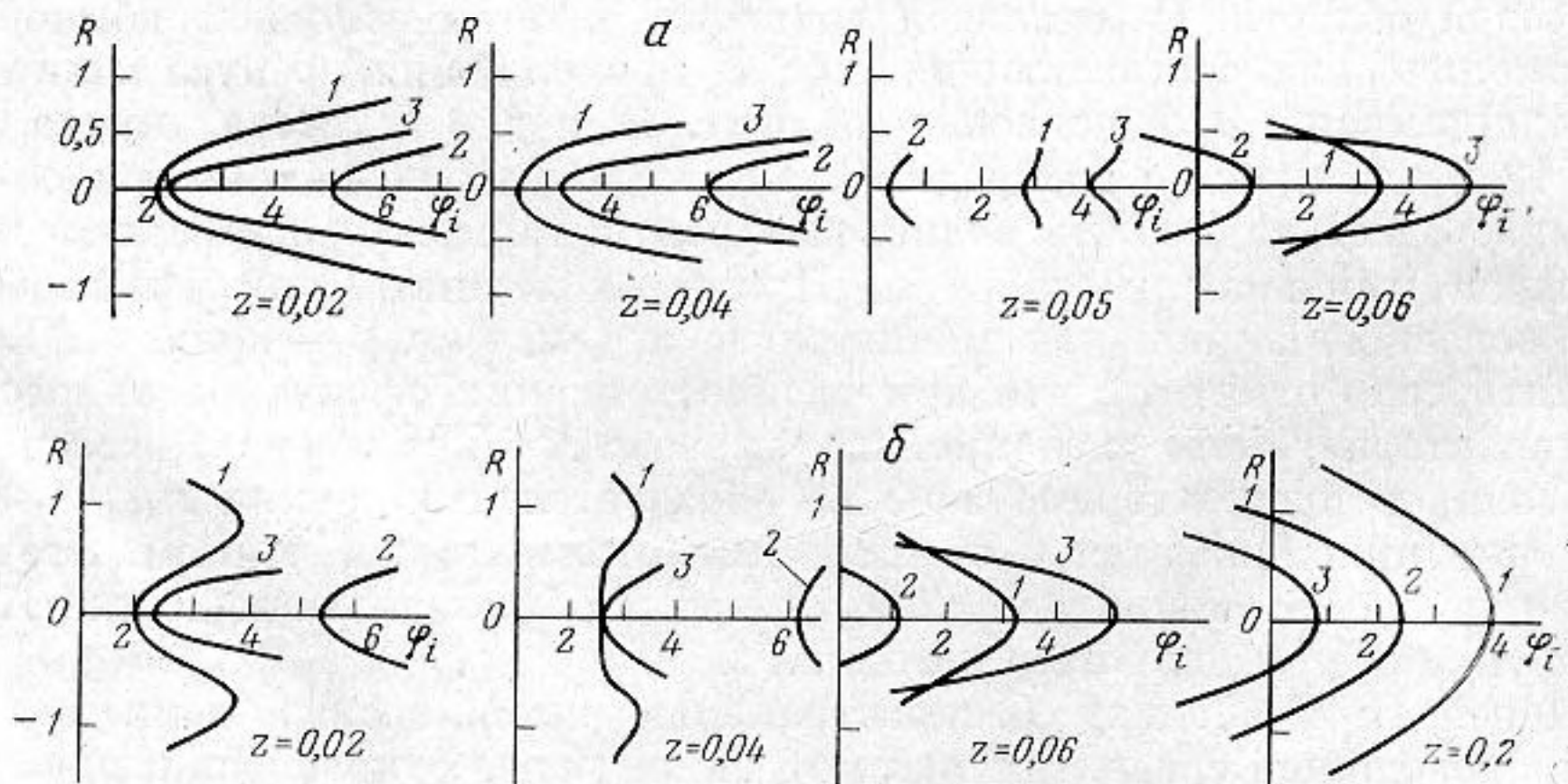
Фиг. 10

Фиг. 9. Изменение амплитуды основной компоненты на оси в сфокусированном пучке вдоль направления распространения. Кривая 1 характеризует слабосходящийся пучок $\beta=1$; кривые 2-5 определяют сильно сходящиеся волны $\beta=0,1$. Кривые 2, 3 относятся к пучку с амплитудным распределением $(1-R^2)^2$, кривые 4, 5 соответствуют гауссову пучку. Четные кривые описывают сильную нелинейность $N=10$, нечетные — слабую нелинейность $N=3,25$

Фиг. 10. Самое узкое амплитудное распределение основной компоненты при $N=3,25$ и $\beta=0,1$ в гауссовом пучке на расстоянии $z=0,05$ — кривая 1 и в пучке с распределением амплитуды по полиному четвертой степени на расстоянии $z=0,04$ — кривая 2



Фиг. 11. Распределение амплитуд основной компоненты и ее гармоник на разных расстояниях от границы в сфокусированном гауссовом пучке, $N=10$ и $\beta=0,1$. Номер кривой соответствует номеру гармоники



Фиг. 12. Распределение начальных фаз по ширине пучка на разных расстояниях от границы для гауссова пучка (а), для пучка с распределением амплитуды по полиному четвертой степени (б); $N=3,25$, $\beta=0,1$. Номер кривой соответствует номеру гармоники

Таблица 2

Распреде- ление ампли- туды	β	N	A_{1m}	$z_1 \cdot 10^2$	A_{2m}	z_2
$(1-R^2)^2$	1	3,25	1,04	3,3-4,2	0,205	0,088
		5	1,04	3,3-4,2	0,278	0,077
		10	1,01	1,1-2,2	0,363	0,055
	0,5	3,25	1,11	3,3-4,2	0,22	0,080
		10	1,07	3,3-4,2	0,400	0,055
	0,1	3,25	1,7	3,3-3,9	0,31	0,06
10		1,64	3,0-3,3	0,682	0,039	
$l-R^2$	1	3,25	1,05	4,0-6,0	0,35	0,192
		10	1,01	3,0-21,0	0,38	0,066
	0,1	3,25	3,17	5,0-	0,865	0,06
		10	2,55	4,4-	1,12	0,04

Распреде- ление ампли- туды	A_{2m}/A_1	A_{3m}	z_3	A_{3m}/A_1	z_p	$(A_2/A_1)_{z_p}$	$(A_3/A_1)_{z_p}$
$(1-R^2)^2$	0,27	0,093	0,121	0,148	0,3	0,420	0,25
	0,33	0,15	0,10	0,21	0,13	0,415	0,25
	0,40	0,226	0,066	0,278	0,07	0,434	0,28
	0,25	0,1	0,11	0,14	0,28	0,41	0,24
	0,40	0,248	0,06	0,268	0,06	0,423	0,27
	0,232	0,127	0,066	0,1	0,36 *	0,375	0,21
	0,40	0,418	0,042	0,263	0,05	0,45	0,28
	0,39	0,214	0,22	0,26	0,22	0,42	0,27
$l-R^2$	0,44	0,243	0,08	0,3	0,06	0,43	0,27
	0,29	0,4	0,06	0,135	0,27 *	0,385	0,215
	0,44	0,72	0,04	0,28	0,044	0,42	0,28

* Отмеченные звездочкой значения z_p соответствуют координате, когда устанавливается наименьшая ширина фронта, превосходящая ударную.

ношение между гармониками в процессе распространения, как показано на фиг. 14, в отличие от идеальной среды (см. фиг. 2).

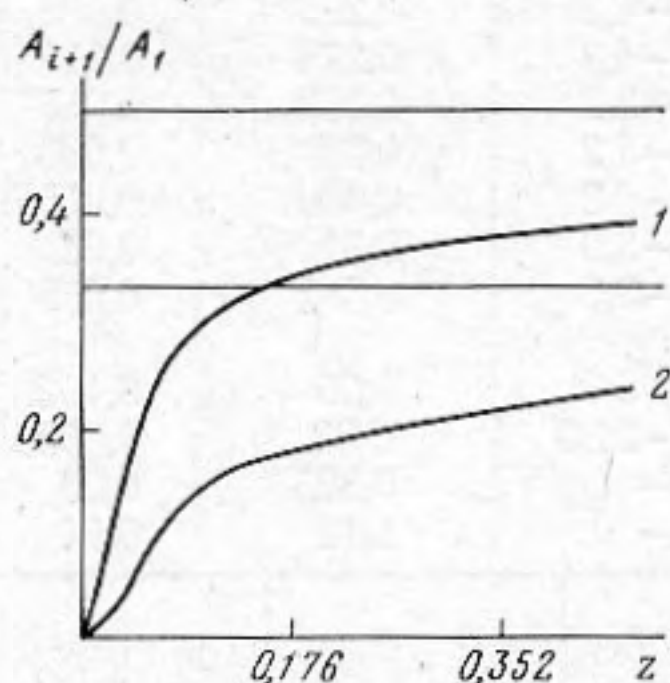
Таким образом, при распространении монохроматического сигнала, локализованного в пространстве в виде пучка, гармоники генерируются в сравнительно узкой приосевой области. Чем выше номер гармоники, тем уже область, где она локализована. Амплитуды гармоник увеличиваются с расстоянием, достигают максимальной величины, затем уменьшаются. При «слабой» и «средней» нелинейности амплитуды гармоник в отличие от плоских волн достигают своих максимумов раньше, чем наступает разрыв. При «сильной» нелинейности координаты максимальных значений амплитуд гармоник совпадают с расстоянием формирования ударного фронта. Величины максимумов амплитуд гармоник, а также их координаты зависят от амплитудного распределения и от соотношения нелинейных и дифракционных эффектов. Соотношение между амплитудами гармоник стремится асимптотически к значению, характерному для

Таблица 3

Ампли- тудное распреде- ление	N	δ	A_{2m}	z_2	A_{2m}/A_1	A_{3m}	z_3	A_{3m}/A_1
$(1-R^2)^2$	5	0,25	0,238	0,088	0,326	0,125	0,094	0,175
	10	0,5	0,31	0,055	0,368	0,19	0,066	0,216
$l-R^2$	10	0,5	0,31	0,066	0,404	0,19	0,077	0,266

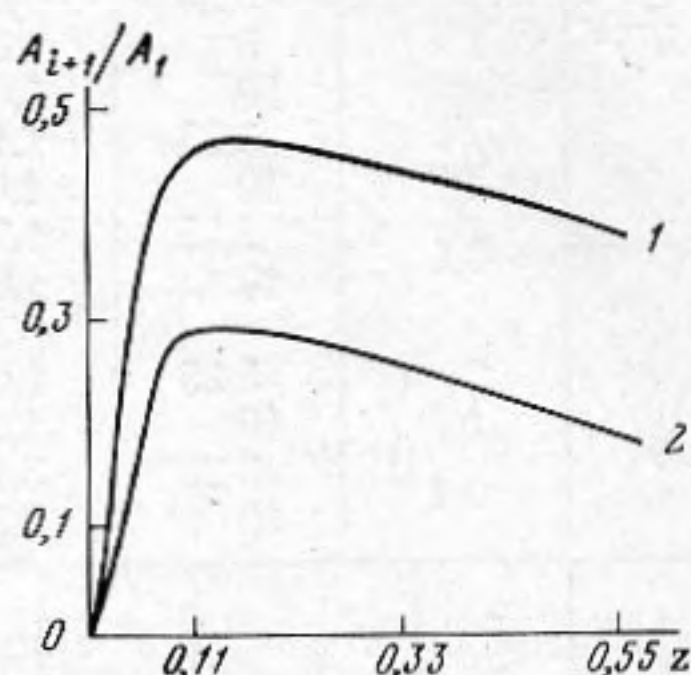
одномерных (плоских и сферических) волн. При отношении между гармониками $A_2/A_1 \geq 0,41$, $A_3/A_1 \geq 0,24$ волновой профиль можно считать ударным. Сумма энергий гармоник до образования разрыва сохраняется.

В сфокусированном пучке наблюдается увеличение амплитуды основной компоненты, сопровождающееся сужением амплитудного распределения. В фокальной плоскости и вблизи нее гармоники локализованы



Фиг. 13

Фиг. 13. Изменение отношения между гармониками A_{i+1}/A_1 на оси при распространении пучка с распределением амплитуды по полиному четвертой степени, $N=3,25$, $\beta=0,1$. Номер кривой соответствует значению $i=1, 2$



Фиг. 14

Фиг. 14. Изменение отношения между гармониками при распространении в диссипативной среде. Номер кривой соответствует значению $i=1, 2$

в очень узкой приосевой области. Волновой фронт основной компоненты из сходящегося превращается в расходящийся после прохождения фокуса. Волновые фронты гармоник повторяют фронт порождающей их волны.

В диссипативных средах кривые, выражающие зависимость отношения между гармониками от расстояния, имеют максимум.

ЛИТЕРАТУРА

1. Островский Л. А., Сутин А. М. Фокусировка акустических волн конечной амплитуды. Докл. АН СССР, 1975, 221, 6, 1300–1303.
2. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В. К нелинейной теории параксиальных звуковых пучков. Докл. АН СССР, 1975, 225, 6, 1053–1055.
3. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. Нелинейное распространение звукового пучка в недиссипативной среде. Акуст. ж., 1976, 22, 4, 487–491.
4. Ingenito F., Williams A. O. Calculation of Second — Harmonic Generation in a Piston Beam. J. Acoust. Soc. America, 1971, 49, 1, 319–328.
5. Куницын В. Е., Руденко О. В. Генерация второй гармоники в поле поршневого излучателя. Акуст. ж., 1978, 23, 4, 549–555.
6. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В. Ограниченные квазиплоские пучки периодических возмущений в нелинейной среде. Акуст. ж., 1973, 19, 6, 871–876.
7. Berezina S. I., Ljatomov V. E., Popomarev U. V., Khozjainova N. S. Second — Harmonic in Lens — Mirror Acoustic Microscope. Proceedings of 8 International Symposium on Nonlinear Acoustic. Paris, 1978.
8. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Руденко О. В. Особенности работы мощных параметрических излучателей звука. Акуст. ж., 1978, 24, 1, 125–127.
9. Кузнецов В. П. Уравнения нелинейной акустики. Акуст. ж., 1970, 16, 4, 548–553.
10. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. Сфокусированные звуковые пучки конечной амплитуды. Акуст. ж., 1978, 24, 1, 21–28.
11. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Научно-исследовательский
вычислительный центр

Поступила
18 апреля 1978 г.
После исправления
28 сентября 1978 г.