

УДК 534.321.9:66.084

## РАСЧЕТ КОЛЬЦЕВЫХ КОНЦЕНТРАТОРОВ РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

*П. Е. Васильев, И. А. Савицкас*

Разработан метод расчета кольцевых концентраторов радиальных колебаний с изменяющейся по радиусу толщиной путем ступенчатой аппроксимации кривой, описывающей изменение толщины. Проведен сравнительный анализ концентраторов, толщина которых изменяется по линейному, экспоненциальному, катеноидальному и ступенчатому законам.

В последнее время все более широкое применение в ультразвуковой технике находят колебательные системы, основанные на использовании радиальных колебаний дисков и колец [1, 2]. Для таких колебательных систем, как и для стержневых, можно применять резонансные концентраторы, усиливающие амплитуду колебаний. Расчет простейших концентраторов колебаний — концентраторов с линейной и ступенчатой зависимостью толщины от радиуса — приведен в работе [3].

По аналогии со стержневыми колебательными системами представляет интерес расчет кольцевых колебательных систем, толщина которых изменяется в зависимости от радиуса по различным законам: линейному, экспоненциальному и катеноидальному.

На фиг. 1 приведено осевое сечение кольца с внутренним радиусом  $r_0$  и внешним  $r_m$ , толщина которого  $h$  убывает по радиусу. Кольцо с плавно изменяющейся по радиусу толщиной аппроксимировано серией колец постоянной толщины, ограниченных цилиндрическими поверхностями с радиусами  $r_i, r_{i+1}$  и с площадями соответственно  $S_i, S_{i+1}$ , причем

$$(1) \quad S_i = 2\pi(r_0 + i\delta)h_i,$$

где  $\delta = (r_m - r_0)/m$ ,  $m$  — число колец постоянной толщины, на которые разбивается кольцо переменной по радиусу толщины,  $i = 1, 2, 3, \dots$  — целое число.

Кольцо возбуждается заданным на поверхности радиуса  $r_0$  смещением с амплитудой  $\xi(r_0)$ , создаваемым активным преобразователем колебаний.

Уравнение распределения амплитуд радиальных смещений  $\xi(r)$  и механических напряжений  $\sigma(r)$  в ограниченной радиусами  $r_i$  и  $r_{i+1}$  части кольца можно записать в виде [3]

$$(2) \quad \xi_{i, i+1}(r) = A_i J_1(kr) + B_i Y_1(kr),$$

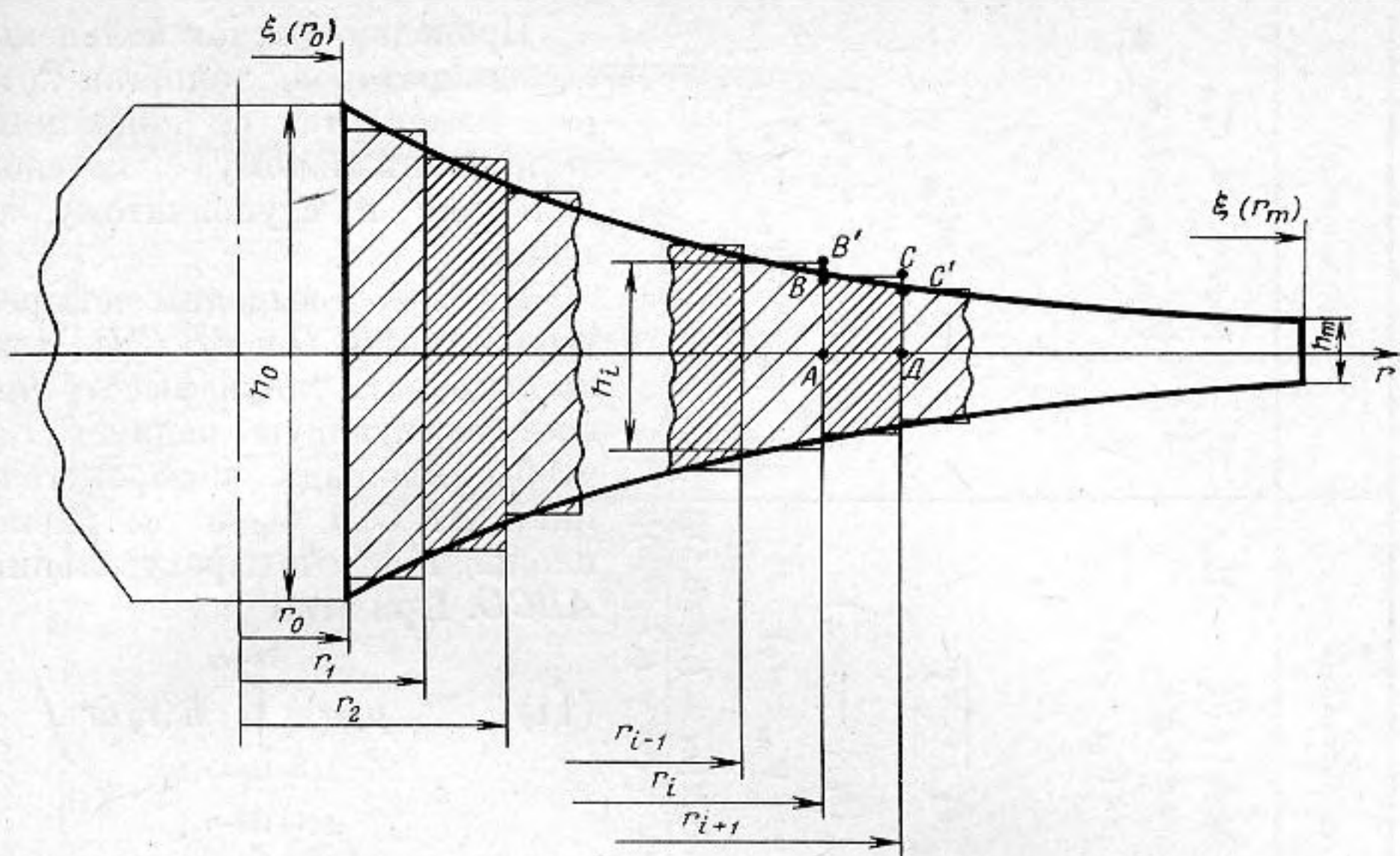
$$(3) \quad \sigma_{i, i+1}(r) = A_i M_{01}(kr) + B_i N_{01}(kr),$$

где

$$(4) \quad M_{01}(kr) = J_0(kr) + \frac{\nu-1}{kr} J_1(kr),$$

$$(5) \quad N_{01}(kr) = Y_0(kr) + \frac{\nu-1}{kr} Y_1(kr),$$





Фиг. 1. Кольцевой концентратор с изменяющейся по радиусу толщиной

$A_i, B_i$  — постоянные интегрирования;  $k = \omega/c_p$  — волновое число;  $c_p$  — скорость распространения цилиндрической звуковой волны;  $\omega$  — круговая частота;  $\rho, E, \nu$  — плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала кольца соответственно;  $J_0, Y_0$  — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка;  $J_1, Y_1$  — функции Бесселя первого и второго рода первого порядка.

Если предположить, что цилиндрические поверхности кольца, описываемые радиусами  $r_0$  и  $r_m$ , свободны, граничные условия можно записать в следующем виде:

$$(6) \quad \sigma_{01}(r_0) = 0,$$

$$(7) \quad \xi_{i-1,2}(r_i) = \xi_{i,i+1}(r_i),$$

$$(8) \quad r_i h_i \sigma_{i-1,i}(r_i) = r_i h_{i+1} \sigma_{i,i+1}(r_i),$$

$$(9) \quad \sigma_{m-1,m}(r_m) = 0.$$

На основе уравнений (2) — (9) составляется определитель, приравниванием нулю которого можно получить уравнение собственных частот кольца:

$$(10) \quad \begin{vmatrix} M_{01}(kr_0) & N_{01}(kr_0) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_1(kr_i) & Y_1(kr_i) & J_1(kr_i) & Y_1(kr_i) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & p_i M_{01}(kr_i) & p_i N_{01}(kr_i) & M_{01}(kr_i) & N_{01}(kr_i) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & M_{01}(kr_m) & N_{01}(kr_m) \end{vmatrix} = 0;$$

здесь  $p_i = h_i/h_{i+1}$  — коэффициент площади, вычисленный на стыке цилиндрических поверхностей при радиусе  $r_i$ .

Уравнение частот позволяет найти резонансный радиус  $r_m$  кольца на заданной частоте при известном значении  $r_0$  и заданном характере изменения толщины кольца. После этого нетрудно найти постоянные интегрирования  $A_i$  и  $B_i$ , распределения амплитуд смещений и напряжений по радиусу кольца и вычислить коэффициент усиления амплитуд радиальных смещений  $k = \xi(r_m)/\xi(r_0)$ .



	Линейный	Экспоненциальный	Катеноидальный	Ступенчатый
Закон изменения толщины концентратора	$h(a) = h_0(1 - aa)$ $a = \frac{N-1}{Na_m}$ $N = h_0/h_m$ $a_m = k(r_m - r_0)$	$h(a) = h_0 e^{-\beta a}$ $\beta = 2 \ln N/a_m$ $a_m = k(r_m - r_0)$	$h(a) = h_0 \operatorname{ch}[\gamma(a_m - a)]$ $\gamma = \operatorname{arch} N/a_m$ $a_m = k(r_m - r_0)$	$h(a) = \begin{cases} h_0 r_0 \leq r \leq r_{m0} \\ h_m, r_{m0} \leq r \leq r_m \end{cases}$
Волновой коэффициент	$k_\alpha = \omega/c_p$	$k_\beta = \sqrt{k^2 - \beta^2}$	$k_\gamma = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$	$k = \omega/c_p$
Безразмерный резонансный радиус	$z_i = k_\alpha \left( r_0 + \frac{i}{m} a_m \right)$ $a_m = k(r_m - r_0)$	$z_i = k_\beta \left( r_0 + \frac{i}{m} a_m \right)$ $a_m = k(r_m - r_0)$	$z_i = k_\gamma \left( r_0 + \frac{i}{m} a_m \right)$ $a_m = k(r_m - r_0)$	$z_i = k \left( r_0 + \frac{i}{m} a_m \right)$ $a_m = k(r_m - r_0)$
Коэффициент площади	$P_i = \frac{N[m - (i - 0,5)] + (i + 0,5)}{N[m - (i + 0,5)] + (i + 0,5)}$	$P_i = \sqrt{N^2}$	$P_i = \frac{\operatorname{ch}\{\operatorname{arch} N[m - (i - 0,5)]\}}{\operatorname{ch}\{\operatorname{arch} N[m - (i + 0,5)]\}}$	$P = N$

Проведем расчет кольцевых концентраторов, толщина которых изменяется по линейному, экспоненциальному, катеноидальному и ступенчатому законам.

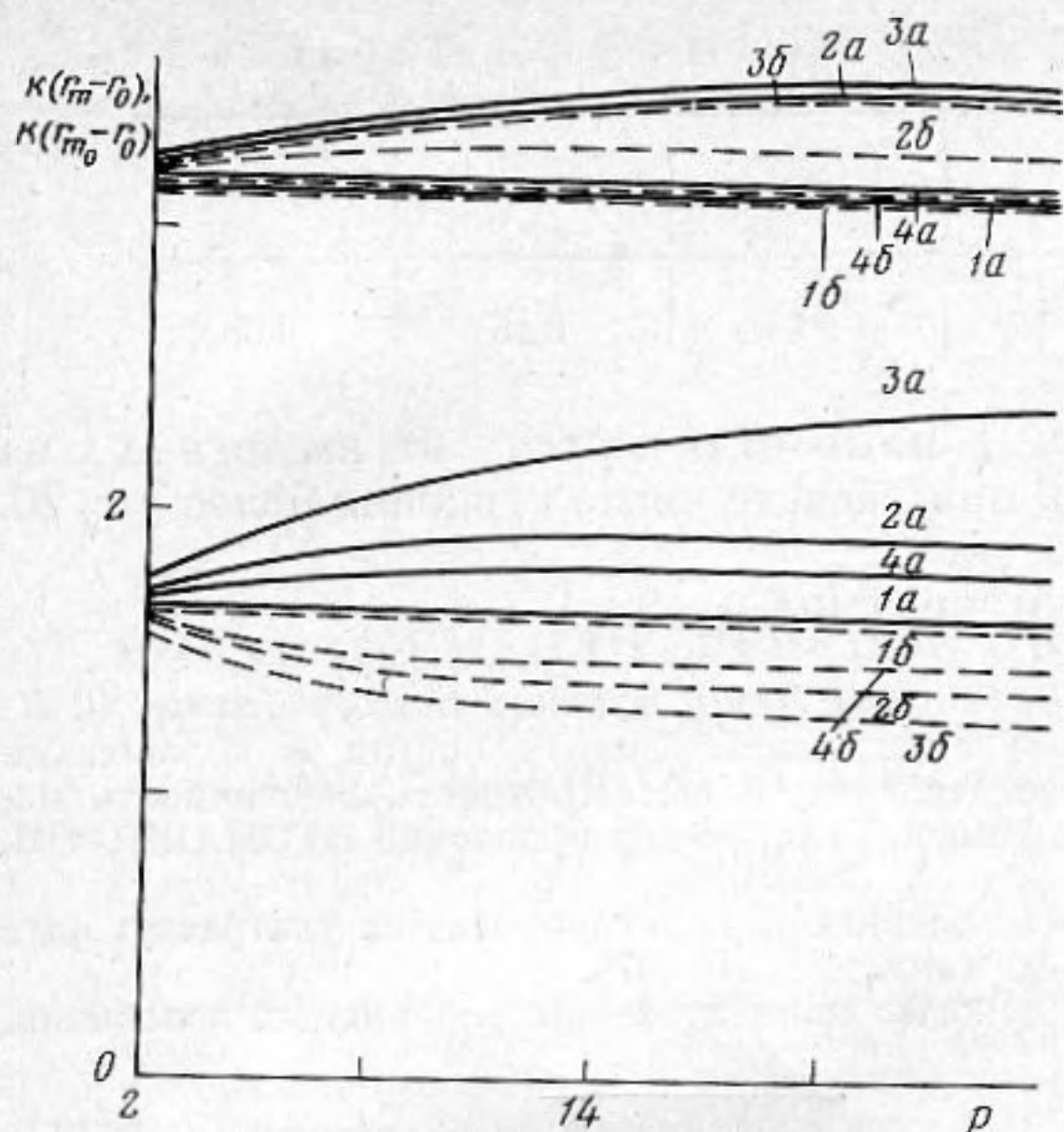
На фиг. 1 выделим четырехугольник  $ABCD$  и  $AB'C'D$ . Можно подобрать такую высоту  $h_{i+1}$ , соответствующую радиусу  $r_{i+1}$ , чтобы площадь четырехугольника  $AB'C'D$  была бы равной площади четырехугольника  $ABCD$ . При этом

$$(11) \quad p_i = \frac{\int_{[(i-1)\delta - r_0]^{i\delta - r_0}} h(r) dr}{\int_{i\delta - r_0}^{[(i+1)\delta - r_0]} h(r) dr}$$

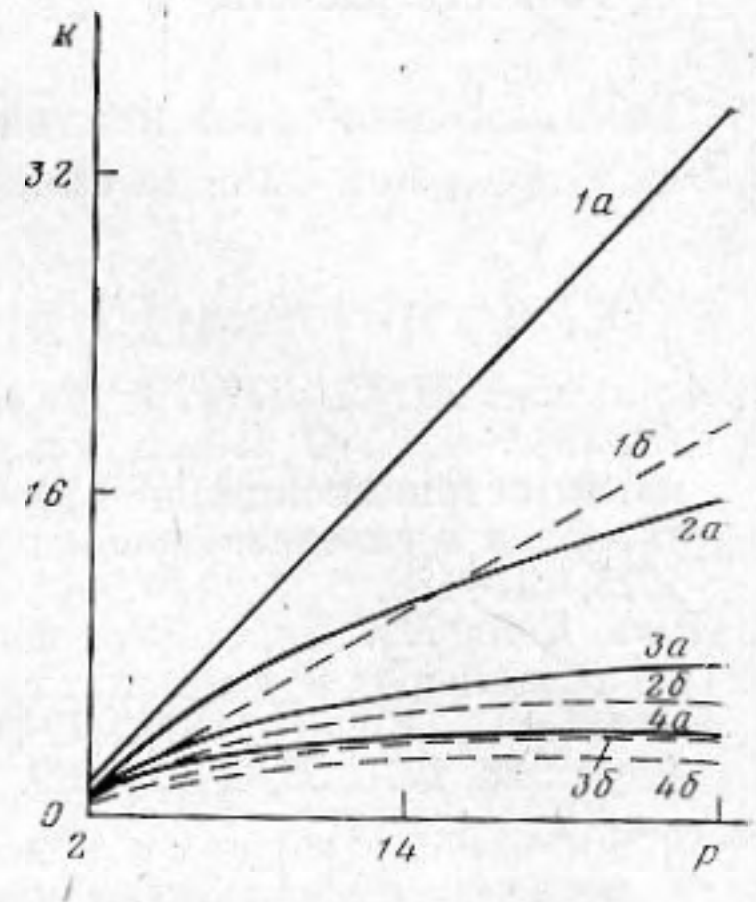
Для удобства расчета в табл. 1 сведены выражения, описывающие законы изменения толщины, волновые коэффициенты, безразмерные резонансные радиусы и коэффициенты площади для широко применяемых кольцевых концентраторов радиальных колебаний. Заметим, что по упомянутому выше методу можно рассчитать кольцевые концентраторы с любым законом изменения толщины в зависимости от радиуса.

На фиг. 2, 3 представлены зависимости волновой резонансной ширины  $k(r_m - r_0)$ , положения окружностей нулевых смещений  $k(r_{m0} - r_0)$  и коэффициентов усиления амплитуд смещений  $K$  кольцевых концентраторов от коэффициента площади  $p$ . Из графиков видно, что аналогично стержневым концентраторам изменение перепада толщины в большей степени сказывается на резонансных размерах концентраторов с экспоненциальным и катеноидальным законом изменения толщины, и в меньшей — на концентраторах с линейным и ступенчатым изменением толщины. Резонансные размеры концентраторов незначительно зависят от направления изменения их толщины. Как и следовало ожидать, по





Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимости резонансной ширины  $k(r_m - r_0)$  (верхняя группа кривых) и положения окружностей узловых смещений  $k(r_{m0} - r_0)$  (нижняя группа кривых) от коэффициента площади  $\rho$  концентраторов со ступенчатым (1), катеноидальным (2), экспоненциальным (3) и линейным (4) изменением толщины в зависимости от радиуса; номера кривых с индексом  $a$  — для концентраторов с возрастающей по радиусу толщиной, с индексом  $b$  — для концентраторов с убывающей по радиусу толщиной;  $kr_0 = 3$

Фиг. 3. Зависимости коэффициента усиления амплитуд смещений  $K$  от коэффициента площади  $\rho$  для концентраторов со ступенчатым (1), катеноидальным (2), экспоненциальным (3) и линейным (4) изменением толщины в зависимости от радиуса; индекс  $a$  — для концентраторов с возрастающей по радиусу толщиной,  $b$  — с убывающей по радиусу толщиной;  $kr_0 = 3$

сравнению с кольцом постоянного сечения положение окружностей узловых смещений у концентраторов, толщина которых возрастает по радиусу, сдвинуто ближе к внешней граничной поверхности, а у колец с убывающей толщиной — ближе к внутренней.

Коэффициент усиления амплитуд смещений у кольцевых концентраторов с возрастающей по радиусу толщиной значительно превышает коэффициент усиления у колец с убывающей толщиной. Максимальным коэффициентом усиления при заданном коэффициенте площади обладают ступенчатые кольцевые концентраторы; этот коэффициент уменьшается у концентраторов с катеноидальным законом изменения толщины, еще меньше он у экспоненциальных концентраторов и у концентраторов с линейным изменением толщины.

Расчеты показали также, что резонансная ширина концентраторов уменьшается с возрастанием радиуса их внутреннего отверстия и устанавливается постоянной при  $kr_0 \geq 2$ ; положение окружности узловых смещений концентраторов также зависит от радиуса их внутреннего отверстия и устанавливается постоянным при  $kr_0 \geq 2$ .

Точность расчета проверялась методом сравнения данных для волновых размеров кольцевого концентратора с линейно возрастающей по радиусу толщиной, полученных методом ступенчатой аппроксимации кривой изменения толщины и с помощью аналитического выражения, приведенного в работе [3]. В табл. 2 показана зависимость точности расчета концентраторов предлагаемым методом от количества ступенек при аппроксимации кривой изменения толщины.



Таблица 2

Количество ступенек	5	10	20	40
Точность расчета, %	7	1	0,15	0,08

Так как экспериментальные данные отличаются от расчетных на 0,5–1% [3], нет смысла вводить при расчете число ступенек более чем 20.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Асташкин Ю. С., Петухов В. И., Певницкий Л. Д., Буханов А. Н., Абрамов О. В., Шапиро А. С. О работе ультразвуковых колебательных систем с кольцевыми магнитострикционными преобразователями. В сб.: Прочность-пластичность материалов в ультразвуковом поле. Минск, Белорусское правление НТОМАШПРОМ, 1973, 181–186.
2. Динь Конг Мэ. Некоторые вопросы расчета и конструирования ультразвуковых колебательных крутильных систем. Канд. дис., Л., 1973.
3. Васильев П. Е., Казанцев В. Ф. Дисковые концентраторы радиальных колебаний. Акуст. ж., 1976, 22, 6, 825–829.

Поступила  
16 мая 1977 г.  
Окончательный вариант  
17 ноября 1978 г.