АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 2

УДК 621.371.167.3

МОДЕЛЬ НЕОТРАЖАЮЩЕЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

С. П. Ефимов

Сформулированы условия, при которых коэффициент отражения от анизотропного кристалла тождественно равен нулю для произвольного угла падения. Показано, что не отражающий волны кристалл акустически подобен среде изотропной при растяжении координаты вдоль оси кристалла. Указано соотношение между параметрами мелкослоистой среды, при котором возникает эффективная анизотропия, соответствующая неотражающему кристаллу. Рассмотрен волновод, заполненный такой средой. Решена задача дифракции звука на малом шаре, который покрыт слоем, обеспечивающим сильное «сжатие» волн.

Согласование двух сред, как правило, возможно для данного угла падения звуковой волны. Коэффициент отражения для других углов тем больше, чем значительней относительный коэффициент преломления. Известно, что, усложняя структуру преломляющей среды, можно в принципе расширять область углов согласования, в пределе приближаясь к абсолютному согласованию [1]. Однако такой подход не позволяет указать, какая сильно преломляющая среда идеально согласована с однородной средой, содержащей падающую волну.

В данной работе показано, что существует такое соотношение параметров анизотропной однородной среды (акустического кристалла), при котором коэффициент отражения от кристалла равен тождественно нулю (при всех углах). Величина коэффициента преломления принципиально не ограничена. Этот неожиданный результат расширяет представление о способах согласования между средами и позволяет создать макроскопическую модель «черного тела», размеры которого могут быть сравнимы с длиной волны.

Задача работы – не только указать соотношение между параметрами неотражающего кристалла, но и выяснить, с каким свойством волновых уравнений связана возможность его существования.

Выберем систему единиц, в которой сжимаемость и плотность однородной среды, содержащей падающую волну, равны единице. Систему координат поместим так, чтобы плоскость $z=0$ совпадала с плоскостью раздела между средой изотропной ($z<0$) и анизотропной ($z>0$). Покажем, что если сжимаемость β акустического кристалла (в новых единицах) равна $1/\alpha$ и в кристалле есть «анизотропия плотности», тензор которой связан с α следующим образом:

$$\rho_{zz}=1/\alpha, \quad \rho_{xx}=\rho_{yy}=\alpha, \tag{1}$$

то коэффициент отражения от кристалла тождественно равен нулю. Тензорный характер плотности может порождаться, в частности, либо анизотропией сжимаемости, либо анизотропией скорости звука. Представляют интерес малые значения α, так что ниже рассматривается $\alpha<1$. Отметим, что условие $\beta/\rho_{zz}=1$ обеспечивает согласование при нормальном падении, а при условии $\rho_{xx}\beta=\rho_{yy}\beta=1$ «касательная» длина волны в кристалле совпадает с длиной волны в среде изотропной.

Рассмотрим гармонические поля с зависимостью от времени $e^{-i\omega t}$. Для проверки полного согласования кристалла с однородной средой достаточно указать волну в кристалле, «сшитую» на границе с падающей волной, давление в которой $\exp(ik_z z + i\mathbf{k}_\tau \mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ — вектор $(x, y, 0)$), $\mathbf{k}_\tau = (k_x, k_y, 0)$ — тангенциальная составляющая волнового вектора. Уравнения волн в анизотропном кристалле с параметрами (1) следующие:

$$\frac{i\omega p}{\alpha} = \nabla \mathbf{v}, \quad i\omega\alpha \mathbf{v}_\tau = \nabla_\tau p, \quad \frac{i\omega}{\alpha} v_z = \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{2}$$

Одной из возможных волн в кристалле является волна

$$\begin{aligned} p &= \exp\left(i\frac{k_z z}{\alpha} + i\mathbf{k}_\tau \mathbf{r}\right), \\ \mathbf{v}_\tau &= \frac{\mathbf{k}_\tau}{\alpha\omega} \exp\left(i\frac{k_z z}{\alpha} + i\mathbf{k}_\tau \mathbf{r}\right), \\ v_z &= \frac{k_z}{\omega} \exp\left(i\frac{k_z z}{\alpha} + i\mathbf{k}_\tau \mathbf{r}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{k}_\tau^2 + k^2 = \omega^2$ (связь $|\mathbf{k}|^2$ и ω^2 такая же, как и в однородной среде). Непосредственная проверка показывает, что волна (3) «сшита» с падающей волной, давление в которой $p = \exp(ik_z z + i\mathbf{k}_\tau \mathbf{r})$; действительно, давления на границе у обеих волн равны единице, а нормальные компоненты скорости k_z/ω. Таким образом, коэффициент отражения волны от поверхности кристалла тождественно равен нулю, и кристалл согласован с изотропной средой для произвольного угла падения.

Покажем, что этот эффект связан с инвариантностью волновых уравнений (с точностью до изменения сжимаемости β и «тензора плотности» ρ) при сжатии координаты $z/\alpha = z'$ в правом полупространстве $z > 0$ и при соответствующей замене давления и скорости. Если такая замена возможна, то при переходе от однородной среды во всем пространстве к анизотропной среде в правом полупространстве получим среду, которая акустически подобна среде однородной. Именно по этой причине не происходит отражения волн от кристалла, в котором, как мы будем говорить, происходит сжатие волн.

Для пояснения термина «сжатие волн» и с целью выяснения характера перехода от неотражающей анизотропной среды к акустически подобной однородной среде рассмотрим скалярную двумерную волновую задачу. Пусть колебания среды (типа мембраны) описываются волновыми уравнениями

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \quad (z < 0), \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{k^2}{\alpha} u = 0 \quad (z > 0) \end{aligned} \tag{4}$$

и условиями сшивки

$$u|_{z=-0} = u|_{z=+0}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=-0} = \alpha \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=+0}. \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что волна, падающая из левого полупространства на анизотропную среду в правом полупространстве, не отражается при любых углах. Величину u можно интерпретировать как амплитуду поперечных колебаний решетки осцилляторов на плоскости (z, x). Условия сшивки (5) есть условия непрерывности отклонений и силовых воздействий на границе $z=0$. При $z>0$ массы осцилляторов в $1/\alpha$ раз больше, чем массы осцилляторов слева. Коэффициенты жесткости их связей в условных единицах по оси z увеличены в $1/\alpha$ раз, а по оси x уменьшены в той же пропорции. Именно на этом основан принцип согласования между средами: вдоль оси z среды согласованы для случая нормального падения волны, а вдоль оси x длины волн совпадают.

Растянем правое полупространство в $1/\alpha$ раз: $z/\alpha = z'$. Тогда уравнения (4) перейдут в уравнения однородной среды как справа, так и слева, условия сшивки перейдут в условия непрерывности u и $\partial u/\partial z$. Это означает, что среда (4) подобна однородной среде, а волны в анизотропной среде сжаты по отношению к среде изотропной.

Рассмотрим аналогичное преобразование для акустических уравнений (2). Такой переход позволяет упрощать описание полей, так как структура полей в среде изотропной проще. Сделаем следующую замену в уравнениях (2). Растянем координату $z/\alpha = z'$, тангенциальные компоненты скорости уменьшим $\alpha \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v}_\tau'$, «сожмем» z-компоненту волнового вектора $\alpha k_z = k_z'$. У остальных компонент меняется только аргумент: $z = \alpha z'$. Уравнения (2) при этом преобразовании перейдут в уравнения звука в однородной среде; существенно, что условия сшивки на границе не изменяются.

Таким образом, в неотражающем кристалле (2) волны сжаты в $1/\alpha$ раз. По сравнению с акустически подобной ему средой вектор потока энергии $p\mathbf{v}$ прижимается в кристалле к границе раздела, в то время как волновой вектор прижимается к оси z.

При переходе к акустически подобной среде остаются инвариантными упругая энергия Π и кинетическая K (но не их плотности). Поэтому при замене $z' = z/\alpha$ получаем известное выражение для энергий гармонического поля ($\sim e^{-i\omega t}$) в анизотропной среде с параметрами $\beta = 1/\alpha$, $\rho_\tau = \alpha$, $\rho_z = 1/\alpha$ [2]:

$$\Pi = \int \frac{|p|^2}{4\alpha} dv, \quad K = \int \frac{\alpha}{4} \left| \frac{\partial p}{\partial z} \right|^2 dv + \int \frac{|\nabla_\tau p|^2}{4\alpha} dv. \tag{6}$$

Из эквивалентности неотражающего кристалла в среде однородной следует существенное свойство. Если слой анизотропной среды помещен внутрь волновода с жесткими или мягкими стенками (ось z направлена вдоль оси волновода), то при воображаемом растяжении граничные условия $p=0$ или $v_n=0$, как легко проверить, не изменяются. Таким образом, отрезок волновода с анизотропным заполнением эквивалентен подобному, в геометрическом смысле, отрезку волновода с изотропной средой, длина которого возросла в $1/\alpha$ раз.

Рассмотрим сжатие звуковых волн в искусственной анизотропной среде, что представляет наибольший интерес. Необходимую анизотропию плотности можно создать следующим образом. Поместим в жидкую среду с периодом Δl гибкие массивные пленки, поверхностная масса которых $\sigma \Delta l$. На границах пленки давление имеет разрыв, пропорциональный скорости жидкости в данной точке: $p|_{+0} - p|_{-0} = i\sigma \Delta l \omega v$. Параметры жидких слоев выбираем таким образом, чтобы длина волны в них совпадала с длиной падающей волны, т. е. $\rho = 1/\beta$ (плотность и сжимаемость однородной среды принимаются равными единице). При этом считаем, что плотность жидкого слоя ρ гораздо меньше плотности пленки, а σ совпадает с β:

$$\sigma = \beta = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{1}{\alpha^2} = \sigma\beta \gg 1. \tag{7}$$

Найдем уравнение для давления в эффективной анизотропной среде, предполагая, что толщина слоя Δl гораздо меньше «длины волны вдоль оси z». Разлагая давление $p(\mathbf{r}, z)$ в интеграл Фурье по координатам r, имеем следующую связь компонент $\tilde{p}(\varkappa, z)$ и $\tilde{p}(\varkappa, z+\Delta l)$ на границе слоя:

$$\begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \end{pmatrix}_{|z+\Delta l} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta l \\ -\Delta l (k^2 - \varkappa^2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Члены порядка $\sim(\Delta l)^2$ отброшены $((\Delta l)^2(k^2-\varkappa^2)\ll 1)$. По обеим сторонам массивной пленки производная $\partial\tilde{p}/\partial z$ непрерывна, а функция $\tilde{p}$ имеет разрыв:

$$(9)\qquad \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \dfrac{\partial\tilde{p}}{\partial z} \end{pmatrix}_{|\,z=+0} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta l\sigma\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \dfrac{\partial\tilde{p}}{\partial z} \end{pmatrix}_{|\,z=-0}.$$

Перемножая матрицы, входящие в преобразование (8), (9), и отбрасывая члены порядка $(\Delta l)^2$ $((\Delta l)^2k^2\sigma\beta\ll 1)$, получим матрицу локального преобразования на периоде слоистой среды:

$$(10)\qquad \begin{pmatrix} 1 & \Delta l(1+\sigma\beta) \\ -\Delta l(k^2-\varkappa^2) & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие $\sigma\beta\gg 1$ позволяет пренебречь поправкой в формуле (10) к $\sigma\beta$, так что в пределе получим уравнение

$$(11)\qquad \frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial z^2}+(k^2-\varkappa^2)\sigma\beta\tilde{p}=0.$$

При условии $\sigma\beta=1/\alpha^2$ из (11) следует волновое уравнение в анизотропной среде:

$$(12)\qquad \alpha^2\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\Delta_\tau p+k^2p=0,$$

которое совпадает с уравнением для давления в среде (2). Отсюда следует, что искусственная анизотропная среда описывается уравнениями (2), т. е. отражение от нее отсутствует, а волна внутри нее сжата в указанном выше смысле.

Уравнения (2) можно получить из общих формул для мелкослоистой среды, когда длина волны сдвига в одном из слоев гораздо меньше толщины слоя [1, 3]. Если толщина его и коэффициент сдвига малы, а плотности и коэффициент упругости велики, то такой слой однородной и изотропной среды можно считать гибкой массивной пленкой.

Как правило, считалось, что формулировка модели черной поверхности в рамках макроскопической теории невозможна. Существование анизотропной среды с указанными свойствами (когда k имеет малую мнимую часть k'') позволяет ввести понятие черной поверхности, так как толщину поглощающего слоя, пропорциональную величине α/k'', можно сделать сколь угодно малой при $\alpha\to 0$.

Для оценки эффектов дифракции на неплоской границе раздела с анизотропной средой представляет интерес задача рассеяния плоской волны на теле, которое покрыто поглощающим волны слоем. Предполагается, что толщина его l гораздо меньше размеров тела: $l\ll a$. Пусть в слое имеется малое поглощение $k=k'+ik''$, а эквивалентная толщина его гораздо больше эффективной длины поглощения волн. Рассмотрим в качестве примера низкочастотную задачу дифракции на шаре радиуса a.

Волновое уравнение для давления в анизотропной среде со сферической симметрией аналогично (12). Переходя в уравнении к сферическим координатам, для радиальной части сферической гармоники получим

$$(13)\qquad \begin{gathered} \alpha^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}p_{l,m}+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]p_{l,m}=0 \quad (0\leqslant r\leqslant a), \\ p_{l,m}|_{a+0}=p_{l,m}|_{a-0}, \quad \frac{\partial p_{l,m}}{\partial r}\bigg|_{a+0}=\alpha\frac{\partial p_{l,m}}{\partial r}\bigg|_{a-0}, \end{gathered}$$

где a — радиус шара. Произведем в (13) и (14) растяжение координаты r внутри шара, оставляя точку $r=a$ на месте: $(r-a)/\alpha\to r-a$. Тогда в пределе при $\alpha\to 0$ уравнение (13) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}p_{l,m}+\left(k^2-\frac{l(l+1)}{a^2}\right)p_{l,m}=0 \quad (-\infty\leqslant r\leqslant a),$$
$$p|_{a+0}=p|_{a-0},\quad \left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{a-0}=\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{a+0}. \tag{14}$$

Область изменения радиальной координаты внутри шара выбрана так, чтобы координата r менялась непрерывно при переходе из внешнего пространства внутрь шара.

Уравнение (14) есть волновое уравнение на поверхности цилиндра в четырехмерном пространстве, который перпендикулярен пространству физическому и сшит с ним по границе шара. В аналогичной двумерной задаче дифракции к границе круга на плоскости подклеивается перпендикулярный ему цилиндр в трехмерном пространстве.

Решениями уравнения (15) являются входящие внутрь тела волны вида $\exp\left(-i\sqrt{k^2-l(l+1)r/a^2}\right)$, так как волновое число имеет малую мнимую добавку. Гармоники с номерами $l(l+1)>(ka)^2$ не поглощаются шаром. Найдем амплитуду рассеяния и амплитуду внутренней волны при $l=0$. Для задачи низкочастотной дифракции существенны только эти волны. Из условий сшивки (14) вытекает, что амплитуда рассеяния при $(ka)\ll 1$ есть $ia(ka)$, а амплитуда внутренней волны равна единице. Таким образом, маленький поглощающий шарик рассеивает s-волну при $(ka)\ll 1$ как жесткий шарик; сечение поглощения его равно площади поверхности шарика:

$$\sigma_{\text{рас}}=\frac{4\pi a^2}{9}(ka)^4,\quad \sigma_{\text{погл}}=4\pi a^2. \tag{15}$$

В заключение отметим, что покрытое указанным поглощающим слоем тело нельзя считать идеальной моделью черного тела по следующим причинам. Гармоники с номерами выше некоторого не поглощаются телом. Полость с подобными стенками не эквивалентна свободному пространству. Для уменьшения эффектов отражения параметры анизотропной среды необходимо подбирать специальным образом в зависимости от кривизны поверхности тела.

Автор глубоко признателен М. А. Исаковичу и М. А. Миронову за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М., «Наука», 1973, стр. 57.
2. *Исакович М. А.* Общая акустика. М., «Наука», 1973.
3. *Рытов С. М.* Акустические свойства мелкослоистой среды. Акуст. ж., 1956, *2*, 1, 71—83.

Московский радиотехнический институт
Академии наук СССР

Поступила
9 декабря 1977 г.
После повторного исправления
28 марта 1978 г.