

УДК 534.121.1

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД В ДИНАМИКЕ ТВЕРДЫХ
НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДОВ

Ю. Б. Свиридов

Рассмотрен новый вариационный метод решения дифракционных задач для нерегулярных твердых волноводов, обладающих дефектами достаточно широкого класса. Общее рассмотрение метода проведено на примере решения задачи о дифракции волн Лэмба на дефекте типа раковины. Рассмотрен вопрос о сходимости метода и приведены результаты численного решения задач о рассеянии a_0 - и s_0 -волн Лэмба на вертикальной трещине. На основе рассчитанных коэффициентов рассеяния даны практические рекомендации по использованию полученных результатов в ультразвуковой дефектоскопии тонколистовых изделий.

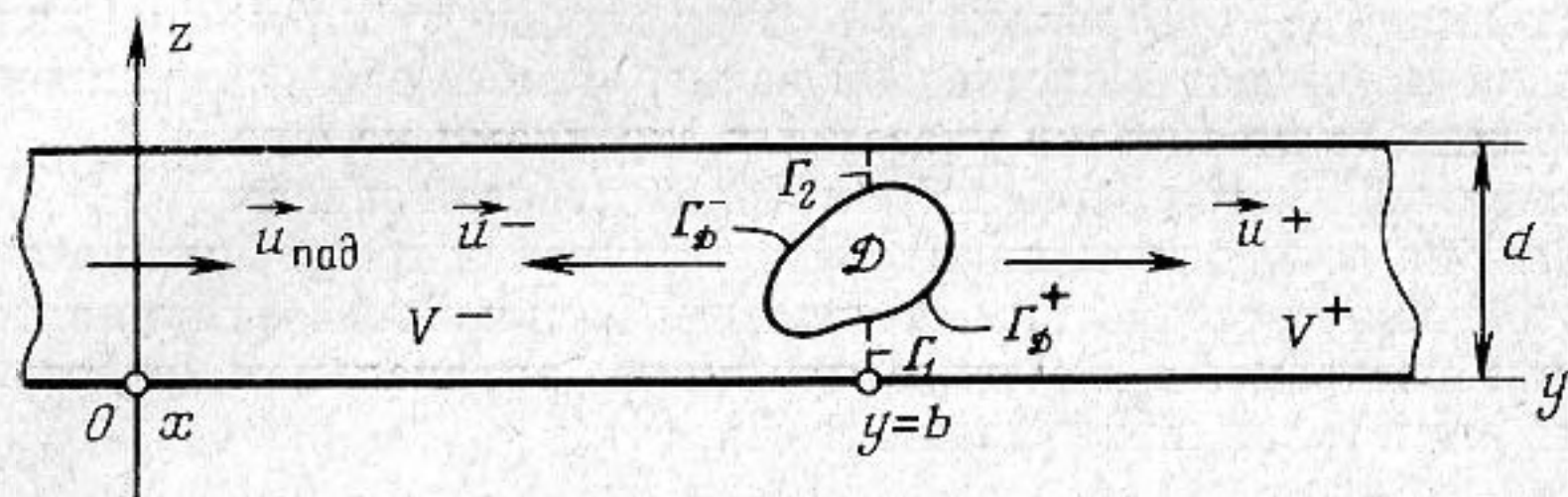
Проблема рассеяния нормальных волн (в частности, волн Лэмба [1, 2]) на внутренних дефектах твердых волноводов относится к числу труднейших в математической теории дифракции. В то же время она является одной из ключевых в ультразвуковой дефектоскопии тонкостенных изделий (пластин, труб, оболочек), которая существенно использует эти волны [1]. Объясняется это тем, что наличие дефекта максимально приближает теоретическую модель акустического тракта дефектоскопа к условиям эксперимента и тем самым позволяет математически исследовать поведение волн Лэмба в этом тракте. Однако присутствие дефекта сильно затрудняет аналитическое решение задачи. Эти затруднения обусловлены, во-первых, сложным видом области, в которой разыскивается решение, во-вторых, сложностью граничных условий на поверхности дефекта и, в-третьих, неортогональностью волн Лэмба на толщине пластины [2]. Указанные обстоятельства приводят к тому, что известные аналитические методы решения дифракционных задач (метод интегрального преобразования Фурье [3], метод эластодинамических потенциалов [4]) здесь оказываются неэффективными, так как приводят к весьма сложным системам сингулярных интегральных уравнений. Вследствие сильной осцилляции полей мало пригодными оказываются также конечно-разностные методы.

Учитывая сказанное, легко понять, почему исследованию рассеяния волн Лэмба на дефектах пластины посвящено относительно мало работ. Из известных публикаций на эту тему следует назвать работы [5–7]. Несмотря на важность результатов, полученных в этих работах, необходимо отметить, что использованные в них методы имеют сравнительно ограниченную сферу применимости. В частности, метод Винера — Хопфа [5, 6] применим, строго говоря, лишь к полубесконечным структурам, а метод возмущений [7] ограничен случаем малых по сравнению с длиной волны размеров дефектов. Например, для практически интересных дефектов типа раковины или вертикальной трещины, размеры которых больше либо сравнимы с длиной падающей волны, оба упомянутых метода неприменимы.

От указанных выше недостатков свободны вариационные методы [8–11], которые позволяют строить эффективные приближенные (а иногда и точные) решения разнообразных задач математической теории дифракции

[3, 12–15]. Однако в данном случае классические вариационные методы (Ритца, Трэфтца, наименьших квадратов), основанные на использовании квадратичных функционалов, трудноприменимы ввиду большой сложности краевой задачи.

Ниже для решения задач о дифракции упругих нормальных волн на внутренних дефектах пластины развивается новый вариационный метод, основанный на применении специального билинейного функционала, тесно связанного с граничными условиями на поверхности дефекта. Возможности этого метода не ограничены характером краевой задачи (скалярным или векторным), а также степенью сложности формы дефекта и граничных условий, и поэтому он применим для нерегулярных волноводов достаточно



Фиг. 1. Модель волновода, принятая для решения задачи

широкого класса. Прежде чем рассмотреть существо метода, перейдем к постановке краевой задачи.

Для простоты рассмотрим двумерную стационарную задачу дифракции. Условимся, как обычно [3, 4], придавать физический смысл вещественным частям комплексных векторных амплитуд полей, предварительно умноженных на временной фактор $e^{-i\omega t}$ ($\omega = 2\pi f$ — циклическая частота колебаний, t — время), который для краткости записи будем всюду опускать. Предполагаем, что материал пластины однороден и изотропен, а поглощение звука в нем отсутствует. В качестве дефекта (\mathcal{D}) возьмем раковину, граница которой $\Gamma_{\mathcal{D}} = \Gamma_{\mathcal{D}}^+ + \Gamma_{\mathcal{D}}^-$ (фиг. 1) свободна от напряжений. Предположим, что граница $\Gamma_{\mathcal{D}}$ принадлежит классу кусочно-гладких кривых; в остальном форма дефекта достаточно произвольна. Допустим, что из области $y < 0$ на дефект падает волна Лэмба, заданная вектором смещения $\mathbf{u}_{\text{пад}}$ (фиг. 1). Требуется рассчитать поля в пластине, возникшие в результате дифракции падающей волны на дефекте.

Обозначим через V^+ и V^- области пластины, лежащие соответственно справа и слева от контуров $\Gamma^+ = \Gamma_1 + \Gamma_{\mathcal{D}}^+ + \Gamma_2$ и $\Gamma^- = \Gamma_1 + \Gamma_{\mathcal{D}}^- + \Gamma_2$ (фиг. 1). Векторы смещения рассеянных полей в этих областях обозначим через \mathbf{u}^+ и \mathbf{u}^- .

Дадим теперь математическую формулировку краевой задачи, описывающей дифракцию лэмбовской волны на дефекте. Векторы смещения в рассеянных полях должны удовлетворять уравнениям Ламэ:

$$(1) \quad \mu \Delta \mathbf{u}^{\pm} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u}^{\pm} + \rho \omega^2 \mathbf{u}^{\pm} = 0, \quad \mathbf{r} \in V^{\pm},$$

где λ и μ — константы Ламэ, ρ — плотность материала пластины, $\mathbf{r} = \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$ — радиус-вектор в системе координат Oyz (фиг. 1), $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Краевые условия имеют следующий вид. На поверхностях пластины:

$$(2a) \quad (\mathbf{T}_{\text{пад}} + \mathbf{T}^-) |_{z=0, d} = 0, \quad y \leq b,$$

$$(2б) \quad \mathbf{T}^+ |_{z=0, d} = 0, \quad y \geq b,$$

на границах Γ^- и Γ^+ :

$$(3) \quad \{\mathbf{T}^- + \mathbf{T}_{\text{пад}} - \mathbf{T}^+ [\chi(\Gamma_1) + \chi(\Gamma_2)]\} |_{\Gamma^-} = 0,$$

$$(4a) \quad (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}_{\text{пад}} - \mathbf{u}^-) |_{\Gamma_1 + \Gamma_2} = 0,$$

$$(4b) \quad \mathbf{T}^+ |_{\Gamma_{\infty}^+} = 0.$$

Здесь $\mathbf{T} |_{\Gamma}$ — вектор напряжения на границе Γ , соответствующий вектору смещения \mathbf{u} ; $\chi(\Gamma) \equiv \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \Gamma \\ 0, & \mathbf{r} \notin \Gamma \end{cases}$. При вычислении напряжений на границах

Γ^- и Γ^+ областей V^- и V^+ используются соответственно внешняя и внутренняя нормали (\mathbf{n}^- и \mathbf{n}^+).

Уравнения (1)–(4) дополним следующими условиями излучения [3, 4]: поля \mathbf{u}^{\pm} представляют собой волны Лэмба, распространяющиеся в направлениях, схематически указанных стрелками на фиг. 1.

Эффективный метод решения векторной краевой задачи (1)–(4) может быть развит на основе вариационной формулировки граничных условий (3), (4). С этой целью рассмотрим следующий билинейный функционал, который можно построить с помощью принципа виртуальной работы [16], применяя его к граничным условиям (3), (4):

$$(5) \quad Q = \int_{\Gamma^-} \{\mathbf{T}^- + \mathbf{T}_{\text{пад}} - \mathbf{T}^+ [\chi(\Gamma_1) + \chi(\Gamma_2)]\} \tilde{\mathbf{u}}^- ds + \\ + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}_{\text{пад}} - \mathbf{u}^-) \tilde{\mathbf{T}}^+ ds + \int_{\Gamma_{\infty}^+} \mathbf{T}^+ \tilde{\mathbf{u}}^+ ds,$$

где ds — дифференциал длины дуги контура Γ .

Функционал (5) определен на векторах $\mathbf{u}^{\pm} |_{\Gamma^{\pm}}$, $\mathbf{T}^{\pm} |_{\Gamma^{\pm}}$, $\tilde{\mathbf{u}}^{\pm} |_{\Gamma^{\pm}}$, $\tilde{\mathbf{T}}^+ |_{\Gamma^+}$, являющихся элементами соответствующих гильбертовых пространств $L_2^{\mathbf{u}}(\Gamma^{\pm})$, $L_2^{\mathbf{T}}(\Gamma^{\pm})$, $L_2^{\tilde{\mathbf{u}}}(\Gamma^{\pm})$, $L_2^{\tilde{\mathbf{T}}}(\Gamma^+)$.

Предположим, что векторы \mathbf{u}^{\pm} в областях V^{\pm} удовлетворяют уравнениям (1) и условиям излучения, а на границах $z=0$ и $z=d$ ($|y| \leq \infty$) — уравнениям (2). Относительно векторов $\tilde{\mathbf{u}}^{\pm}$ будем считать, что они удовлетворяют краевым условиям (2), хотя в областях V^{\pm} не обязаны удовлетворять уравнениям (1) и условиям излучения.

Вариационная формулировка уравнений (3), (4) основана на том, что эти уравнения представляют собой необходимые и достаточные условия стационарности функционала * Q при произвольных вариациях векторов $\tilde{\mathbf{u}}^{\pm} |_{\Gamma^{\pm}}$ и $\tilde{\mathbf{T}}^+ |_{\Gamma^+}$. Чтобы показать это, приравняем нулю вариацию функционала (5) на элементах пространств $L_2^{\mathbf{u}}(\Gamma^{\pm})$ и $L_2^{\tilde{\mathbf{T}}}(\Gamma^+)$, предполагая, что векторы $\mathbf{u}^{\pm} |_{\Gamma^{\pm}} \in L_2^{\mathbf{u}}(\Gamma^{\pm})$ и $\mathbf{T}^{\pm} |_{\Gamma^{\pm}} \in L_2^{\mathbf{T}}(\Gamma^{\pm})$ произвольны, но фиксированы. Используя формулу (5), приходим к следующему вариационному уравнению:

$$(6) \quad \delta Q = \int_{\Gamma^-} \{\mathbf{T}^- + \mathbf{T}_{\text{пад}} - \mathbf{T}^+ [\chi(\Gamma_1) + \chi(\Gamma_2)]\} \delta \tilde{\mathbf{u}}^- ds + \\ + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}_{\text{пад}} - \mathbf{u}^-) \delta \tilde{\mathbf{T}}^+ ds + \int_{\Gamma_{\infty}^+} \mathbf{T}^+ \delta \tilde{\mathbf{u}}^+ ds = 0,$$

где δ означает операцию варьирования Q на векторах $\tilde{\mathbf{u}}^{\pm} |_{\Gamma^{\pm}}$ и $\tilde{\mathbf{T}}^+ |_{\Gamma^+}$. Отсюда, учитывая произвольность векторов $\delta \tilde{\mathbf{u}}^- |_{\Gamma^-}$, $\delta \tilde{\mathbf{T}}^+ |_{\Gamma_1 + \Gamma_2}$ и $\delta \tilde{\mathbf{u}}^+ |_{\Gamma_{\infty}^+}$, на основании известной леммы вариационного исчисления [17] получаем уравнения (3), (4).

Стационарность функционала Q на решениях \mathbf{u}^{\pm} краевой задачи (1)–(4) позволяет использовать для приближенного отыскания этих решений

* В отличие от квадратичных билинейные функционалы могут достигать лишь стационарных значений, но не экстремальных.

один из прямых методов вариационного исчисления, в частности метод Ритца [10, 11]. Согласно этому методу, введем следующие конечномерные аппроксимации полей:

$$(7) \quad \mathbf{u}^{\pm} \approx \mathbf{u}_N^{\pm} = \sum_{m=1}^N u_m^{\pm} \mathbf{f}_m^{\pm}, \quad \mathbf{r} \in V^{\pm},$$

$$(8) \quad \tilde{\mathbf{u}}^{\pm} \approx \tilde{\mathbf{u}}_N^{\pm} = \sum_{m=1}^N \tilde{u}_m^{\pm} \mathbf{f}_m^{\pm}, \quad \mathbf{r} \in V^{\pm},$$

где u_m^{\pm} и \tilde{u}_m^{\pm} — коэффициенты разложений (7), (8); \mathbf{f}_m^{\pm} — элементы некоторых полных систем линейно-независимых векторных функций (базисов), удовлетворяющие в областях V^{\pm} уравнениям (1) и условиям излучения, а на границах $z=0$ и $z=d$ ($|y| \leq \infty$) — уравнениям (2). При построении базисов $\{\mathbf{f}_m^{\pm}\}$ целесообразно использовать векторы смещений лэмбовских волн, удовлетворяющие указанным выше требованиям [1, 2] *.

Применяя операторы напряжения [4]

$$L_T^{\pm} = \lambda \mathbf{n}^{\pm} \operatorname{div} + \mu (\mathbf{n}^{\pm} \times \operatorname{rot}) + 2\mu \frac{\partial}{\partial n^{\pm}}$$

к векторам (7) и (8) на границах Γ^{\pm} , находим

$$(9) \quad \mathbf{T}^{\pm}|_{\Gamma^{\pm}} \approx \mathbf{T}_N^{\pm}|_{\Gamma^{\pm}} = \sum_{m=1}^N u_m^{\pm} \mathbf{g}_m^{\pm},$$

$$(10) \quad \tilde{\mathbf{T}}^{\pm}|_{\Gamma^{\pm}} \approx \tilde{\mathbf{T}}_N^{\pm}|_{\Gamma^{\pm}} = \sum_{m=1}^N \tilde{u}_m^{\pm} \mathbf{g}_m^{\pm},$$

где

$$\mathbf{g}_m^{\pm} = L_T^{\pm}[\mathbf{f}_m^{\pm}]|_{\Gamma^{\pm}}.$$

Подставляя выражения (7) — (10) в формулу (6) и учитывая произвольность вариаций $\delta \tilde{u}_m^{\pm}$, мы получаем следующую систему $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов u_m^{\pm} :

$$(11) \quad \int_{\Gamma^{-}} \{\mathbf{T}_N^{-} + \mathbf{T}_{\text{пад}} - \mathbf{T}_N^{+} [\chi(\Gamma_1) + \chi(\Gamma_2)]\} \mathbf{f}_k^{-} ds = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} (\mathbf{u}_N^{+} - \mathbf{u}_{\text{пад}} - \mathbf{u}_N^{-}) \mathbf{g}_k^{+} ds + \int_{\Gamma_{\infty}^{+}} \mathbf{T}_N^{+} \mathbf{f}_k^{+} ds = 0,$$

или в развернутой записи:

$$(12) \quad \sum_{m=1}^N \alpha_{km} u_m^{+} - \beta_{km} u_m^{-} = \alpha_k, \quad k=1, 2, \dots, N,$$

$$\sum_{m=1}^N \gamma_{km} u_m^{+} - \delta_{km} u_m^{-} = \beta_k,$$

* Заметим, что разложения (8) можно было бы провести по элементам любых других базисов $\{\Psi_m^{\pm}\}$, удовлетворяющих краевым условиям (2). Однако здесь наиболее удобны базисы $\{\mathbf{f}_m^{\pm}\}$, так как для данной задачи они являются естественными.

где

$$\alpha_{km} = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \mathbf{f}_k^- \mathbf{g}_m^+ ds, \quad \beta_{km} = \int_{\Gamma^-} \mathbf{f}_k^- \mathbf{g}_m^- ds,$$

$$\gamma_{km} = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \mathbf{f}_m^+ \mathbf{g}_k^+ ds + \int_{\Gamma_2^+} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{g}_m^+ ds,$$

$$\delta_{km} = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \mathbf{f}_m^- \mathbf{g}_k^+ ds,$$

$$\alpha_k = \int_{\Gamma^-} \mathbf{T}_{\text{пад}} \mathbf{f}_k^- ds, \quad \beta_k = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \mathbf{u}_{\text{пад}} \mathbf{g}_k^+ ds.$$

Можно показать, что в силу линейной независимости векторов $\mathbf{f}_m^\pm|_{\Gamma^\pm}$ и \mathbf{g}_m^\pm система (12) всегда имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера. Найдя коэффициенты u_m^\pm и подставив их в разложения (7), получим приближенное решение краевой задачи (1)–(4).

Рассмотрим кратко сходимость данного вариационного метода. Ввиду большой сложности этого вопроса ограничимся качественными рассуждениями. Во-первых, из физических соображений следует, что точные решения \mathbf{u}^\pm краевой задачи (1)–(4) должны содержать бесконечные счетные множества волн Лэмба, которые могут существовать в однородной и изотропной пластине со свободными границами. Это дает основание надеяться, что с увеличением N точность приближенных решений \mathbf{u}_N^\pm будет возрастать.

Во-вторых, систему (11) можно рассматривать как условие равенства нулю $2N$ обобщенных моментов [18] выражений, входящих в уравнения (3), (4), относительно базисных векторов $\mathbf{f}_k^\pm|_{\Gamma^\pm}$ и \mathbf{g}_k^+ ($k=1, 2, \dots, N$). Из определения слабой сходимости в гильбертовом пространстве [19, 20] и свойств векторов $\mathbf{f}_k^\pm|_{\Gamma^\pm}$ и \mathbf{g}_k^+ следует, что система (11) при $N \rightarrow \infty$ становится эквивалентной граничным условиям (3), (4). Отсюда вытекает, что последовательности

$$\{\mathbf{u}_N^\pm|_{\Gamma^\pm}\} \in L_2^u(\Gamma^\pm) \quad \text{и} \quad \{\mathbf{T}_N^\pm|_{\Gamma^\pm}\} \in L_2^T(\Gamma^\pm)$$

при $N \rightarrow \infty$ будут слабо сходиться к своим предельным элементам (обобщенным решениям [19, 20]) $\mathbf{u}^\pm|_{\Gamma^\pm}$ и $\mathbf{T}^\pm|_{\Gamma^\pm}$, удовлетворяющим условиям (3), (4), причем из факта слабой сходимости к обобщенному решению может, при определенных условиях [19, 20], следовать и сильная сходимость к нему, т. е. сходимость по норме в $L_2^u(\Gamma^\pm)$ и $L_2^T(\Gamma^\pm)$. Кроме того, при дополнительных условиях [19, 20] обобщенное решение задачи (1)–(4) будет совпадать с классическим. Более детальное исследование вопроса о сходимости возможно, по-видимому, лишь в рамках общей теории проекционных методов решения операторных уравнений [18].

Из уравнений (12) следует, что $u_m^\pm \equiv u_m^\pm(N)$. Допустим, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty, m \in [1, N]} \{u_m^\pm(N)\} \rightrightarrows u_m^\pm(\infty) \quad (|u_m^\pm(\infty)| < \infty).$$

Тогда, перейдя к пределу при $N \rightarrow \infty$ в системе (12) и предположив ее разрешимость, а также сходимость рядов (7), получим обобщенное решение краевой задачи (1)–(4):

$$(13) \quad \mathbf{u}^\pm = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{u}_N^\pm = \sum_{m=1}^{\infty} u_m^\pm(\infty) \mathbf{f}_m^\pm, \\ \mathbf{r} \in V^\pm.$$

На практике, однако, решать систему (12) при $N \rightarrow \infty$ довольно сложно. Поэтому обычно прибегают к конечномерным аппроксимациям (7). Скорость сходимости последовательностей приближенных решений $\{\mathbf{u}_N^\pm\}$ к своим предельным элементам \mathbf{u}^\pm практически можно оценить, сравнивая между собой результаты расчета при $N=N_0$ и $N=N_0+1$ ($N_0=1, 2, \dots$).

Для иллюстрации изложенного метода рассмотрим результаты приближенного решения задач о рассеянии a_0 - и s_0 -волн Лэмба на вертикальной трещине со свободными границами $\Gamma_{\mathcal{D}}^-(y=b-0, d-H \leq z \leq d)$ и $\Gamma_{\mathcal{D}}^+(y=b+0, d-H \leq z \leq d; H - \text{глубина трещины})$. В качестве базисных использовались векторы смещения a_0 - и s_0 -волн. Волны высших номеров, в том числе и сильнозатухающие с мнимыми и комплексными волновыми числами [2], не учитывались. Вычисления проводились при одномерной ($N=1$) и двумерной ($N=2$) аппроксимациях. Для рассеянных полей были найдены следующие выражения. При одномерных аппроксимациях:

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{пад}} &= u_{a,s_0} \mathbf{f}_{a,s_0}^{\mp} & \mathbf{r} \in V^-, \\ \mathbf{u}_1^+ &= u_{a,s_0} \mathcal{K}_{a,s_0}^+ \mathbf{f}_{a,s_0}^+ & \mathbf{r} \in V^+, \\ \mathbf{u}_1^- &= u_{a,s_0} \mathcal{K}_{a,s_0}^- e^{i2k_{a,s_0}b} \mathbf{f}_{a,s_0}^- & \mathbf{r} \in V^-; \end{aligned}$$

при двумерных аппроксимациях:

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{пад}} &= u_{a,s_0} \mathbf{f}_{a,s_0}^+ & \mathbf{r} \in V^-, \\ \mathbf{u}_2^+ &= u_{a,s_0} \mathcal{K}_{a_0a_0, s_0s_0}^+ \mathbf{f}_{a,s_0}^+ + u_{a,s_0} \mathcal{K}_{a_0s_0, s_0a_0}^+ e^{i(k_{a,s_0} - k_{s,a_0})b} \mathbf{f}_{s,a_0}^+ & \mathbf{r} \in V^+, \\ \mathbf{u}_2^- &= u_{a,s_0} \mathcal{K}_{a_0a_0, s_0s_0}^- e^{i2k_{a,s_0}b} \mathbf{f}_{a,s_0}^- + \\ &+ u_{a,s_0} \mathcal{K}_{a_0s_0, s_0a_0}^- e^{i(k_{a,s_0} + k_{s,a_0})b} \mathbf{f}_{s,a_0}^- & \mathbf{r} \in V^-, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{a_0}^\pm &= e^{\pm ik_{a_0}y} (\mathbf{e}_y f_{y_{a_0}} \pm \mathbf{e}_z i f_{z_{a_0}}), \\ \mathbf{f}_{s_0}^\pm &= e^{\pm ik_{s_0}y} (\mathbf{e}_y f_{y_{s_0}} \mp \mathbf{e}_z i f_{z_{s_0}}), \end{aligned}$$

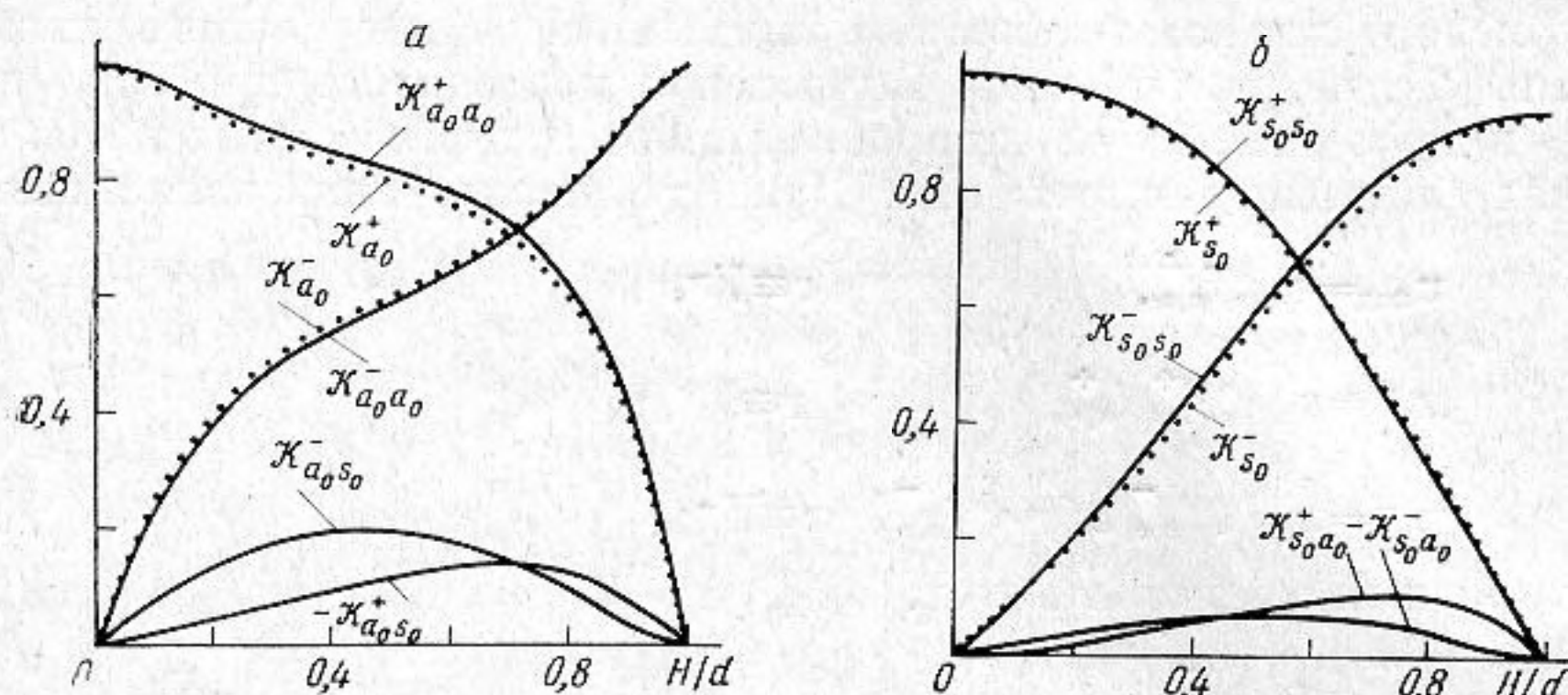
$k_{a,s_0} = \omega/c_{a,s_0}$, c_{a,s_0} — фазовая скорость a , s_0 — волны Лэмба. К сожалению, громоздкость выражений $f_{y,z_{\alpha,\beta}}$, $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}^\pm$ и $\mathcal{K}_{\alpha\beta}^\pm$ ($\alpha, \beta = a, s_0$) не позволяет привести их здесь в явном виде.

Из формул (14) и (15) следует, что величины $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}^\pm$ и $\mathcal{K}_{\alpha\beta}^\pm$ ($\alpha, \beta = a, s_0$) имеют смысл амплитудных коэффициентов рассеяния (или коэффициентов прохождения, отражения и трансформации) соответственно при одномерных и двумерных аппроксимациях полей. С точки зрения приложений основной интерес представляют собой зависимости коэффициентов рассеяния от глубины трещины H при $fd = \text{const}$. Численный расчет этих коэффициентов в зависимости от H проводился для стальной пластины ($c_l = 5,94 \text{ МГцмм}$, $c_t = 3,22 \text{ МГцмм}$, $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$) толщиной $d = 1 \text{ мм}$ при частоте колебаний $f = 1 \text{ МГц}$. Значение $fd = 1 \text{ МГцмм}$ специально было выбрано таким, чтобы в пластине могли распространяться лишь две незатухающие волны Лэмба: a_0 и s_0 . При выборе большего значения fd для достижения хорошей точности расчета потребовались бы, вообще говоря, более сложные аппроксимации рассеянных полей (трехмерные, четырехмерные и т. д.). Численный расчет был проведен на ЭВМ ЕС-1030; машинное время составило около 3 мин. Результаты расчета представлены в виде графиков на фиг. 2.

Из формул (14), (15) следует, что при падении на трещину a , s_0 -волны ее вектор смещения при прохождении дефекта не меняет направления вращения по эллипсу поляризации. При отражении волны от дефекта направление вращения этого вектора заменяется на противоположное.

Отметим, что рассеянные волны другого типа, $(s, a)_0^+$ и $(s, a)_0^-$, имеют также взаимно противоположные направления вращения векторов смещения.

Из фиг. 2 видно, что коэффициенты прохождения и отражения a_0 -волны имеют больше точек перегиба, чем соответствующие коэффициенты s_0 -волны. Объясняется это, по-видимому, более сложным распределением смещений и напряжений у a_0 -волны по толщине пластины. Характер поведения этих коэффициентов при изменении H нетрудно понять, если учесть распределение смещений у a_0 - и s_0 -волн при малых fd [1].



Фиг. 2. Графики коэффициентов прохождения, отражения и трансформации, иллюстрирующие процессы рассеяния a_0 (а) и s_0 (б) волн Лэмба на дефекте пластины типа вертикальной трещины; $fd=1$ МГц·мм

Отметим, что коэффициенты трансформации a , s_0 -волны имеют противоположные знаки, а в граничной точке $H=d$ обращаются в нуль. Последнее обстоятельство легко усмотреть из соображений симметрии дефекта при $H=d$. Интересно также отметить, что точки пересечения коэффициентов прохождения и отражения и модулей коэффициентов трансформации коррелируют между собой. Причем эти точки для a_0 -волны расположены вблизи значения $H=0,7d$, а для s_0 -волны — вблизи значения $H=0,5d$. Значения коэффициентов прохождения и отражения a , s_0 -волны в точках их пересечения приблизительно равны 0,7.

Сравнение пунктирных и сплошных кривых (фиг. 2) показывает, что даже простейшая (одномерная) аппроксимация позволяет достаточно хорошо описать процессы прохождения и отражения a , s_0 -волны от дефекта типа вертикальной трещины. Дополнительный учет трансформации энергии падающей волны в рассеянные волны другого типа в данном случае сравнительно слабо влияет на коэффициенты прохождения и отражения (относительное изменение составляет не более 4%). Столь незначительное отличие в коэффициентах рассеяния, полученных при одномерных и двумерных аппроксимациях, свидетельствует о том, что в данной задаче скорость сходимости вариационного метода при расчете функционалов типа $\mathcal{K}_{\alpha\beta}^{\pm}$ достаточно высока. Что же касается самих полей u_N^{\pm} , то их сходимость к u^{\pm} , по-видимому, будет менее быстрой. Это обстоятельство хорошо известно в теории вариационных методов и в конкретных задачах [3, 9–15] проявляется в том, что погрешности при расчете функционалов (в особенности стационарных) бывают, как правило, существенно меньше, чем при расчете функций.

Рассчитанные коэффициенты рассеяния a , s_0 -волны можно использовать при разработке оптимальных методик контроля и оценки размеров одиночных дефектов типа вертикальной трещины (при $fd=1$ МГц·мм). Очевидно, для достижения высокой чувствительности контроля и малой погрешности измерения глубины дефекта целесообразно использовать лишь наиболее крутые участки зависимостей коэффициентов прохожде-

ния и отражения от H . Так, при использовании волны a_0 (фиг. 2, а) для контроля дефекта любой глубины ($0 \leq H \leq d$) удобным является эхо-метод (по коэффициенту отражения). Для контроля глубоких трещин ($d/2 \leq H \leq d$) приемлем также теневой метод (по коэффициенту прохождения). В случае s_0 -волны (фиг. 2, б) неглубокие трещины ($0 \leq H \leq d/2$) целесообразно выявлять с помощью эхо-метода, а глубокие — с помощью теневого.

Развитый вариационный метод, по-видимому, может быть обобщен и на трехмерные краевые задачи, а также на случай числа дефектов больше одного. Он может быть применен также для решения дифракционных задач акустики и электродинамики. Метод допускает эффективную численную реализацию на ЭВМ, так как сводит решение весьма сложной краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. Применение данного метода к практическим задачам ультразвуковой дефектоскопии позволит, вероятно, вплотную приблизиться к решению проблемы разработки эффективных методик неразрушающего контроля качества тонколистовых изделий.

В заключение автор благодарит И. А. Викторова и В. В. Тюткина за общую постановку проблемы, а Ю. Н. Швецова за помощь в проведении численных расчетов на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М., «Наука», 1966.
2. Микер Т., Мейтцлер А. Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках. В кн.: Физическая акустика, т. 1, ч. А, под ред. У. Мэзона. М., «Мир», 1966, 140—203.
3. Хёня Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
4. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963.
5. Меркулов Л. Г., Розлин С. И. Дифракция волн Лэмба в пластине на полубесконечном разрезе. Дефектоскопия, 1969, 4, 24—36.
6. Меркулов Л. Г., Розлин С. И. Прохождение волн Лэмба через участок пластины с расслоением. Дефектоскопия, 1970, 3, 13—22.
7. Меркулов Л. Г., Фирсов И. П. Рассеяние упругих нормальных волн в пластине с двумерным распределением поверхностных неровностей. Акуст. ж., 1970, 16, 1, 110—115.
8. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1, 2. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
9. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
10. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
11. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
12. Левин Л. Современная теория волноводов. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
13. Никольский В. В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М., «Наука», 1967.
14. Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток. М., «Мир», 1974.
15. Вычислительные методы в электродинамике. Под ред. Р. Митры. М., «Мир», 1977.
16. Новацкий В. Теория упругости. М., «Мир», 1975.
17. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
18. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Ругицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М., «Наука», 1969.
19. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., «Наука», 1973.
20. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., «Наука», 1976.

Институт математики
с Вычислительным центром
Академии наук МССР

Поступила
23 февраля 1978 г.
После доработки
20 сентября 1978 г.