

препятствует уменьшению расстояния между кинетическими элементами соседних цепей при понижении температуры, уменьшая тем самым эффективность межмолекулярного взаимодействия.

Меньшая эффективность межмолекулярного взаимодействия в стеклообразном состоянии у исходного полисульфона, имевшего более густую сетку зацеплений, приводит к тому, что в широком интервале температур ($T < T_c$) он имеет более высокие механические потери ($\text{tg } \delta$ выше), чем отожженный полисульфон, сетка зацеплений у которого более редкая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Перепечко И. И. Акустические методы исследования полимеров, М., «Химия», 1973.
2. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
3. Насонов А. Д., Перепечко И. И. Докл. IX Всесоюз. акуст. конф., М., 1977.

Московский автомеханический институт

Поступила
12 октября 1978 г.

УДК 532.29:532.28

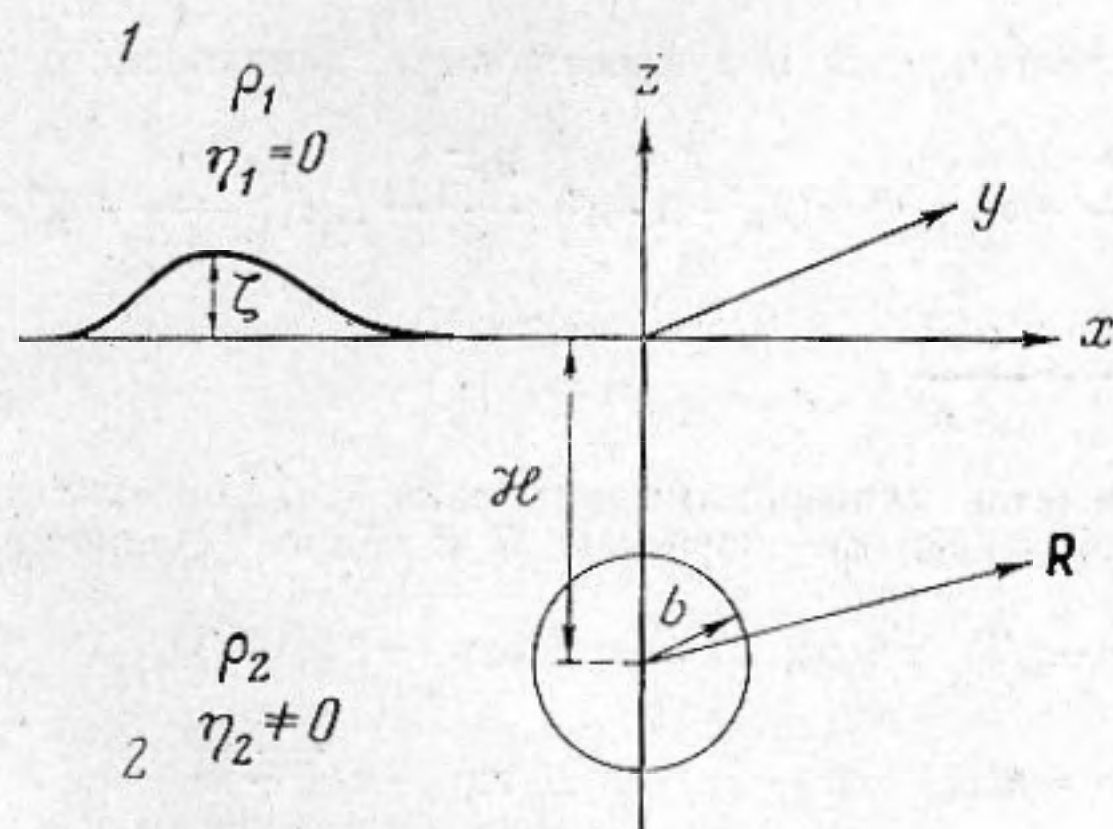
ДВИЖЕНИЕ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПУЗЫРЬКА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ПОЛУПРОСТРАНСТВА НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Т. Х. Седелников

Рассмотрим пузырек, пульсирующий в вязкой несжимаемой жидкости вблизи границы полупространства, заполненного идеальной несжимаемой жидкостью (фигура). Потенциал в этом полупространстве ищем в виде [1]

$$(1) \quad \Phi^{(1)}(r, z) = \int_0^{\infty} \xi \Phi^{(1)}(\xi, z) J_0(\xi r) d\xi;$$

$$\Phi^{(1)}(\xi, z) = A(\xi) \exp(-z\xi).$$



Расчетная схема

Давление и нормальная скорость на границе будут

$$(2) \quad p = p_0 - \rho_1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} + \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right);$$

$$\mathcal{P}(\xi, 0) = p_0 + i\omega \rho_1 \left(1 + \frac{\alpha \xi^3}{\rho_1 \omega^2} \right) A(\xi);$$

$$(3) \quad v_z^{(1)}(\xi, 0) = -\xi A(\xi),$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения. Исключая $A(\xi)$, находим граничное условие для полупространства, заполненного вязкой жидкостью:

$$(4) \quad \Sigma_{zz}(\xi, z) = -p_0 + \frac{i\omega\rho_1}{\xi} \left(1 + \frac{\alpha\xi^3}{\rho_1\omega^2} \right) v_z(\xi, z) \quad \text{при } z=0.$$

Решение для последнего ищем в следующем виде:

$$(5) \quad \mathbf{v}(\mathbf{R}) = [\text{Grad } \varphi + \text{rot rot}(\mathbf{n}f)] \exp(-i\omega t),$$

где \mathbf{n} — единичный вектор вдоль оси z , а потенциалы $\varphi(\mathbf{R})$ и $f(\mathbf{R})$ подчиняются уравнениям:

$$(6) \quad \Delta\varphi = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2 \right) \Phi = 0,$$

$$(7) \quad \Delta(\Delta + \kappa^2)f = 0; \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2 + \kappa^2 \right) \mathcal{F} = 0,$$

$$(8) \quad \kappa = (1+i)\delta = (1+i)\sqrt{\omega\rho_2/2\eta_2}.$$

Касательное напряжение на границе

$$(9) \quad \sigma_{rz} = \eta_2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \eta_2 \frac{\partial}{\partial r} \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \Delta f \right)$$

должно быть равно нулю, что приводит к соотношению

$$(10) \quad 2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2} + \xi^2 \mathcal{F} = 0 \quad \text{при } z=0.$$

Напряжение по оси z имеет вид

$$(11) \quad \Sigma_{zz}(\xi, z) = -p_0 - \eta_2 \left[\kappa^2 \Phi - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + (\Delta + \kappa^2) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - 2\xi^2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \right],$$

а скорость по оси z

$$(12) \quad v_z(\xi, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \xi^2 \mathcal{F}.$$

Второе граничное условие для полупространства, заполненного вязкой жидкостью, принимает вид

$$(13) \quad \left(2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \kappa^2 \right) \Phi + (2\xi^2 - \Delta - \kappa^2) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = \Lambda \kappa^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \xi^2 \mathcal{F} \right) \quad \text{при } z=0,$$

$$(14) \quad \Lambda = \frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\alpha\xi^3}{\rho_2\omega^2}.$$

Потенциал φ вызывается пульсациями пузырька (φ_1), проскальзыванием пузырька относительно жидкости (f_2) со скоростью U и общим движением жидкости (f_3):

$$(15) \quad \varphi_1(\mathbf{R}) = -q/R, \quad \Phi_1(\xi, z) = -q/\xi \exp(-\xi(z+\mathcal{H})),$$

$$(16) \quad \mathcal{F}_3(\xi, z) = \mathcal{B}(\xi) \exp(-\xi z) + C(\xi) \exp(-z\sqrt{\xi^2 - \kappa^2}).$$

Последнее — с учетом условий на бесконечности. Пользуясь методами работы [1] можно получить:

$$(17) \quad \frac{\partial f_2}{\partial R} = D \left(\frac{1}{i\kappa R} + \frac{1}{\kappa^2 R^2} \right) e^{i\kappa R} + \frac{E}{R^2}, \quad D = Ub\beta; \quad E = U \frac{b^3}{2} \gamma,$$

$$(18) \quad \beta = \exp(-i\kappa b) \left(1 - \frac{i\kappa b}{3} \right)^{-1}; \quad \gamma = 1 - \frac{3}{\kappa^2 b^2} \left(1 + \frac{i}{\kappa b} \right) \left(1 + \frac{3i}{\kappa b} \right)^{-1},$$

$$(19) \quad \mathcal{F}_2(\xi, z) = -\frac{D}{\kappa^2 \sqrt{\xi^2 - \kappa^2}} \exp(-(z+\mathcal{H})\sqrt{\xi^2 - \kappa^2}) - \frac{E}{\xi} \exp(-\xi(z+\mathcal{H})).$$

Скорость проскальзывания пузырька относительно жидкости, движущейся со скоростью v , есть

$$(20) \quad U = \frac{2}{\varepsilon} v, \quad \varepsilon = 1 - \frac{18}{\kappa^2 b^2} \left(1 + \frac{l}{\kappa b}\right) \left(1 + \frac{3i}{\kappa b}\right)^{-1}.$$

Граничные условия при $z=0$ позволяют определить \mathcal{B} и C :

$$(21) \quad \mathcal{B} + C \left(1 - \frac{\kappa^2}{2\xi^2}\right) = D \left(1 - \frac{\kappa^2}{2\xi^2}\right) \frac{\exp(-\mathcal{H}\sqrt{\xi^2 - \kappa^2})}{\kappa^2 \sqrt{\xi^2 - \kappa^2}} + \\ + \left(E - \frac{q}{\xi}\right) \frac{\exp(-\mathcal{H}\xi)}{\xi},$$

$$(22) \quad \mathcal{B} + C \frac{2\xi\sqrt{\xi^2 - \kappa^2} - \Lambda\kappa^2}{2\xi^2 - (1+\Lambda)\kappa^2} = -D \frac{2\xi\sqrt{\xi^2 - \kappa^2} + \Lambda\kappa^2}{2\xi^2 - (1+\Lambda)\kappa^2} \frac{\exp(-\mathcal{H}\sqrt{\xi^2 - \kappa^2})}{\kappa^2 \sqrt{\xi^2 - \kappa^2}} - \\ - \left(E - \frac{q}{\xi}\right) \frac{2\xi^2 + (\Lambda-1)\kappa^2}{2\xi^2 - (1+\Lambda)\kappa^2} \frac{\exp(-\mathcal{H}\xi)}{\xi}.$$

Скорость в точке нахождения пузырька будет

$$(23) \quad v(0, \mathcal{H}) = \int_0^\infty \xi^3 [\mathcal{B}(\xi) \exp(-\xi\mathcal{H}) + C(\xi) \exp(-\mathcal{H}\sqrt{\xi^2 - \kappa^2})] d\xi.$$

Подставляя сюда выражения для \mathcal{B} и C , находим

$$(24) \quad U = -qw,$$

$$(25) \quad w = \frac{\mathcal{L}_1}{2\mathcal{H}^2} \left(\varepsilon - \frac{b^3\gamma}{4\mathcal{H}^3} \mathcal{L}_2 - \frac{b\beta}{\mathcal{H}} \mathcal{L}_3 \right)^{-1},$$

$$(26) \quad \mathcal{L}_1 = 1 - 4\mathcal{H}^2 \int_0^\infty \xi (\kappa^2 - 2\xi^2) \theta(\xi) \exp(-\xi\mathcal{H}) d\xi,$$

$$(27) \quad \mathcal{L}_2 = 1 - 4\mathcal{H}^3 \int_0^\infty \xi^2 (\kappa^2 - 2\xi^2) \theta(\xi) \exp(-\xi\mathcal{H}) d\xi,$$

$$(28) \quad \mathcal{L}_3 = (1 - 2i\kappa\mathcal{H}) \frac{\exp(2i\kappa\mathcal{H})}{4\kappa^2\mathcal{H}^2} + \frac{2\mathcal{H}}{\kappa} \int_0^\infty \xi^4 \theta(\xi) \exp(-\mathcal{H}\sqrt{\xi^2 - \kappa^2}) d\xi,$$

$$(29) \quad \theta(\xi) = 2 \frac{2\xi^2 \exp(-\mathcal{H}\sqrt{\xi^2 - \kappa^2}) + (\kappa^2 - 2\xi^2) \exp(-\xi\mathcal{H})}{\kappa^4 + \kappa^4\Lambda - 4\xi^3\sqrt{\xi^2 - \kappa^2} + (2\xi^2 - \kappa^2)^2}.$$

Средняя сила, действующая на пузырек:

$$(30) \quad Q = -^2/3\pi\rho_2 |q|^2 \operatorname{Re} w,$$

обращается в нуль при $\operatorname{Re} w = 0$, т. е. при условии

$$(31) \quad \operatorname{Re} \mathcal{L}_1 \operatorname{Re} \varepsilon + \operatorname{Im} \mathcal{L}_1 \operatorname{Im} \varepsilon = \frac{b^3}{4\mathcal{H}^3} [\operatorname{Re} \mathcal{L}_1 (\operatorname{Re} \gamma \operatorname{Re} \mathcal{L}_2 - \operatorname{Im} \gamma \operatorname{Im} \mathcal{L}_2) + \\ + \operatorname{Im} \mathcal{L}_1 (\operatorname{Re} \gamma \operatorname{Im} \mathcal{L}_2 + \operatorname{Im} \gamma \operatorname{Re} \mathcal{L}_2)] + \\ + \frac{b}{\mathcal{H}} [\operatorname{Re} \mathcal{L}_1 (\operatorname{Re} \beta \operatorname{Re} \mathcal{L}_3 - \operatorname{Im} \beta \operatorname{Im} \mathcal{L}_3) + \operatorname{Im} \mathcal{L}_1 (\operatorname{Re} \beta \operatorname{Im} \mathcal{L}_3 + \operatorname{Im} \beta \operatorname{Re} \mathcal{L}_3)].$$

Наиболее интересен случай малой вязкости ($|\kappa| \mathcal{H} \gg 1$) и малого поверхностного натяжения:

$$(32) \quad \mathcal{L}_1 \cong \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} - i \frac{12\rho_1\rho_2\nu}{(\rho_1 + \rho_2)^2 \omega \mathcal{H}^2} + \frac{6\alpha\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2 \omega^2 \mathcal{H}^3}, \quad \nu = \frac{\eta_2}{\rho_2},$$

$$(33) \quad \mathcal{L}_2 \cong \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} - i \frac{24\rho_1\rho_2\nu}{(\rho_1 + \rho_2)^2 \omega \mathcal{H}^2} + \frac{15\alpha\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2 \omega^2 \mathcal{H}^3},$$

величина \mathcal{L}_3 экспоненциально мала. Поскольку $b/\mathcal{H} \ll 1$, то «стационарный» уровень пульсации определяется приближенным соотношением

$$(34) \quad \operatorname{Re} \mathcal{L}_1 \operatorname{Re} \varepsilon + \operatorname{Im} \mathcal{L}_1 \operatorname{Im} \varepsilon \cong 0.$$

Отсюда

$$(35) \quad \frac{9(2b^2\delta^2 + 4b\delta + 3)}{b\delta(2b^3\delta^3 + 6b^2\delta^2 + 9b\delta + 18)} \cong \frac{1}{2\nu} \left[\frac{\omega \mathcal{H}^2 (\rho_1^2 - \rho_2^2)}{6\rho_1\rho_2} + \frac{\alpha}{\rho_1 \omega \mathcal{H}} \right].$$

Для очень малых пузырьков ($b\delta \ll 1$)

$$(36) \quad b \cong 25 \frac{\nu^{3/2}}{\omega^{3/2} \mathcal{H}^2} \left(\frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1\rho_2} + \frac{6\alpha}{\rho_1 \omega^2 \mathcal{H}^3} \right)^{-1},$$

а для несколько больших ($b\delta \gg 1$)

$$(37) \quad b \cong 15 \frac{\nu}{\omega \mathcal{H}} \left(\frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1\rho_2} + \frac{6\alpha}{\rho_1 \omega^2 \mathcal{H}^3} \right)^{-1/2}.$$

Мы видим, что при $\rho_1 > \rho_2$ величина b очень мала, а при $\rho_1 < \rho_2$ возможен случай равновесия и для сравнительно больших пузырьков.

Автор признателен М. А. Исаковичу и С. А. Недужему за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1953.

Московский институт управления
им. С. Орджоникидзе

Поступила
3 января 1978 г.
После доработки
29 мая 1978 г.

УДК 534.231

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СКОРОСТИ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ПОЛОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ, СЖАТОМ ОСЕВЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Ю. Д. Сергеев

В работе [1] было получено в низкочастотном приближении выражение для скорости продольных волн в полом цилиндрическом стержне из резиноподобного материала в жесткой скользящей обойме. В работе [2] это выражение было уточнено. В последующих работах [3, 4] было вычислено изменение скорости продольных волн в упомянутом стержне, сжатом осевым давлением, путем определения изменения статического модуля его упругости. При этом пренебрегалось нелинейностью соотношений между тензорами деформации и напряжения, что справедливо, вообще говоря, только при малых деформациях. Этого приближения можно избежать, если для определения модуля упругости воспользоваться методом расчета больших деформаций резиноподобных стержней, изложенным в работе [5].

Рассмотрим деформацию полого стержня под действием осевого усилия P в соответствии с фиг. 1. Внешняя его поверхность радиально закреплена точно так же, как и в задаче, рассмотренной в упомянутых работах [1-4]. Предполагается, что торцевые поверхности стержня в радиальном направлении проскальзывают без