

УДК 534.222

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЛИНЕЙНО-ОГРАНИЧЕННЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ПУЧКОВ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИЗЛУЧАТЕЛЯХ

*С. Н. Гурбатов, И. Ю. Демин, А. М. Сутин*

Изложена теория параметрических излучателей со сферическими первичными пучками, работающих в режиме нелинейного насыщения волн накачки. Получены соотношения, определяющие низкочастотное поле для различных видов модуляции первичного пучка. Показано, что при высоких интенсивностях накачки диаграмма направленности излучателя по низкой частоте  $\Omega$  совпадает с диаграммой направленности по высокой частоте  $\omega$ , а коэффициент полезного действия достигает своего максимального значения, не превышающего отношения  $\Omega^2/\omega^2$ .

Как известно, эффективность параметрических излучателей растет с увеличением интенсивности первичного пучка. В настоящее время созданы излучатели настолько мощные, что в их первичной волне образуются разрывы и, следовательно, существенную роль играет нелинейное затухание [1, 2]. Нелинейное затухание учитывалось в основном в рамках модели Вестервельта для плоского первичного пучка [2-4]. Однако при разработке параметрических излучателей низких частот возникают трудности в создании плоского пучка большой длины и поэтому широкое распространение получили параметрические излучатели, использующие взаимодействие расходящихся сферических пучков. Такие системы обычно рассматривались при малых числах Рейнольдса, когда в первичной волне разрывы не образуются [5]. Лишь в работе [6] дана оценка поля параметрических излучателей при больших числах Рейнольдса исходя из предположения, что эффективный размер антенны ограничен расстоянием образования разрыва.

В данной работе мы рассмотрим параметрические излучатели в режиме насыщения со сферическими пучками и определим его основные характеристики для различных типов модуляции высокочастотного пучка.

Пусть первичная высокочастотная волна имеет медленную амплитудную и частотную модуляцию. Тогда давление  $p$  в волне вблизи плоского излучателя можно записать в виде

$$(1) \quad p = \mathcal{P}_0 f(t) \sin(\omega_0 t + \psi(t)),$$

где  $f(t)$  — плавная функция, описывающая амплитудную модуляцию,  $\psi(t)$  — фаза волны. При этом будем считать, что амплитуда  $f(t)$  и частота  $\omega(t) = \omega_0 \varphi(t)$  ( $\varphi(t) = 1 + \psi'_t / \omega_0$ ) медленно меняются на периоде волны, т. е.  $|\omega_0 f'_t| \ll 1$ ,  $|\omega_0 \varphi'_t| \ll 1$ .

Пусть первичная модулированная волна создается плоским излучателем площадью  $S$ , причем его мощность не слишком велика, и вплоть до расстояния, равного конфокальному параметру  $a = S/\lambda$  ( $\lambda = 2\pi c/\omega$  — длина волны), нелинейными искажениями можно пренебречь, т. е.

$$(2) \quad \sigma_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\varepsilon \mathcal{P}_0 a}{\rho c^2} \ll 1.$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $c$  — скорость звука,  $\epsilon = (\gamma + 1)/2$  — параметр нелинейности среды. Тогда на сфере радиуса  $a$  имеем расходящуюся модулированную волну с амплитудой, определяемой из линейной дифракционной теории. В предположении медленности изменения амплитуды и частоты, а также малости девиации частоты для давления имеем

$$(3) \quad p(r=a) = \mathcal{P}_0 D(\theta) f(t) \sin(\omega_0 t + \Psi(t)),$$

где  $D(\theta)$  — линейная диаграмма направленности излучателя. Нас интересует случай больших чисел Рейнольдса, т. е.  $2\epsilon \mathcal{P}_0 / \omega_0 b \gg 1$ .

Тогда на расстоянии  $r_p = a \exp(1/\sigma_0)$  в волне образуются разрывы и становится существенным нелинейное затухание [7]. Рассмотрим режим работы параметрических излучателей, когда диаграмма направленности вторичного излучения определяется дифракцией первичного пучка. Как показано в работе [5], для этого должно выполняться условие  $\Omega L / \omega \gg a$ , где  $L$  — характерное расстояние затухания,  $\Omega$  — характерная частота низкочастотной волны. В данном случае характерным расстоянием нелинейного затухания можно считать расстояние образования разрыва. При выполнении этого условия расходимость низкочастотного поля меньше расходимости высокочастотного, и задача сводится к рассмотрению одномерной (сферической) модулированной волны, распространение которой описывается уравнением простой волны [7]

$$(4) \quad \frac{\partial V}{\partial \sigma} - V \frac{\partial V}{\partial \tau} = 0,$$

где  $V = pr / \mathcal{P}_0 a$  — нормированное давление в волне,  $\sigma = \sigma_0 \ln(r/a)$  — безразмерная координата,  $\tau = \omega_0(t - r/c)$ . Естественно искать решение уравнения (4) в виде суммы высокочастотной первичной  $V_p$  и низкочастотной вторичной  $V_s$  компонент поля. Подставляя в это уравнение  $V = V_p + V_s$ , усредняя его по высокочастотному периоду  $2\pi/\omega$  (так, что  $\langle V_p \rangle = 0$ ,  $\langle V_s \rangle = V_s$ ) и пренебрегая нелинейными искажениями низкочастотной волны, получим

$$(5) \quad V_s(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\sigma \frac{\partial}{\partial \tau} \langle V_p^2(\tau, \sigma) \rangle d\sigma.$$

Поскольку модуляция медленная, то закон изменения  $\langle V_p^2(\tau, \sigma) \rangle$  для каждого периода волны такой же, как закон изменения интенсивности гармонической волны с учетом образования разрывов, т. е.

$$(6) \quad \langle V_p^2(\tau, \sigma) \rangle = g(\xi) D^2(\theta) f^2(\tau) / 2,$$

$$\xi = \sigma f(\tau) \varphi(\tau) D(\theta).$$

Здесь  $\xi$  — приведенная координата для данного участка волны, а функция  $g(\xi)$  описывает спадание интенсивности за счет нелинейного затухания:

$$(7) \quad g(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{z_*} \sin^2 z (1 + \xi \cos z) dz =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{2} z_* - \frac{1}{4} \sin 2z_* + \frac{\xi}{3} \sin^3 z_* \right].$$

Здесь  $z_*$  определяется из уравнения

$$(8) \quad \pi - z_* = \xi \sin z_*.$$

Интенсивность гармонической волны может быть выражена также через нормированную амплитуду разрыва  $V_m$  [8], если учесть, что  $V_m = \sin z_*$  и то, что  $z_* = \pi$  при  $\xi \leq 1$  (8).

Для того чтобы найти низкочастотную волну  $V_s(\tau)$ , необходимо провести интегрирование выражения (5). При нахождении вторичного поля в параметрических излучателях, ограниченных насыщением, использовались различные аппроксимации зависимости интенсивности высокочастотного поля от расстояния [2—4], что может привести как к количественным, так и к качественным ошибкам при определении низкочастотного поля. В данном случае мы получим точное выражение для низкочастотной волны. Переходя в (5) к интегрированию по  $\xi$ , используя выражение для  $g(\xi)$  в интегральной форме (7), после замены порядка интегрирования в двойном интеграле имеем из (5) — (8)

$$(9) \quad V_s(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{f(\tau) D(\theta) G[\sigma f(\tau) \varphi(\tau) D(\theta)]}{\varphi(\tau)} \right],$$

$$(10) \quad G[\xi] = \int_0^{\xi} g(\xi') d\xi' = \frac{1}{2\pi} \left[ 2(\pi - z.) \cos z. + 2 \sin z. - \frac{1}{2} \sin z. (\pi - z.)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\xi z.}{2} - \frac{\xi \sin 2z.}{4} + \frac{\xi^2}{6} \sin^3 z. \right],$$

где  $z.$  — по-прежнему корень уравнения (8). Для выяснения предельных режимов работы параметрических излучателей полезно знать вид функции  $G[\xi]$  при  $\xi \leq 1$ , т. е. в области до образования разрывов, и при  $\xi \gg 1$  — в области развитых разрывов. Из формул (8), (10) получаем

$$(11) \quad G[\xi] = \begin{cases} \frac{1}{4}\xi, & \xi \leq 1, \\ 1 - \pi^2/6\xi, & \xi > 5. \end{cases}$$

В этих предельных случаях для  $V_s(\tau)$  имеем

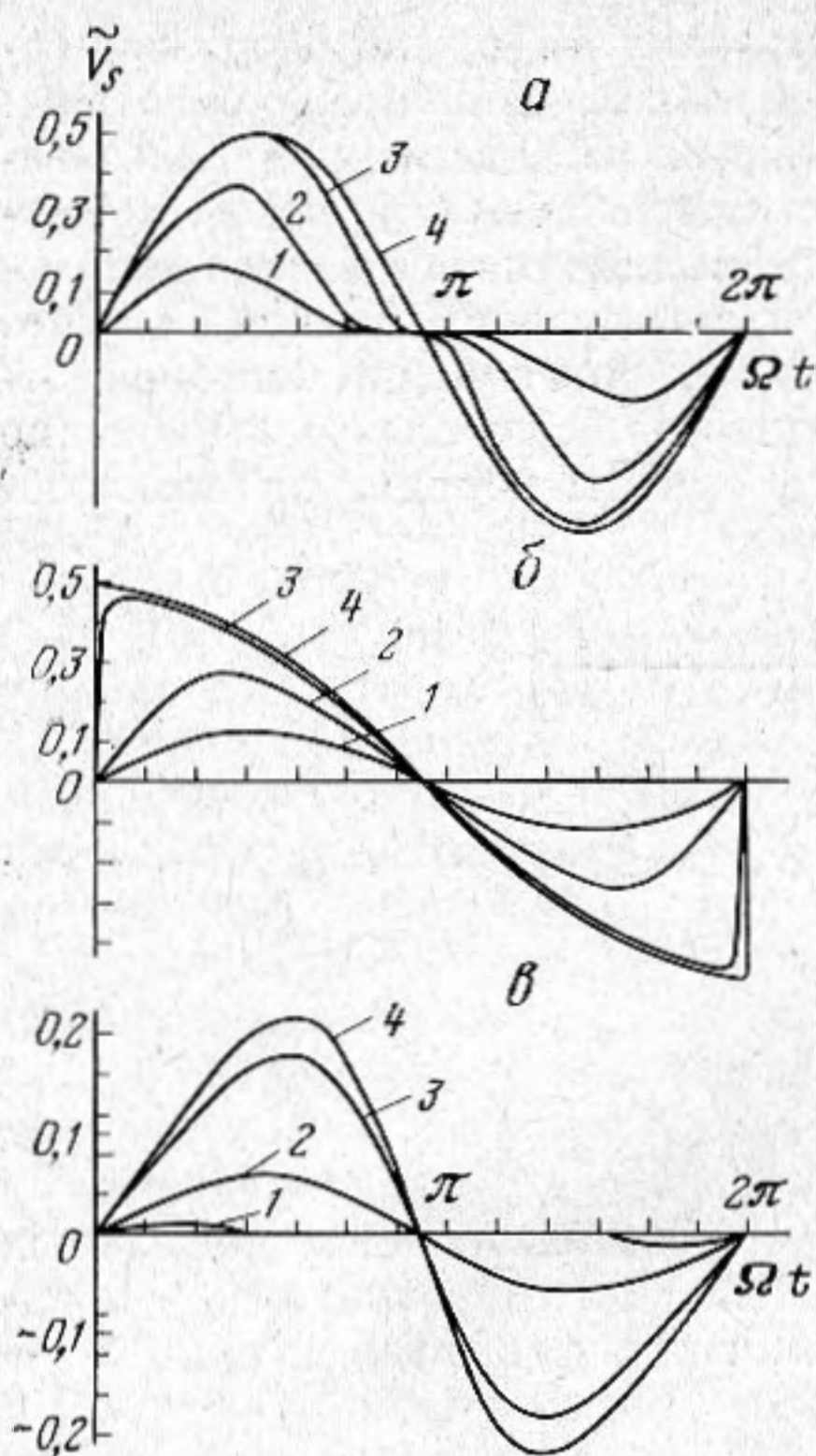
$$(12) \quad V_s(\tau) = \begin{cases} f_{\tau}' D^2(\theta) \sigma / 2, & \xi \leq 1, \\ \left( \frac{f}{\varphi} \right)_{\tau}' D(\theta), & \xi \gg 1. \end{cases}$$

Таким образом, в области до образования разрывов вклад в низкочастотное поле дает лишь амплитудная модуляция, а частотная модуляция не приводит к генерации низкочастотных волн. На достаточно больших расстояниях от излучателя форма волны почти везде (за исключением областей, где амплитуда  $f(t)$  обращается в нуль) пропорциональна производной  $(f/\varphi)_{\tau}'$ , что количественно согласуется с результатами работ [9—11], где были получены асимптотические выражения для низкочастотной волны из условия сохранения импульса на периоде волны, а также на основе точного решения уравнения Бюргерса — решения Коула — Хопфа. Следует, однако, отметить, что выход  $V_s(\tau)$  на асимптотику происходит достаточно медленно с увеличением  $\sigma$ . Так, из формулы (11) видно, что даже при  $\xi = 10$   $G[\xi] \approx 0,85$ , что на 15% меньше асимптотического значения, равного единице.

В общем случае для определения низкочастотного поля необходимо пользоваться выражением (9). Для амплитудно-модулированного сигнала (АМ)  $\varphi(\tau) \equiv 1$  и частотно-модулированного сигнала (ЧМ)  $f(\tau) \equiv 1$  из (9) имеем соответственно:

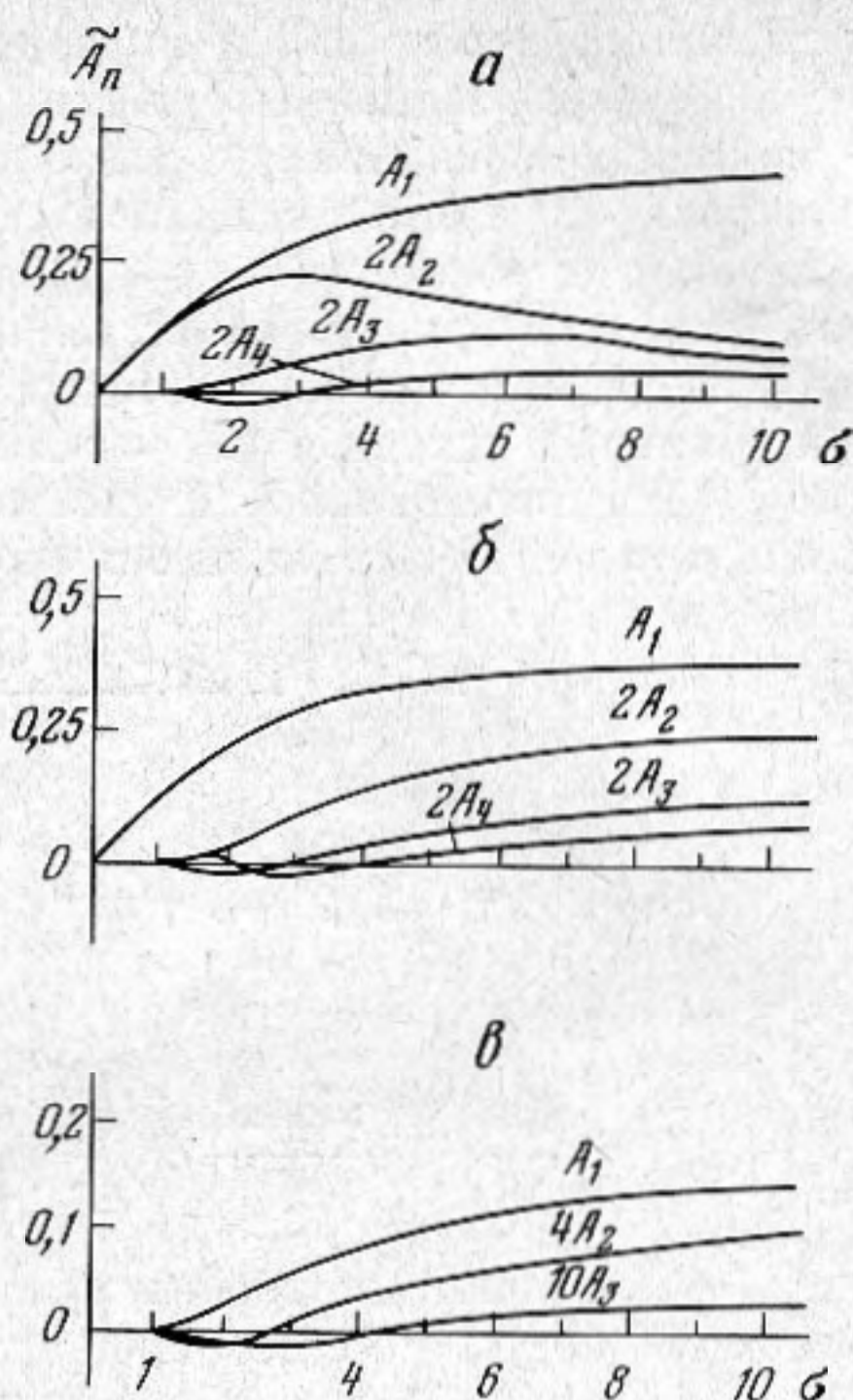
$$(13) \quad V_s(\tau) = f_{\tau}' D(\theta) [G(\xi) + \xi g(\xi)]; \quad \xi = \sigma f D(\theta);$$

$$(14) \quad V_s(\tau) = -\frac{\varphi_{\tau}'}{\varphi^2} D(\theta) [G(\xi) - \xi g(\xi)].$$



Фиг. 1

Фиг. 1. Форма низкочастотной волны  $V_s = V_s \omega_0 / \Omega D(\theta)$ : а — амплитудно-модулированный сигнал (АМ), б — бигармонический сигнал (БГ), в — частотно-модулированный сигнал (ЧМ). Параметр  $\sigma D = 1; 3; 20; \infty$  — кривые 1—4



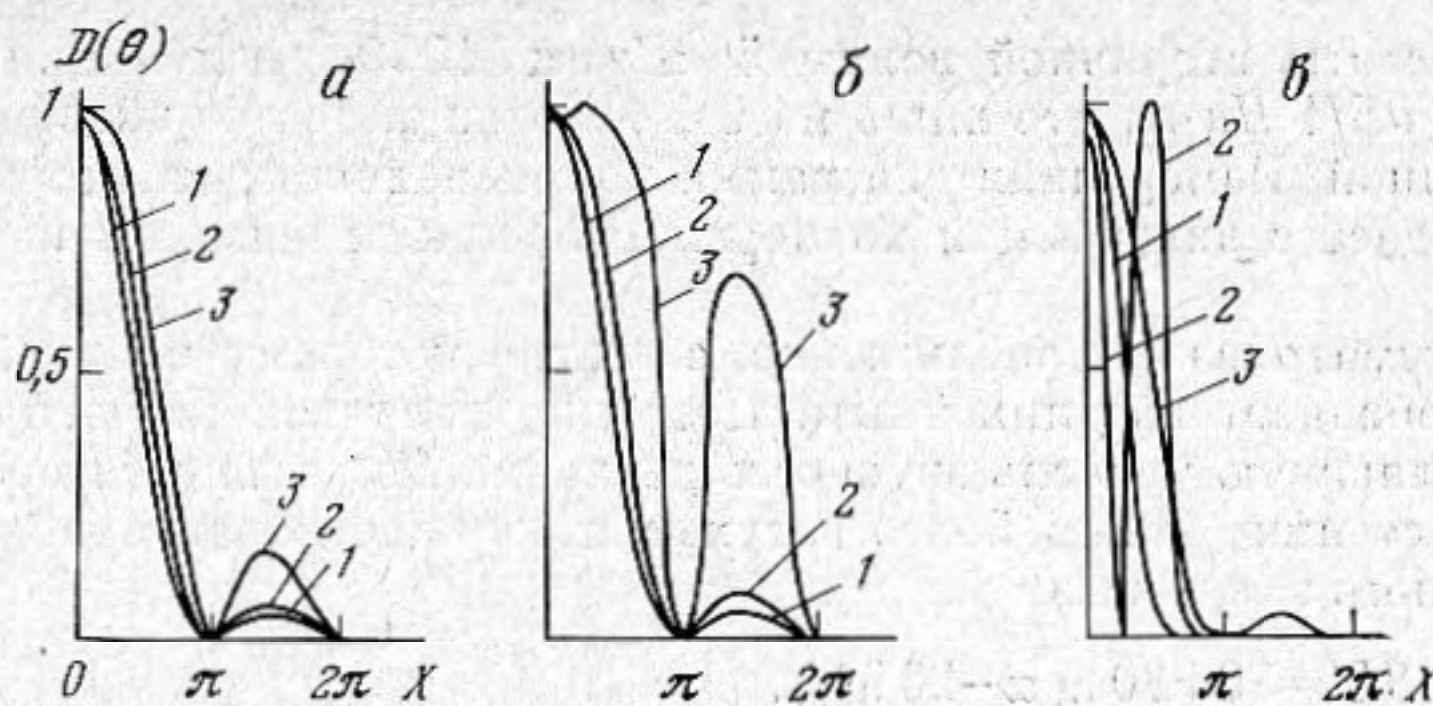
Фиг. 2

Фиг. 2. Поведение гармоник низкочастотной волны  $\tilde{A}_n = A_n \omega_0 / \Omega D(\theta)$  для трех видов модуляции АМ (а), БГ (б), ЧМ (в)

Формулы (9) — (14) дают точную связь поля на низкой частоте с параметрами модулированной высокочастотной волны. Функции  $G$  и  $g$  зависят от переменной  $z_*$ , которая является корнем трансцендентного уравнения (8). Это уравнение легко решается стандартными численными методами. В работе рассчитаны форма волны и поведение гармоник низкочастотного поля для различных видов модуляции: а) АМ-волна  $f(t) = 0,5(1 - \cos \Omega t)$ , б) бигармоническая (БГ) волна  $f(t) = |\sin(\Omega t / 2)|$ , в) ЧМ-волна  $\varphi(t) = 1 + \alpha \cos \Omega t$ ,  $\alpha = 0,2$ . Полученные результаты представлены на фиг. 1, 2.

Обсудим особенности поведения формы и гармоник низкочастотного поля, а также проведем некоторые аналитические оценки. При достаточно больших  $\sigma$  форма волны асимптотически стремится к  $f'_\tau$  и  $(1/\varphi)_\tau'$  соответственно, а коэффициент полезного действия антенны стремится к максимальному значению  $\eta = \beta \Omega^2 / \omega_0^2$ . Здесь коэффициент  $\beta$  зависит от вида модуляции и легко может быть рассчитан на основе (12) для каждого конкретного случая. Следует отметить, что в этом случае вторичное поле при гармонической первичной волне формально содержит разрывы, точнее участки достаточно резкого по сравнению с  $2\pi/\Omega$  изменения поля. Однако вблизи нулей огибающей, где  $\xi \lesssim 2$ , форма волны уже не является производной от огибающей (см. выражение (13)), и поэтому резкий участок имеет конечную длительность, которая может быть оценена как  $T \lesssim 4/\sigma D(\theta)\Omega$ .

При частотной модуляции низкочастотная волна, как видно из (12), (14), появляется при  $\sigma D(\theta)\varphi(\tau) > 1$ . Пусть частота волны меняется по



Фиг. 3. Диаграмма направленности низкочастотного излучения для прямоугольного излучателя ( $D(\theta) = \sin X/X$ ,  $X = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$ ) при значениях

$\sigma = 1,5; 3; 20$  (кривые 1-3), а — по основной гармонике АМ-сигнала, б — по второй гармонике АМ-сигнала, в — по второй гармонике ЧМ-сигнала

синусоидальному закону  $\varphi(\tau) = 1 + \alpha \cos \Omega t$ . Тогда при  $1 / (1 + \alpha) \leq \sigma D(\theta) \leq 1 / (1 - \alpha)$  низкочастотная волна представляет собой биполярные импульсы длительностью  $\Omega T_s = 2 \arccos((1 - \sigma D) / \alpha \sigma D)$ .

Приведенные графики гармоник  $\tilde{A}_n$  позволяют также найти угловое распределение амплитуды  $n$ -й гармоники низкочастотной волны  $A_n(\theta) = D(\theta) \tilde{A}_n(\sigma D(\theta)) (\Omega / \omega_0)$ , где  $D(\theta)$  — диаграмма направленности высокочастотной волны. Из (12), (13) видно, что при  $\sigma \leq 1$   $A_1(\theta) \sim D^2(\theta)$  для АМ- и БГ-сигналов, как и должно быть для излучателей невысокой мощности [5]. При  $\sigma \gg 1$  диаграмма направленности по первой низкочастотной гармонике для АМ-сигнала и по всем гармоникам для БГ-сигнала совпадает с диаграммой  $D(\theta)$ . По-другому ведет себя диаграмма направленности по высшим гармоникам низкочастотного сигнала для АМ-сигнала, что связано с немонотонным ходом функций  $\tilde{A}_n$  (см. фиг. 2). Так, для второй гармоники  $\tilde{A}_2 \approx 1 / \sigma D$  при  $\sigma D > 5$ . Это приводит к тому, что при  $\sigma \gg 1$  в области углов, где  $D(\theta) > 5 / \sigma$ , имеем  $A_2(\theta) \sim 1 / \sigma$ , т. е. происходит существенное уширение диаграммы направленности. Следует также отметить, что в отличие от параметрических излучателей с плоскими первичными пучками [2-4] здесь практически отсутствует провал в диаграмме направленности под нулевым углом (см. фиг. 3).

Более узкая, чем высокочастотная, диаграмма направленности может быть получена для тех гармоник, которые возникают в области образования разрывов (см. фиг. 2), так что нуль диаграммы  $D_n(\theta_s) = 0$  определяется из условия  $D(\theta) = 1 / \sigma$ . В частности, все гармоники для ЧМ-сигнала возникают после образования разрывов, т. е. при  $\sigma D \geq 1$ , причем высшие гармоники меняют с увеличением  $\sigma D$  знак. Это приводит к тому, что диаграмма направленности ЧМ-сигнала на этих гармониках становится многолепестковой (см. фиг. 3).

В заключение рассмотрим пример расчета параметрических излучателей в таком режиме. В самом мощном из известных параметрических излучателей — американской системе «ТОР» [12] — первичное поле имеет частоту  $f_p = 24$  кГц, и его уровень, пересчитанный к расстоянию в 1 м —  $SL_p$  составляет 130 дБ относительно 1 Па·м. Из (12) следует, что при  $\sigma \gg 1$  уровень вторичного поля на оси, пересчитанный к расстоянию в 1 м для АМ-сигнала, определяется соотношением

$$SL_s = SL_p - 20 \lg(\omega_0 / \Omega) + 20 \lg(m / 2),$$

где  $m$  — глубина модуляции.

Для частоты вторичной волны  $5 \text{ кГц}$  и  $100\%$  модуляции получим  $SL_s = 110,4 \text{ дБ/1 Па}\cdot\text{м}$ , что лишь на  $0,4 \text{ дБ}$  отличается от экспериментально измеренной. Измеренная диаграмма направленности на вторичной частоте совпадает с диаграммой на первичной, как и следует из развитой теории.

Мы рассматривали приближение, согласно которому нелинейное затухание преобладает над линейным. Нетрудно получить расчетную формулу, определяющую уровень звукового давления  $SL^*$ , выше которого характерное расстояние нелинейного затухания меньше характерного расстояния линейного затухания:

$$SL^* = 70 + 20 \lg \alpha - 20 \lg f_p,$$

где  $\alpha$  — коэффициент затухания в  $\text{дБ/км}$  [13],  $f_p$  — частота первичной волны в  $\text{кГц}$ . Нетрудно видеть, что в рассматриваемом примере разрывное приближение справедливо до расстояния порядка  $6 \text{ км}$ , чего вполне достаточно для формирования низкочастотной диаграммы направленности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mellen R. H., Browning D. C., Konrad W. L. Parametric sonar transmitting array measurements. J. Acoust. Soc. America, 1971, 49, 3 (p. 2), 932–935.
2. Willette J. G., Moffett M. B. Harmonics of the difference frequency in saturation-limited parametric sources. J. Acoust. Soc. America, 1977, 62, 6, 1377–1381.
3. Сутин А. М. О предельном режиме работы параметрического излучателя ультразвука. Акуст. ж., 1978, 24, 1, 104–107.
4. Новиков Б. К., Руденко О. В. Генерация низкочастотных гармоник в поле мощной амплитудно-модулированной волны. Акуст. ж., 1977, 23, 5, 797–804.
5. Berktau H. O., Leachy D. J. Farfield performance of parametric transmitter. J. Acoust. Soc. America, 1974, 55, 3, 539–546.
6. Дунина Т. А., Есинов И. Б., Козяев Е. Ф. К теории параметрического излучения. Тр. VI Международного симп. по нелинейной акустике. М., Изд-во МГУ, 1976, ч. 1, 296–307.
7. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975.
8. Сутин А. М. Влияние нелинейных эффектов на свойства акустических фокусирующих систем. Акуст. ж., 1978, 24, 4, 593–601.
9. Заславский Ю. М., Сутин А. М. Автодетектирование акустических волн с большими числами Рейнольдса. Акуст. ж., 1978, 23, 1, 145–148.
10. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н. О статистических характеристиках случайных квазимонохроматических волн в нелинейных средах. Акуст. ж., 1977, 23, 4, 569–575.
11. Гурбатов С. Н., Дубков А. А. О параметрическом возбуждении шумовых низкочастотных волн в нелинейной среде. Акуст. ж., 1977, 23, 2, 260–264.
12. Konrad W. L. Application of the parametric source to bottom and sub. bottom profiling. Finite-amplitude wave effects in fluids. Proc. 1973 Symp. Ed. L. Bjørnø. IPS Business Press Ltd, 1974, 180–183.
13. Матвиенко В. Н., Тарасюк Ю. Ф. Дальность действия гидроакустических средств. Л., «Судостроение», 1976.

Горьковский государственный университет  
им. Н. И. Лобачевского  
Институт прикладной физики  
Академии наук СССР

Поступила  
25 октября 1978 г.