значений структурной постоянной $C_n=10^{-4}$, $5\cdot 10^{-5}$ и 10^{-5} $м^{-1/3}$, характерных для районов мирового океана со стабильной гидрологической картиной [7].

В заключение необходимо отметить, что как в случае рассеяния на неровной морской поверхности, так и в случае рассеяния на объемных неоднородностях морской среды расчеты флуктуаций углов прихода волны на антенну проводились без учета акустической рефракции в водной толще. Расчет поля, рассеянного неровной морской поверхностью, проводился для наиболее простой модели механизма рассеяния. И наконец, предполагалось, что на антенну приходит только один луч, испытавший рассеяние. Эти обстоятельства, упрощающие реальную ситуацию, следует учитывать при сравнении результатов расчета с данными эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967, гл. 4.
2. *Шифрин Я. С.* Вопросы статистической теории антенн. М., «Советское радио», 1970.
3. *Лобкова Л. М.* Статистическая теория антенн сверхвысоких и оптических частот. М., «Связь», 1975.
4. *Фролов В. М.* Флуктуации направления луча, отраженного от статистически неровной поверхности. Вопросы судостроения, серия Акустика, 1977, 8, 74–79.
5. *Гулин Э. П.* Корреляционные свойства звуковой волны при многократных отражениях от неровной поверхности. Акуст. ж., 1976, *22*, 6, 845–857.
6. *Басс Ф. Г., Фукс И. М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М., «Наука», 1972.
7. Акустика океана. Под ред. Л. М. Бреховских. М., «Наука», 1974, гл. 1.
8. *Кляцкин В. И.* О дисперсии угла прихода плоской световой волны, распространяющейся в среде со слабыми случайными неоднородностями. Изв. вузов. Радиофизика, 1969, *12*, 5, 723–726.

Акустический институт
им. академика Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила
26 июля 1978 г.
После переработки
11 января 1979 г.

УДК 534.26

ОБ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В БЕСКОНЕЧНЫХ ПЛАСТИНАХ

С. И. Ковинская

Инженерные конструкции, встречающиеся на практике, часто подвергаются нестационарным воздействиям. В результате этих воздействий в конструкциях возникают нестационарные колебания, поведение которых изучено недостаточно.

Рассмотрим простейший элемент таких конструкций – пластину, точное описание колебаний которой дают уравнения теории упругости для слоя [1, 2]. Ниже рассматриваются нестационарные изгибные колебания тонкой пластины, что представляет собой упрощенную модель явления, в которой, во-первых, пренебрегают другими модами колебаний и, во-вторых, скорость распространения изгибной волны с увеличением частоты неограниченно возрастает (как это следует из уравнения Бернулли – Эйлера). Эти упрощения допустимы в тех случаях, когда основной интерес представляют колебания не в области фронта, а в более позднее время, или колебания с ограниченным по высоким частотам спектром.

Получим решение уравнения Бернулли – Эйлера в замкнутой форме в виде интеграла так, как это сделано в работе [3] для волнового уравнения. Для этого рассматривается неоднородная задача о колебаниях бесконечной пластины под действием силы $q(r,t)$; уравнение, описывающее колебания, имеет вид

$$\Delta^2 w(r,t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial t^2}=q(r,t), \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа, $w(r,t)$ – смещение пластины. Граничные условия должны включать необходимое число производных от искомой функции, а условия по временной координате должны быть условиями Коши: $(w(r,t)|_{t=0}=w_0(r)$; $\frac{\partial w}{\partial t}(r,t)|_{t=0}=v_0(r))$. Функция Грина поставленной задачи должна удовлетворять уравнению

$$\Delta^2 G(r,t/r_0,t_0)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(r,t/r_0,t_0)=\delta(r-r_0)\delta(t-t_0). \tag{2}$$

Источник здесь имеет характер импульса в виде дельта-функции в точке $r=r_0$ в момент $t=t_0$, т. е. начальные условия имеют вид $G|_{t<0}=0$; $\partial G/\partial t|_{t<0}=0$. Умножим уравнение (1) на $G(r, t/r_0, t_0)$, а уравнение (2) на $w(r_0, t_0)$, вычтем один результат из другого и проинтегрируем разность по поверхности S_0 и по времени t_0 от 0 до $t^+=t+\varepsilon$ (ε произвольно мало):

$$\int_0^{t^+} dt_0 \int dS_0 \left[G\Delta_0{}^2 w - w\Delta_0{}^2 G - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t_0{}^2} w - G\frac{\partial^2 w}{\partial t_0{}^2} \right) \right] =$$

$$= \int_0^{t^+} dt_0 \int dS_0 q(r_0, t_0) G - w(r, t).$$

Воспользовавшись затем формулой Грина и используя начальные условия для G, получим полное решение неоднородной задачи

$$w(r,t) = \int_0^{t^+} dt_0 \int dS_0 q(r_0,t_0) G - \int_0^{t^+} \oint dl \left[G\frac{\partial(\Delta w)}{\partial n} - w\frac{\partial(\Delta G)}{\partial n} \right] + \tag{3}$$

$$+\frac{1}{c^2}\int dS_0 \left[\frac{\partial G}{\partial t_0}\bigg|_{t_0=0} w_0(r_0) - G\bigg|_{t_0=0} v_0(r_0) \right].$$

Первый интеграл здесь дает эффект внешних источников, второй – эффект граничных условий, последний – начальных. Эти рассуждения справедливы для задачи Коши в случае, например, волнового уравнения. Рассмотрение задачи Коши (безграничной задачи) приводит формулу (3) к виду

$$w(r,t) = \int_0^{t^+} dt_0 \int dS_0 q(r_0,t_0) G(r, t/r_0, t_0) + \tag{4}$$

$$+\frac{1}{c^2}\int dS_0 \left[\frac{\partial G}{\partial t_0}\bigg|_{t_0=0} w_0(r_0) - G|_{t_0=0} v_0(r_0) \right].$$

Прежде чем перейти к конкретным видам возбуждений пластины, напишем еще одно интегральное представление решения безграничной задачи в виде

$$w(r,t) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[H_0^{(1)}(kr) + \frac{2i}{\pi} K_0(kr) \right] \frac{\bar f(\omega)\, d\omega}{8\sqrt{mD}\,\omega}, \tag{5}$$

где $k=\sqrt[4]{m\omega^2/D}$ – волновое число пластины с поверхностной плотностью m и изгибной жесткостью D, $H_0^{(1)}$, K_0 – цилиндрические функции, $\bar f(\omega)$ – преобразование Фурье (спектр) действующей силы. Выражение (5) может быть получено из уравнения (1) путем преобразования Фурье по времени использования известного решения для сосредоточенной гармонической силы [4], действующей на бесконечную пластину в точке $r=0$ и обратного преобразования Фурье. Рассмотрим возбуждения пластины силами, действующими в точке $r=0$ с зависимостью от времени в виде $f_1(t)=\delta(t)$ и $f_2(t)=\delta'(t)$. Указанные силы являются предельными случаями одно- и двуполярных импульсных сил, встречающихся на практике. Кроме того, отклик на первую силу представляет собой функцию Грина для безграничной задачи, если удовлетворяются условия Коши.

Для решения задачи о колебаниях бесконечной пластины, возбуждаемой силой $f_1(r, t)=\delta(r)\delta(t)$, воспользуемся выражением (5). Спектр действующей силы

$$\bar f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\delta(t)\, dt = 1. \tag{6}$$

Колебания пластины описываются интегралом

$$w(r,t) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[H_0^{(1)}(kr) + \frac{2i}{\pi} K_0(kr) \right] \frac{d\omega}{8\sqrt{mD}\,\omega}. \tag{7}$$

Разделив в выражении реальную и мнимую части и учитывая четность подынтегральных выражений, получим

$$(8)\qquad w(r,t)=\frac{-1}{8\pi}\left\{\int_0^\infty I_0(kr)\frac{\cos\omega t}{\sqrt{mD}\,\omega}d\omega+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty\left[N_0(kr)+\frac{2}{\pi}K_0(kr)\right]\frac{\sin\omega t}{\sqrt{mD}\,\omega}d\omega\right\}.$$

Интегралы в выражении (8) – табличные [5], и решение уравнения Бернулли – Эйлера для импульсной сосредоточенной силы имеет вид

$$(9)\qquad w(r,t)=-\frac{1}{4\pi\sqrt{mD}}Si\left(\sqrt{\frac{m}{D}}\frac{r^2}{4t}\right),$$

$Si(x)=-\int_x^\infty\frac{\sin t}{t}dt$. Для получения решения в случае силы $f_2(r,\ t)=\delta(r)\delta'(t)$ (спектр такой силы $\bar f_2(\omega)=i\omega$) достаточно продифференцировать выражение (9) по времени, тогда

$$(10)\qquad w(r,t)=\frac{1}{4\pi\sqrt{mD}}\frac{\sin\left(\sqrt{\frac{m}{D}}\frac{r^2}{4t}\right)}{t}.$$

Рассмотрим асимптотическое поведение решений (9) и (10) при $r\to\infty$ и $t\to\infty$, $r\to0$ и $t\to0$. Для фиксированного момента времени $t\neq0$ на больших расстояниях $\left(\sqrt{\frac{m}{D}}\frac{r^2}{4t}\gg1\right)$ из асимптотики $Si(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}-\frac{\cos(x)}{x}$ получим для однополярного импульса

$$w(r,t)\to\frac{1}{4\pi\sqrt{mD}}\frac{\cos\left(\sqrt{\frac{m}{D}}\frac{r^2}{4t}\right)4t}{\sqrt{\frac{m}{D}}r^2},$$

т. е. $w(r,\ t)$ убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Обращает на себя внимание тот факт, что смещение при $t\neq0$ имеется на любом расстоянии r от источника (отсутствует фронт волны), так как использовались уравнения с неограниченной скоростью распространения. Убывание амплитуды вызвано растеканием энергии. В точке действия силы $r=0$ в моменты $t\neq0$ смещение постоянно $w(0,\ t)=={}^1/_8\sqrt{mD}$ (использовалась асимптотика $Si(x)=-\pi/2+x-x^3/18+\ldots$ при $x\to0$).

То же значение для смещения получаем для фиксированного r при $t\to\infty$: $w(r,\ t)\to{}^1/_8\sqrt{mD}$, т. е. не наблюдается убывания смещения с течением времени. Полученные результаты имеют следующее физическое объяснение.

Поскольку спектр воздействующей функции содержит как высокочастотные компоненты (имеющие большую скорость распространения), так и низкочастотные (медленные), а амплитуда спектра постоянна ($\bar f(\omega)=1$), то в более отдаленные времена в точку наблюдения приходят все более медленные компоненты с неубывающей амплитудой. Иная картина имеет место в случае двуполярного импульса $f_2(t)=\delta'(t)$. В точке действия силы при $t\neq0$ $w(0,\ t)=0$. При $t\to\infty$ $w(r,\ t)\to0$, что отличается от случая с силой в виде δ-функции, так как медленные компоненты, приходящие в фиксированную точку во все более отдаленные времена, имеют все меньшую амплитуду.

При $t\to0$ решение $w(r,\ t)\to\infty$, что обусловлено неограниченностью скорости распространения быстрых компонент, т. е. при фиксированном r во все более ранние времена мы имеем дело со все более высокочастотными компонентами смещения, у которых все большая амплитуда ($\bar f(\omega)\xrightarrow[\omega\to\infty]{}\infty$). Последнее явление не реализуется на практике из-за ограниченности скорости распространения изгибных волн.

Автор признателен А. С. Никифорову за внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л., «Судостроение», 1972.
2. Физическая акустика, под ред. У. Мэзона. М., «Мир», 1973.
3. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
4. *Cremer H., Cremer L.* Theorie der Enstehung des Klopfschalles. Frequenz, 1948, *2*, 3, 61.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Поступила
30 октября 1978 г.

УДК 534.222

СТРУКТУРА НЕЛИНЕЙНОГО ЗВУКОВОГО ПУЧКА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Е. Н. Пелиновский, И. А. Соустова

Эффективный метод анализа звуковых пучков конечной амплитуды с узким угловым спектром состоит в решении уравнения Заболотской – Хохлова. Применительно к проблемам распространения акустических волн в океане и атмосфере принципиальным является учет неоднородности среды (характерной, например, для звуковых каналов). Соответствующая модификация уравнения Заболотской – Хохлова сделана в работе [1]; уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial p}{\partial l}+\frac{\alpha}{\rho c^3}p\frac{\partial p}{\partial s}\right)+\frac{c}{2}\Delta_\perp p+\frac{1}{2c}\Phi\frac{\partial^2 p}{\partial s^2}=0. \tag{1}$$

Здесь p – возмущение давления, $c(\mathbf{r})$ – локальная скорость звука, $\Phi=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=0}\eta^2$, $s=\tau(\mathbf{r})-t$, где $\tau(\mathbf{r})$ – эйконал, определяемый уравнением $(\nabla\tau)^2=c^{-2}$; $l\eta$ образуют криволинейную ортогональную систему координат, связанную с некоторым опорным лучом (l – координата вдоль луча, η – поперек него), $\alpha=(\gamma+1)/2$ (γ – показатель адиабаты).

В частном случае, когда $\Phi\equiv 0$ (распространение волн вдоль неоднородности или под произвольным углом в среде с линейным профилем плотности и скорости звука), уравнение (1) выведено в работах [2, 3]. Последнее слагаемое в (1), однако, является принципиальным для описания акустических волн в звуковых каналах (ср. с [4], где обсуждаются аналогичные линейные задачи).

В настоящем сообщении исследуется структура звукового пучка в произвольной плавно неоднородной среде при достаточно малом уровне интенсивности пучка. Решение уравнения (1) получено методом возмущений, причем в качестве первого приближения использовано линейное решение для монохроматического звукового пучка с гауссовым поперечным распределением интенсивности, описанное в [4]:

$$p_1=A_1(l)\exp(-\eta^2/L^2(l))\cos(\omega s-\Psi(l)+a(l)\eta^2). \tag{2}$$

Здесь $\Psi(l)$, $a(l)$, $L(l)$ – действительные функции, определяемые следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d^2L}{dz^2}=\frac{4}{L^3}+\pi L,\qquad a(l)=\frac{1}{2L}\frac{dL}{dl}\frac{\omega}{c},\qquad \Psi(l)=\int\frac{c}{\omega}\frac{dl}{L^2},$$

$$z=\frac{1}{\omega}\int c(l)\,dl,\qquad A_1(l)\sqrt{L(l)}=\mathrm{const},\qquad \pi(l)=\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\eta^2}\right)_{\eta=0}\frac{\omega^2}{c^3}.$$

Это решение описывает при $\pi\geqslant 0$ расходящийся (или первоначально сходящийся, но затем снова расходящийся) пучок, а при $\pi<0$ – осциллирующий (по поперечной координате) пучок, в том числе при некоторых условиях ($\pi=\mathrm{const}<0$) волноводную моду звукового канала.

Отыскивая решение уравнения (1) в виде $p=p_1+p_2$ ($p_2\ll p_1$) для p_2 получаем линейное неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial s\,\partial l}+\frac{c}{2}\frac{\partial^2 p^2}{\partial\eta^2}-\frac{\eta^2}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\eta^2}\right)_{\eta=0}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_2}{\partial s^2}= \tag{3}$$

$$=T(l)\cos(2\omega s-2\varphi(l)+2a\eta^2)\exp(-2\eta^2/L^2),$$