ЛИТЕРАТУРА

1. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л., «Судостроение», 1972.
2. Физическая акустика, под ред. У. Мэзона. М., «Мир», 1973.
3. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
4. *Cremer H., Cremer L.* Theorie der Enstehung des Klopfschalles. Frequenz, 1948, *2*, 3, 61.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Поступила
30 октября 1978 г.

УДК 534.222

СТРУКТУРА НЕЛИНЕЙНОГО ЗВУКОВОГО ПУЧКА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Е. Н. Пелиновский, И. А. Соустова

Эффективный метод анализа звуковых пучков конечной амплитуды с узким угловым спектром состоит в решении уравнения Заболотской – Хохлова. Применительно к проблемам распространения акустических волн в океане и атмосфере принципиальным является учет неоднородности среды (характерной, например, для звуковых каналов). Соответствующая модификация уравнения Заболотской – Хохлова сделана в работе [1]; уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial p}{\partial l}+\frac{\alpha}{\rho c^3}p\frac{\partial p}{\partial s}\right)+\frac{c}{2}\Delta_\perp p+\frac{1}{2c}\Phi\frac{\partial^2 p}{\partial s^2}=0. \tag{1}$$

Здесь p – возмущение давления, $c(\mathbf{r})$ – локальная скорость звука, $\Phi=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=0}\eta^2$, $s=\tau(\mathbf{r})-t$, где $\tau(\mathbf{r})$ – эйконал, определяемый уравнением $(\nabla\tau)^2=c^{-2}$; $l\eta$ образуют криволинейную ортогональную систему координат, связанную с некоторым опорным лучом (l – координата вдоль луча, η – поперек него), $\alpha=(\gamma+1)/2$ (γ – показатель адиабаты).

В частном случае, когда $\Phi=0$ (распространение волн вдоль неоднородности или под произвольным углом в среде с линейным профилем плотности и скорости звука), уравнение (1) выведено в работах [2, 3]. Последнее слагаемое в (1), однако, является принципиальным для описания акустических волн в звуковых каналах (ср. с [4], где обсуждаются аналогичные линейные задачи).

В настоящем сообщении исследуется структура звукового пучка в произвольной плавно неоднородной среде при достаточно малом уровне интенсивности пучка. Решение уравнения (1) получено методом возмущений, причем в качестве первого приближения использовано линейное решение для монохроматического звукового пучка с гауссовым поперечным распределением интенсивности, описанное в [4]:

$$p_1=A_1(l)\exp(-\eta^2/L^2(l))\cos(\omega s-\Psi(l)+a(l)\eta^2). \tag{2}$$

Здесь $\Psi(l)$, $a(l)$, $L(l)$ – действительные функции, определяемые следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d^2L}{dz^2}=\frac{4}{L^3}+\pi L,\qquad a(l)=\frac{1}{2L}\frac{dL}{dl}\frac{\omega}{c},\qquad \Psi(l)=\int\frac{c}{\omega}\frac{dl}{L^2},$$

$$z=\frac{1}{\omega}\int c(l)\,dl,\qquad A_1(l)\sqrt{L(l)}=\mathrm{const},\qquad \pi(l)=\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\eta^2}\right)_{\eta=0}\frac{\omega^2}{c^3}.$$

Это решение описывает при $\pi\geqslant 0$ расходящийся (или первоначально сходящийся, но затем снова расходящийся) пучок, а при $\pi<0$ – осциллирующий (по поперечной координате) пучок, в том числе при некоторых условиях ($\pi=\mathrm{const}<0$) волноводную моду звукового канала.

Отыскивая решение уравнения (1) в виде $p=p_1+p_2$ ($p_2\ll p_1$) для p_2 получаем линейное неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial s\,\partial l}+\frac{c}{2}\frac{\partial^2 p^2}{\partial\eta^2}-\frac{\eta^2}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\eta^2}\right)_{\eta=0}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_2}{\partial s^2}= \tag{3}$$

$$=T(l)\cos(2\omega s-2\varphi(l)+2a\eta^2)\exp(-2\eta^2/L^2),$$

где $T(l)=A_1^2\omega^2\alpha/L\rho_0 c^3$. Введем вместо s переменную Δ

$$\Delta=2\omega s-2\Psi(l)+2a(l)\tau^2 \tag{4}$$

и будем отыскивать решение (3) в виде

$$p_2=\mathscr{L}(l,\eta)\cos\Delta. \tag{5}$$

С учетом (2) получаем для функции $\mathscr{L}$ два уравнения:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial l}+\frac{ac}{\omega}\eta\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\eta}+\frac{ac}{\omega}\mathscr{L}=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial\eta^2}+\mathscr{L}\left(\frac{8}{L^2}-\eta^2\left(\frac{4\omega^2}{c^2}\frac{d}{dl^2}(\ln L)+8a^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{8\omega^2}{c^3}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\eta^2}\right)_{\eta=0}\right)\right)=\frac{2T(l)}{c\sqrt{L}}\exp[-2\eta^2/L^2(l)]. \tag{7}$$

Решение уравнения (6), очевидно, имеет вид

$$\mathscr{L}(l,\eta)=\frac{1}{\sqrt{L(l)}}F(\eta/\sqrt{L(l)}), \tag{8}$$

где функция F должна определяться из уравнения (7), которое с учетом (8) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2F}{d\eta^2}+F\left(\frac{8}{L^2}-\eta^2\left(\frac{4\omega^2}{c^2}\frac{d^2}{dl^2}(\ln L)+\frac{8a^2}{L}-\frac{8\omega^2}{c^3}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\eta^2}\right)_{\eta=0}\right)\right)=$$
$$=\frac{2T(l)}{c\sqrt{4(l)}}\exp(-2\eta^2/L^2). \tag{9}$$

Заменой переменных

$$k=4/L^2\sqrt{m},\qquad \eta_{\text{н}}=2\eta\sqrt[4]{m},\qquad m=\frac{8\omega^2}{c^3}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\eta^2}\right)_{\eta=0}-$$
$$-8a^2-\frac{4\omega^2}{c^2}\frac{d^2}{dl^2}(\ln L)$$

можно свести (9) к неоднородному уравнению Вебера

$$4\frac{d^2F}{\partial\eta^2}+F(8k-\eta^2)=\frac{2T(l)}{c\sqrt{L}}\exp[-2\eta^2/L^2(l)], \tag{10}$$

решение которого имеет вид

$$F=\varphi_1\left(c_1+\int_0^\eta\frac{2\varphi_2(\xi)T(l)}{c\sqrt{L}\,W(\xi)}\exp-2\xi^2/L^2\sqrt{m}\,d\xi\right)+$$
$$+\varphi_2\left(c_2-\int_0^\eta\frac{2\varphi_1(\xi)T(l)}{c\sqrt{L}\,W(\xi)}\exp-2\xi^2/L^2\sqrt{m}\,d\xi\right), \tag{11}$$

где $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$ – линейно-независимые решения однородного уравнения Вебера, связанные с гипергеометрическими функциями $\hat{F}(W(\xi)=\varphi_1\varphi_2-\varphi_2\varphi_1)$:

$$\begin{gathered}\varphi_1=\xi^{-1/2}\{\hat{F}(3/4-k,\ 3/2,\ \xi^2/2)(\xi^2/2)^{3/4}l^{-\xi^2/4}\}\\ \varphi_2=\xi^{-1/2}\{\hat{F}(1/4-k,\ 3/4,\ \xi^2/2)(\xi^2/2)^{3/4}l^{-\xi^2/4}\}.\end{gathered} \tag{12}$$

В это решение входят две произвольные константы, которыми можно распорядиться при выборе начальных условий. Следует отметить, что решение (12) является частным решением уравнения (3), поскольку оно получено с помощью разделения переменных в виде (5). Поэтому выбор начальных условий для формы пучка не может быть произвольным. В частности, как видно из выражений (8) и (12), по удается удовлетворить нулевым начальным условиям для амплитуды второй гармоники (разделение переменных, использованное в работе [5] для описания процесса генерации второй гармоники, здесь не проходит из-за слагаемого $\sim\Phi$). В результате с помощью выражения (12) удается описать только вынужденную вторую гармонику звукового пучка в неоднородной среде. Рассмотрим более детально задачу о структуре нелинейного пучка в симметричном звуковом канале (нелинейную волноводную моду), когда структура моды не зависит от расстояния вдоль оси канала. В силу симметрии канала очевидными граничными условиями для функции F являются

$$dF/d\eta=0, \quad F(\infty)=0. \tag{13}$$

Для этого случая решение (11) выражается через элементарные функции (это легко проверить непосредственной подстановкой)

$$F=\frac{L_0^{3/2}A_1^2\omega_1^2\alpha}{2\rho c}\exp(-2\eta^2/L_0^2). \tag{14}$$

Здесь $L_0=(-1/\pi)^{1/4}$.

Таким образом, структура нелинейной моды в волноводном канале описывается суммой выражений (2) и (14) так, что

$$p=A_1\exp(-\eta^2/L_0^2)\cos(\omega s-\Psi(l))+A_2\exp(-2\eta^2/L_0^2)\cos(2\omega s-2\Psi(l)), \tag{15}$$

где $A_2=A_1^2\alpha\omega_1^2L_0^2/2\rho c^4$, $\Psi(l)=\omega_1^{-1}L_0^{-2}\int c(l)\,dl$. Ширина пучка на второй гармонике несколько (в $\sqrt{2}$ раза) меньше, чем ширина пучка на его основной частоте. Амплитуда пучка растет при увеличении амплитуды пучка на основной частоте $\sim A_1^2$, параметра нелинейности α и ширины пучка на основной частоте $\sim L_0$. В частности, для океанического волновода с симметричным распределением скорости звука $c(z)$ вида

$$c(z)=c_0(1+\varepsilon^2z^2), \tag{16}$$

где ε^{-1} – характерный масштаб неоднородности, ширина пучка $L_0=(c_0/\omega\varepsilon)^{1/2}$. В этом случае амплитуда второй гармоники растет с увеличением характерного масштаба неоднородности $\sim\varepsilon^{-1/2}$ и частоты $\sim\omega$.

В заключение отметим, что приведенный здесь расчет нелинейной структуры звукового пучка справедлив при условии

$$\frac{A_2}{A_1}=M\alpha\frac{L_0^2}{\lambda^2}\ll 1 \tag{17}$$

(λ – длина волны, M – числа Маха в звуковом пучке, λ^2/L_0^2 – дифракционный параметр), что означает малость нелинейных эффектов по сравнению с дифракционными. В случае произвольной неоднородности ($\Phi\geqslant0$) амплитуда звукового пучка гауссовой формы на частоте второй гармоники не остается постоянной. Так, например, при $\Phi=0$ легко показать, что A_2/A_1 растет при увеличении l.

Таким образом, влияние неоднородности может существенно исказить картину поведения высших обертонов: если в однородной среде амплитуда второй гармоники сначала нарастает, а затем падает [5] (в сущности такое же поведение второй гармоники сохраняется и в неоднородной среде при $\Phi=0$ [3]), то в неоднородной среде при условиях, рассмотренных выше, амплитуда второй гармоники остается вообще постоянной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пелиновский Е. Н., Соустова И. А., Фридман В. Е.* Уравнение Заболотской – Хохлова для ограниченных звуковых пучков в неоднородных средах. Тезисы докладов «Нелинейная гидроакустика – 76», Таганрог, 1976, 22–25.
2. *Зарембо Л. К., Чунчузов И. П.* О вертикальном распространении мощного звукового пучка в атмосфере. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1972, *13*, 6, 664–667.
3. *Зарембо Л. К., Чунчузов И. П.* О звуковом пучке в неоднородной среде со слабо меняющейся скоростью звука. Акуст. ж., 1977, *23*, 1, 143–145.
4. *Пелиновский Е. Н., Соустова И. А., Фридман В. Е.* Дифракция звуковых пучков в неоднородных средах. Акуст. ж., 1978, *24*, 5, 740–745.
5. *Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В.* Ограниченные квазиплоские пучки периодических возмущений в нелинейной среде. Акуст. ж., 1973, *19*, 6, 871–876.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила
15 мая 1978 г.
После исправления
9 ноября 1978 г.