АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 5

УДК 534.014.4+534.232

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗОВОГО ТОРА В ЖИДКОСТИ

В. А. Васильев

Вычислена частота собственных колебаний произвольного газового тора в жидкости и частота собственных колебаний наполненной газом упругой тороидальной оболочки из резиноподобного материала при большой величине отношения радиуса осевой окружности к радиусу окружности поперечного сечения.

При создании аппаратуры, предназначенной для погружения в воду, оказывается необходимым создавать внутри прибора давление, компенсирующее наружное гидростатическое давление. Для этого часто применяют надутые воздухом резиновые мешки, соединенные тонкой трубкой с внутренним объемом погружаемого прибора. По мере погружения воздух переходит из мешка во внутренний объем прибора, поддерживая в нем давление, равное наружному.

Для погружаемых акустических приборов наличие в их непосредственной близости воздушного объема может оказаться небезразличным [1]: суммарное звуковое поле вблизи прибора будет в этом случае определяться не только приходящей волной, но еще и полем, рассеянным на воздушном объеме. Рассеянное поле будет зависеть от соотношения между частотой приходящего поля и частотой собственных колебаний воздушного объема *.

В связи с тем, что в качестве воздушного мешка удобно применять камеры надувных шин, ниже проведен расчет собственной частоты колебаний воздушного объема в форме тора.

Всякий газовый объем, помещенный в жидкость, можно рассматривать как низкочастотную колебательную систему с распределенными постоянными, совершающую колебания пульсационного типа. Элементом упругости в таких колебаниях служит газ, изменяющий свое давление при изменении объема, а элементом массы — присоединенная масса, соответствующая движению окружающей жидкости, обусловленному пульсациями объема. Колебания газовых объемов сферической формы (пульсации пузырьков) общеизвестны; в работе [2] дан расчет собственных частот объемов газа в виде эллипсоидов вращения, использованный, в частности, в работе [3] для расчетных оценок рассеяния звука пузырными рыбами. Ниже дан расчет пульсационных колебаний торообразного газового объема, помещенного в жидкость, а также расчет для такого объема, заключенного в упругую оболочку.

Получим предварительно общую формулу для частоты пульсационных колебаний газового объема произвольной формы, полагая, что длина волны как в газе, так и в жидкости велика по сравнению с размерами газового объема, и, следовательно, давление газа можно считать постоянным по всему его объему, а жидкость несжимаемой.

---

* Воздушный объем можно считать замкнутым, поскольку акустическое сопротивление соединительной трубки выбирается всегда очень большим.

Пусть p — звуковое давление в жидкости, ρ — ее плотность и $\mathbf{u}$ — вектор смещения частиц жидкости. Обозначая частоту интересующих нас колебаний через ω, имеем из уравнения движения

$$\mathbf{u}=\frac{1}{\rho\omega^2}\nabla p.$$

Изменение $\Delta\Omega$ газового объема Ω будет

$$\Delta\Omega=\iint\limits_S \mathbf{u}d\mathbf{S}=\frac{1}{\rho\omega^2}\iint\limits_S \frac{\partial p}{\partial n}dS, \tag{1}$$

где $d\mathbf{S}=\mathbf{n}dS$, а $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S, ограничивающей газовый объем. Звуковое давление в газе равно звуковому давлению p_S в жидкости на границе. В предположении адиабатического процесса это давление равно

$$p_S=-\frac{\gamma P_0}{\Omega}\Delta\Omega, \tag{2}$$

где P_0 — равновесное давление газа. Исключая из формул (1) и (2) $\Delta\Omega$, получим

$$\omega^2=-\frac{\gamma P_0}{\rho\Omega}\frac{1}{p_S}\iint\limits_S \frac{\partial p}{\partial n}dS,$$

или, вводя безразмерное давление $\Pi=p/p_S$, будем иметь

$$\omega^2=-\frac{\gamma P_0}{\rho\Omega}\iint\limits_S \frac{\partial \Pi}{\partial n}dS, \tag{3}$$

где $\partial\Pi/\partial n$ — производная по нормали от функции Π, удовлетворяющей уравнению $\Delta\Pi=0$ и равной единице на поверхности S.

Применим формулу (3) для вычисления собственной частоты торообразного газового объема. Пусть тор образован вращением круга радиуса r вокруг оси z, лежащей в его плоскости на расстоянии R от его центра. Введем тороидальные координаты

$$x=\frac{\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{sh}\,\mu}{\mathrm{ch}\,\mu-\cos\eta}\cos\varphi,\quad y=\frac{\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{sh}\,\mu}{\mathrm{ch}\,\mu-\cos\eta}\sin\varphi,\quad z=\frac{\sqrt{R^2-r^2}\sin\eta}{\mathrm{ch}\,\mu-\cos\eta}; \tag{4}$$

здесь μ изменяется от 0 до ∞, φ и η — от 0 до 2π. Поверхность газового тора соответствует $\mu=\mu_0$, удовлетворяющему условию $\mathrm{ch}\,\mu=R/r$; поверхность $\mu=\mathrm{const}$ есть тор, меридиональная окружность которого имеет радиус $\sqrt{R^2-r^2}/\mathrm{sh}\,\mu$, а центр меридиональной окружности находится от оси z на расстоянии $\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{cth}\,\mu$.

Согласно работе [4] (формула 10.3.80), решение уравнения Лапласа в области вне тора можно представить рядом

$$\Pi=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\mathrm{ch}\,\mu-\cos\eta}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\mu_0)P_{n-1/2}(\mathrm{ch}\,\mu)\cos n\eta, \tag{5}$$

где $a_0(\mu_0)=Q_{-1/2}(\mathrm{ch}\,\mu_0)/P_{-1/2}(\mathrm{ch}\,\mu_0)$, $a_n(\mu_0)=2Q_{n-1/2}(\mathrm{ch}\,\mu_0)/P_{n-1/2}(\mathrm{ch}\,\mu_0)$ при $n>0$, $P_{n-1/2}(\mathrm{ch}\,\mu)$ и $Q_{n-1/2}(\mathrm{ch}\,\mu)$ — функции Лежандра первого и второго рода (здесь исправлена ошибка в формуле (10.3.80) — пропуск коэффициента 2 в выражениях для $a_n(\mu_0)$ при $n>0$). Ряд (5) можно дифференцировать почленно по μ при $\mu<\mu_0$, так как можно показать, что при выполнении этого условия ряд сходится равномерно по μ. Производная $\partial\Pi/\partial n$, где n — нормаль к поверхности, $\mu=\mathrm{const}$, выражается через $\partial\Pi/\partial\mu$

формулой $\frac{\partial \Pi}{\partial n}=\frac{\operatorname{ch}\mu-\cos\eta}{\sqrt{R^2-r^2}}\frac{\partial \Pi}{\partial \mu}$ Подставляя сюда выражение (5), получим

$$(6)\qquad \frac{\partial \Pi}{\partial n}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{\operatorname{sh}\mu}{\sqrt{R^2-r^2}}(\operatorname{ch}\mu-\cos\eta)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\mu_0)\Big[P'_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu)\times$$
$$\times\sqrt{\operatorname{ch}\mu-\cos\eta}+\frac{P_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu)}{2\sqrt{\operatorname{ch}\mu-\cos\eta}}\Big]\cos n\eta.$$

В силу гармоничности Π интеграл $\iint\limits_S \frac{\partial \Pi}{\partial n}dS$ можно вычислять по поверхности S любого тора $\mu=\text{const}<\mu_0$, охватывающего тор $\mu=\mu_0$. Элемент поверхности тора $\mu=\text{const}$ равен $\frac{(R^2-r^2)\operatorname{sh}\mu}{(\operatorname{ch}\mu-\cos\eta)}d\varphi\, d\eta$, поэтому интеграл можно написать в виде

$$(7)\qquad \iint\limits_S \frac{\partial \Pi}{\partial n}dS=2\sqrt{2}\sqrt{R^2-r^2}\operatorname{sh}^2\mu\int\limits_0^{2\pi}\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\mu_0)\times$$
$$\times\Big[\frac{P'_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu)}{\sqrt{\operatorname{ch}\mu-\cos\eta}}+\frac{P_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu)}{2\sqrt{(\operatorname{ch}\mu-\cos\eta)^3}}\Big]\cos n\eta\Big\}d\eta,$$

где μ выбираем меньшим μ_0. В этом случае ряды сходятся равномерно относительно η; так как умножение равномерно сходящегося ряда на непрерывную в замкнутом интервале $0\leqslant\eta\leqslant 2\pi$ функцию η (либо функцию $1/\sqrt{\operatorname{ch}\mu-\cos\eta}$, либо функцию $1/\sqrt{(\operatorname{ch}\mu-\cos\eta)^3}$) не нарушает равномерной сходимости, то ряд, стоящий под знаком интеграла, также сходится равномерно. Поэтому в формуле (7) можно изменить порядок суммирования и интегрирования. В результате приходим к выражению

$$(8)\qquad \iint\limits_S \frac{\partial \Pi}{\partial n}dS=2\sqrt{2}\sqrt{R^2-r^2}\operatorname{sh}^2\mu\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\mu_0)\times$$
$$\times\Big[P'_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu)\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos n\eta d\eta}{\sqrt{\operatorname{ch}\mu-\cos\eta}}+P_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu)\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos n\eta d\eta}{\sqrt{(\operatorname{ch}\mu-\cos n\eta)^3}}\Big].$$

Первый интеграл, стоящий здесь под знаком суммы, равен $Q_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu)$ (см. формулу (8.713) из [5]), откуда следует, что второй интеграл — $-Q'_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu)$. С учетом того, что $\operatorname{sh}^2\mu[Q'_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu)P_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu)-P'_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu)\times$ $\times Q_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu)]=1$, получаем

$$(9)\qquad \iint\limits_S \frac{\partial \Pi}{\partial n}dS=-8r\sqrt{s^2-1}\,f(s),$$

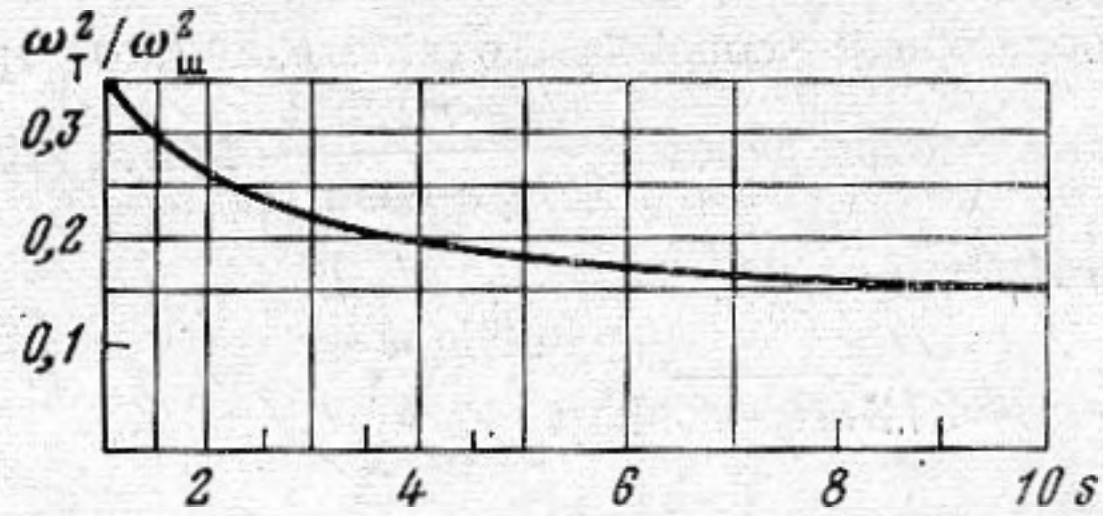
где $s=R/r=\operatorname{ch}\mu_0$ и $f(s)=\Big[\frac{Q_{-1/2}(s)}{P_{-1/2}(s)}\Big]+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{Q_{n-1/2}(s)}{P_{n-1/2}(s)}\Big]$. Формулу (3) теперь можно переписать в виде

$$(10)\qquad \omega^2=\frac{4\gamma P_0}{\rho\pi^2r^2}\frac{\sqrt{s^2-1}}{s}f(s).$$

Ряд, входящий в выражение для $f(s)$, сходится при $s>1$, так как имеют место оценки

$$(11)\qquad Q_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)<\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-n\mu_0}}{\sqrt{n\operatorname{sh}\mu_0}};\quad P_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)>\frac{\operatorname{ch}^{n-1/2}\mu_0}{2}.$$

При s, стремящемся к единице, $f(s)$ стремится к бесконечности, однако произведение $\sqrt{s-1}f(s)$ остается ограниченным. Действительно, при $s>1$ мажорирующий ряд $\left[Q_{-1/2}(s)+2\sum_{n=1}^{\infty}Q_{n-1/2}(s)\right]$ сходится, и его сумма равна $\pi\sqrt{2}/2\sqrt{s-1}$ (см. работу) [6], откуда следует неравенство $\sqrt{s-1}f(s)<\pi\sqrt{2}/2$.



Фиг. 1. Отношение квадрата собственной частоты тора к квадрату частоты пульсационных колебаний сферического объема радиуса r в зависимости от s

Из сказанного следует, что функция представляет собой непрерывную функцию при $s\geqslant1$. В конце статьи приведена таблица функции $4\sqrt{s^2-1}f(s)/\pi^2s$, входящей в выражение (10) для собственной частоты газового тора, для значений от 1 до 10. Для больших значений ниже приведено асимптотическое выражение.

На фиг. 1 представлен график величины $\frac{4}{3\pi^2}\frac{\sqrt{s^2-1}}{s}f(s)$, равной отношению квадрата искомой частоты к квадрату частоты пульсационных колебаний сферического объема радиуса r.

Найдем асимптотическое выражение ω^2 для больших значений s. Из формулы (11), следует, что $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{Q_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)}{P_{n-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)}\right]<\frac{\sqrt{2\pi\operatorname{cth}\mu_0}}{e^{\mu_0}\operatorname{ch}\mu_0-1}$; так как при $s\to\infty$ отношение $\frac{P_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)\sqrt{2\pi\operatorname{cth}\mu_0}}{Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)\left[e^{\mu_0}\operatorname{ch}\mu_0-1\right]}$ стремится к нулю, то для больших s функция $f(s)$ может быть заменена на $Q_{-1/2}(s)/P_{-1/2}(s)$. При такой замене относительная ошибка при вычислении ω^2 при $s=1{,}5$; 2; 5; 7; 10 соответственно меньше величин 0,148; 0,09; 0,018; 0,0063; 0,0044. Для функций $Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)$ и $P_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)$ имеют место выражения:

$$(12)\qquad \begin{aligned}Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)&=\pi e^{-\mu_0/2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,e^{-2\mu_0}\right)=\\&=\pi e^{-\frac{\mu_0}{2}}\left[1+\frac{e^{-2\mu_0}}{4}+\frac{(1\cdot3)^2}{(2!)^2}\frac{e^{-4\mu_0}}{4^2}+\frac{(1\cdot3\cdot5)^2}{(3!)^2}\frac{e^{-6\mu_0}}{4^3}+\ldots\right],\end{aligned}$$

$$P_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)=\frac{2}{\pi}e^{-\mu_0/2}\left\{(\mu_0+\ln 4)+\frac{e^{-2\mu_0}}{4}\left[\mu_0+\left(\ln 4-\frac{2}{1\cdot 2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{(1\cdot 3)^2}{(2!)^2}\frac{e^{-4\mu_0}}{4^2}\left[\mu_0+\left(\ln 4-\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\right]+\ldots\right\},$$

где $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,e^{-2\mu_0}\right)$ — гипергеометрическая функция. Это выражение для $P_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)$ получается путем сведения стандартного выражения для $P_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)$ к эллиптическому интегралу:

$$P_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\vartheta}{\sqrt{\operatorname{ch}\mu_0+\operatorname{sh}\mu_0\cos\vartheta}}=$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{\operatorname{sh}\mu_0}}\int_0^\pi\frac{\sin\vartheta d\vartheta}{\sin\vartheta\sqrt{\operatorname{cth}\mu_0+\cos\vartheta}}=\frac{1}{\pi\sqrt{\operatorname{sh}\mu_0}}\int_{-1}^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(\operatorname{cth}\mu_0+t)}}.$$

Последний интеграл, согласно формуле (3.131) из [5], выражается через полный эллиптический интеграл, который с помощью формулы (8.113.3) из [5] преобразуется в выражение для $P_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)$, приведенное в формуле (12). Легко проверить, что отношение $Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)$ к $P_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)$ можно представить в таком виде:

$$\frac{Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)}{P_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)}=\frac{\pi^2}{2(\mu_0+\ln 4)}\left(1+\frac{\mathscr{A}}{1+B}\right), \tag{13}$$

где

$$\mathscr{A}=\frac{e^{-2\mu_0}}{4(\mu_0+\ln 4)}\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{(1\cdot 3)^2}{(2!)^2}\frac{e^{-4\mu_0}}{4^2(\mu_0+\ln 4)}2\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)+$$

$$+\frac{(1\cdot 3\cdot 5)^2}{(3!)^2}\frac{e^{-6\mu_0}}{4^3(\mu_0+\ln 4)}2\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}\right)+\ldots,$$

$$B=\frac{e^{-2\mu_0}}{4}\left[1-\frac{2}{(\mu_0+\ln 4)}\frac{1}{1\cdot 2}\right]+$$

$$+\frac{(1\cdot 3)^2}{(2!)^2}\frac{e^{-4\mu_0}}{4^2}\left[1-\frac{2}{(\mu_0+\ln 4)}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)\right]+\ldots$$

Здесь имеют место следующие оценки:

$$2\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}\right)<\ln 4, \tag{14}$$

$$\frac{(1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1))^2}{4^n(n!)^2}=\frac{(1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1))^2}{(2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n)^2}<\frac{2}{e}\frac{1}{n+1/2}.$$

Вторая оценка следует из неравенства

$$\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right)^2=\exp\left[2\sum_{k=1}^n\ln\left(1-\frac{1}{2k}\right)\right]< \tag{15}$$

$$<\exp\left[2\int_1^{n+1}\ln\left(1-\frac{1}{2x}\right)dx\right]=\frac{2}{e(n+1/2)}.$$

Поэтому можно написать

$$(16)\qquad \mathscr{A}<\frac{2}{e}\frac{\ln 4}{(\mu_0+\ln 4)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2n\mu_0}}{n+1/2}<\frac{2\ln 4}{e(\mu_0+\ln 4)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\mu_0 n}}{n}=$$

$$=\frac{2\ln 4}{e(\mu_0+\ln 4)}(-\ln(1-e^{-2\mu_0})),$$

$$0<B<\frac{2}{e}(-\ln(1-e^{-2\mu_0})).$$

Так как B положительно, то относительная ошибка при замене $Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)/$ $/P_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)$ на $\pi^2/2(\mu_0+\ln 4)$ меньше $\mathscr{A}$. Из формулы (16) следует, что $\mathscr{A}$ стремится к нулю при $\mu_0\to\infty$; следовательно, согласно формуле (13), асимптотически при больших μ_0

$$Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)/P_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)\approx\pi^2/2(\mu_0+\ln 4).$$

Пользуясь этим выражением, имеем, согласно формуле (10),

$$(17)\qquad \omega^2\approx 2\gamma P_0/\rho r^2\ln 8s.$$

Так как относительная ошибка замены $Q_{-1/2}(s)/P_{-1/2}(s)$ на $\pi^2/2(\mu_0+\ln 4)$ при $s\geqslant 1{,}5$ много меньше относительной ошибки замены $f(s)$ на $Q_{-1/2}(s)/$ $/P_{-1/2}(s)$, то при замене $f(\operatorname{ch}\mu_0)$ на $\pi^2/2(\mu_0+\ln 4)$ вместо $Q_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)/$ $/P_{-1/2}(\operatorname{ch}\mu_0)$ относительная ошибка практически не изменяется. Окончательно формула (17) дает значение ω^2 и ω при $s=1{,}5$; 2; 5; 7; 10 с относительной ошибкой меньше соответственно величин 0,273; 0,172; 0,034; 0,0124; 0,009 и 0,148; 0,09; 0,0171; 0,0063; 0,0044. Приведем для сравнения формулу для собственной частоты $\omega_{эл}$ вытянутого эллипсоида вращения, малая полуось которого равна r, а большая πR:

$$\omega_{эл}^2=3\gamma P_0/\rho r^2\ln 2\frac{R}{r}\pi=3\gamma P_0/\rho r^2\ln 2\pi s.$$

Отношение объема тора к объему шара с той же собственной частотой равно

$$(18)\qquad m(s)=\frac{4(\sqrt{s^2-1}\,f(s))^{3/2}}{\pi^2\sqrt{3s}}.$$

На фиг. 2 приведен график величины $m(s)$. На фиг. 3 приведен график отношения собственной частоты тороидального газового объема к собственной частоте шара того же объема. Можно показать, что при рассмотренных колебаниях и больших значениях s радиус R тора практически остается постоянным и пульсирует только радиус r.

Практически осуществить колебание тороидального газового объема в жидкости можно только, заключив этот объем в какую-нибудь достаточно мягкую оболочку, например резиновую. Если s достаточно велико, то приближенную оценку влияния упругости такой оболочки на собственную частоту объема можно провести следующим образом.

Рассмотрим, как деформируется резиновая тороидальная оболочка под действием разности давлений p изнутри и снаружи. Обозначим толщину оболочки h. При больших значениях s можно считать, что оболочка деформируется так же, как бесконечная цилиндрическая оболочка, на которую действуют растягивающая вдоль оси оболочки сила $p\pi r^2$ и давление p. Нормальные напряжения в оболочке вдоль образующей оболочки и вдоль меридиана равны соответственно

$$\sigma_1=\frac{p\pi r^2}{2\pi rh}=\frac{p}{2}\frac{r}{h},\qquad \sigma_2=p\frac{r}{h}.$$

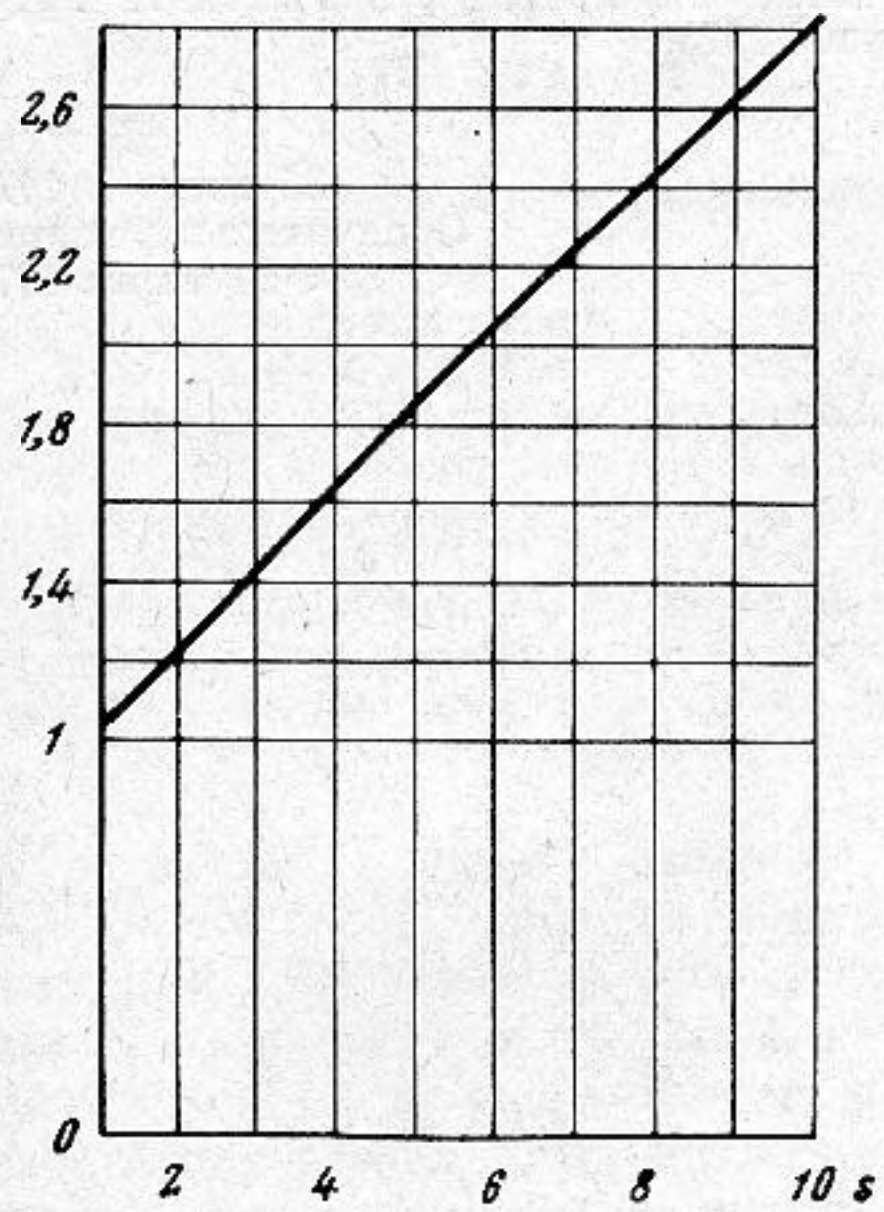
Отсюда (см., например, [7], формула (138.8)) для относительных удлинений средней линии и меридиана получим выражения

$$\varepsilon_1 = \frac{p}{E}\frac{r}{h}\left(\frac{1}{2} - \nu\right); \quad \varepsilon_2 = \frac{p}{E}\frac{r}{h}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right),$$

где E — модуль Юнга и ν — коэффициент Пуассона материала оболочки.

Так как в резине ν близко к $^1/_2$, то можно положить $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 = \frac{3}{4}\frac{p}{E}\frac{r}{h}$.

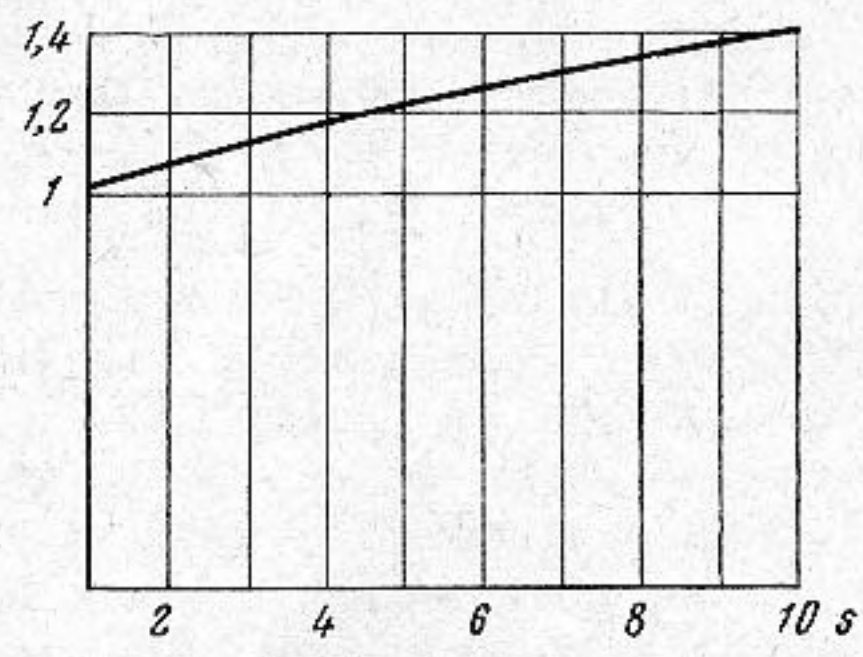
Таким образом, как и для газового тороидального объема при его пульсационных колебаниях, средняя линия оболочки остается неизменной и



Фиг. 2

Фиг. 2. Отношение объема тора к объему шара с той же собственной частотой в зависимости от s

Фиг. 3. Отношение собственной частоты тороидального газового объема к собственной частоте шара того же объема в зависимости от s



Фиг. 3

изменяется только радиус r тора. При данном изменении объема газа в оболочке потребуется преодолеть не только упругость газа, но и упругость оболочки. Относительное изменение объема оболочки равно $2\varepsilon_2 = \frac{3}{2}\frac{p}{E}\frac{r}{h}$.

Отсюда следует, что объемный коэффициент упругости оболочки в отдельности равен $\frac{2}{3}E\frac{h}{r}$; эту величину и следует добавить к объемному коэффициенту упругости газа γP_0. Таким образом, частота собственных пульсационных колебаний оболочки с газом для больших s выразится формулой

$$\omega^2 \approx 2\gamma P_0\left(1 + \frac{2}{3}\frac{E}{\gamma P_0}\frac{h}{r}\right)/\rho r^2 \ln 8s. \tag{19}$$

Таблица функции $\varphi(s) = 4\sqrt{s^2-1}f(s)/\pi^2 s$

s	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\varphi(s)$	1,041	0,997	0,956	0,919	0,887	0,859	0,834	0,812	0,792	0,774
s	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$\varphi(s)$	0,757	0,742	0,728	0,716	0,704	0,656	0,621	0,593	0,571	0,553
s	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0
$\varphi(s)$	0,537	0,524	0,513	0,503	0,494	0,485	0,478	0,471	0,465	0,460

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исакович М. А.* Коррекция амплитудных искажений при широкополосном приеме звука вблизи импеданцной границы резонансного типа. Дальневосточный акустический сборник (межвузовский). Владивосток, Дальневосточный политехн. ин-т им. В. В. Куйбышева, 1975, вып. 1, 286–293.
2. *Strasberg M.* The Pulsation Frequency of Nonspherical Gas Bubles in Liquids. J. Acoust. Soc. America, 1953, *25*, 3, 536–537.
3. *Weston D. E.* Sound Propagation in Presence of Bladder-Fish, Underwater Acoustics, II v., Plenum Press, N. Y., 1963.
4. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
6. Higher transcendential functions, McGrow-Hill Book Company, Inc. 1973, v. 1, p. 166.
7. *Исакович М. А.* Общая акустика. М., «Наука», 1973.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила
25 августа 1976 г.
Окончательный вариант
29 марта 1979 г.