АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 5

УДК 534.26

ВЛИЯНИЕ ГЛУБИНЫ ПОЛОСТИ РЕЗОНАТОРА НА ЕГО АКУСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

К. А. Велижанина, В. А. Оборотов

Рассмотрено влияние глубины полости резонатора на присоединенную массу отверстия, в частности возрастание присоединенной массы с уменьшением глубины полости, которое обычно не учитывается при расчетах входного импеданца поглотителя. Поскольку зависимость присоединенной массы от глубины полости определяется и значениями параметров r_0/R, R/λ (r_0 и R – соответственно радиус отверстия и ячейки, т. е. площади панели, на которую приходится одно отверстие, λ – длина волны), определены степень влияния этих параметров и возможность использования данного эффекта при создании малогабаритных по толщине резонансных звукопоглотителей.

При расчете входного импеданца резонансного звукопоглотителя, представляющего собой перфорированную панель, поставленную на некотором расстоянии l от жесткой стенки, обычно полагают, что присоединенная масса M не зависит от глубины полости резонатора. Однако, как показано в работе [1], присоединенная масса зависит от глубины полости. Для двухслойных резонансных поглотителей в случае малых расстояний между двумя поставленными друг за другом перфорированными экранами [2] помимо присоединенных масс отверстий в каждом из экранов появляется взаимная присоединенная масса.

Присоединенная масса M однослойного резонансного звукопоглотителя сложным образом зависит от глубины полости, возрастая, в частности, при малых по сравнению с длиной волны λ глубинах полости l, т. е. при малых значениях l/λ.

Возрастание присоединенной массы с уменьшением глубины полости можно использовать для создания малогабаритных по толщине резонансных звукопоглотителей, так как вследствие возрастания присоединенной массы инерционная реактивная компонента импеданца может скомпенсировать отрицательный упругий реактивный импеданц полости, который при малых l/λ обычно велик. Но поскольку характер зависимости присоединенной массы от l определяется не только отношением l/λ, но еще и значениями r_0/R и R/λ (r_0 и R – радиусы отверстия и площади панели, на которой расположено одно отверстие, соответственно), необходимо проанализировать степень влияния этих параметров, что и сделано ниже.

Для отверстия кругового сечения S_0 в перегородке, поставленной на некотором расстоянии l от жесткой стенки поперек волновода с круговым сечением S, поправка на конец δ_l (обусловленная присоединенной массой M_l с внутренней стороны отверстия) имеет следующий вид [1] (в долях радиуса волновода R):

$$\delta_l = \frac{M_l}{S_0 \rho R} = \frac{1}{2\pi R/\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(r_0/R)}{\alpha_n} \operatorname{cth}\left(2\pi\alpha_n \frac{l}{\lambda}\right), \tag{1}$$

где R — радиус резонатора, r_0 — радиус отверстия резонатора, λ — длина падающей звуковой волны, ρ — плотность воздуха,

$$F_n\left(\frac{r_0}{R}\right)=\frac{4I_1^2(b_nr_0)}{(b_nR)^2I_0^2(b_nR)};\quad \alpha_n=\sqrt{\left(\frac{f_{0n}}{f}\right)^2-1};\quad f<f_{0n}.$$

Здесь f_{0n} — критическая частота моды $0n$, b_n — волновое число, определяемое из граничных условий на стенках волновода, $I_1(b_nR)=0$ [1]. Если $l/\lambda\to 0$, то δ_l стремится к бесконечности. Обозначим

$$\delta_{l0}=\frac{1}{2\pi R/\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n(r_0/R)}{\alpha_n}\frac{1}{2\pi\alpha_n\dfrac{l}{\lambda}}. \tag{2}$$

Рассмотрим разность между значениями δ_l и δ_{l_0}. Поскольку величина $\operatorname{cth} x-1/x$ при всех значениях $x>0$ положительна и стремится к нулю при $x\to 0$, то $\delta_l\to\delta_{l_0}$ сверху. При $x\to\infty$, $(\operatorname{cth} x-1/x)\to 1$ и, следовательно, в этом случае $\delta_l\to(\delta_{l_0}+\delta_{l\infty})$ снизу. При этом

$$\delta_{l\infty}=\frac{1}{2\pi R/\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n(r_0/R)}{\alpha_n}. \tag{3}$$

Величина δ_l будет ограничена снизу значением $\delta_{l\infty}$ и будет стремиться к нему сверху при $l/\lambda\to\infty$.

Следовательно, δ_l локализовано в области, ограниченной тремя асимптотами. Снизу это будут значения функций δ_{l_0}, $\delta_{l\infty}$, сверху — значения функции $\delta_{l_0}+\delta_{l\infty}$. При $l/\lambda\leqslant 0{,}005$ величина δ_l фактически полностью аппроксимируется выражением (2), при $l/\lambda>0{,}03$ — выражением (3).

Как известно, реактивная компонента удельного безразмерного импеданца резонатора с внешней стороны панели (т. е. со стороны падения звука) выражается как

$$Y=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{S}{K}-\operatorname{ctg}\frac{2\pi l}{\lambda}, \tag{4}$$

где для податливости K обычно принимается значение

$$K=S_0/(t+2\delta) \tag{5}$$

(t — толщина панели, а δ — концевая поправка без учета глубины резонансной полости, S_0, S — площади отверстия и панели). Резонансная частота определяется из условия $Y=0$. Если есть влияние глубины полости, то формула (4) примет вид

$$Y=\frac{2\pi R/\lambda}{(r_0/R)^2}\left(\delta_l+\delta_{l\infty}+\frac{t}{R}\right)-\operatorname{ctg}\frac{2\pi l}{\lambda}=Y_{\text{п}}-\operatorname{ctg}\frac{2\pi l}{\lambda}. \tag{6}$$

Из условия резонанса, обозначая

$$N=\frac{2\pi R/\lambda}{(r_0/R)^2}\left(\delta_{l\infty}+\frac{t}{R}\right), \tag{7}$$

получим

$$\operatorname{ctg}\frac{2\pi l}{\lambda}=\frac{2\pi R/\lambda}{(r_0/R)^2}\delta_l+N. \tag{8}$$

Таким образом, получается, что $Y_{\text{п}}$ также локализуется в области, ограниченной снизу значениями функций

$$Y_0=\frac{2\pi R/\lambda}{(r_0/R)^2}\delta_{l0}+N=\frac{b}{x}+N, \tag{9}$$

$$(10) \qquad Y_\infty' = \frac{2\pi R/\lambda}{(r_0/R)^2}\delta_{l\infty} + N$$

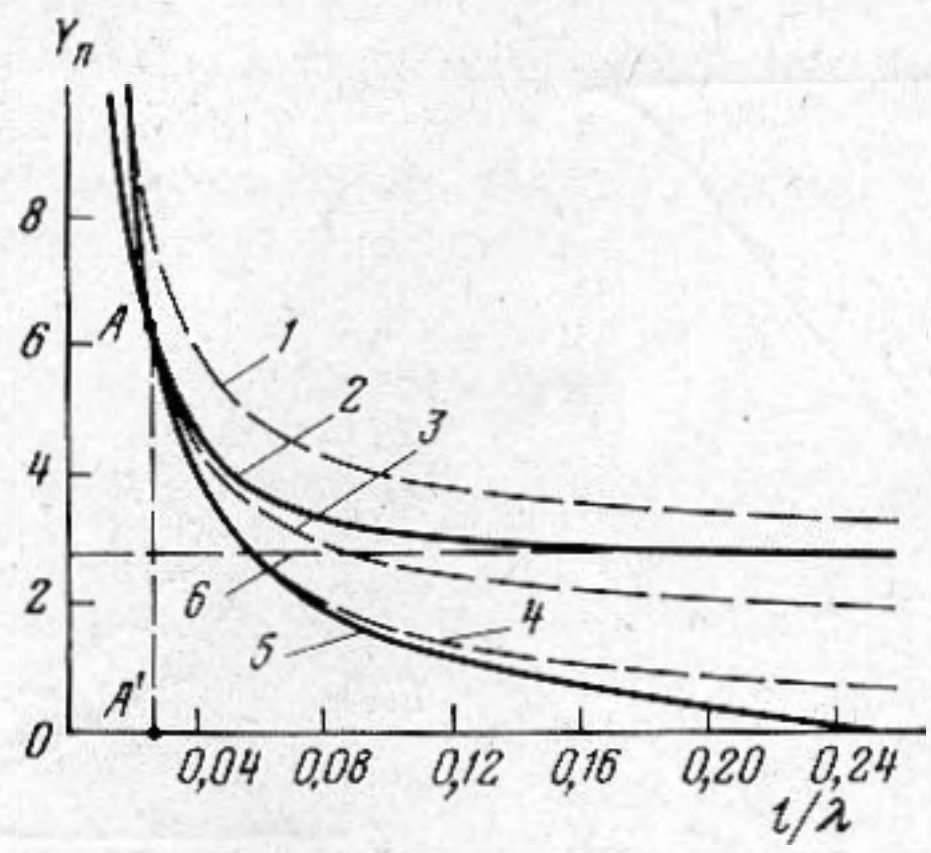
и сверху

$$(11) \qquad Y_\infty = \frac{2\pi R/\lambda}{(r_0/R)^2}\delta_{l0} + Y_\infty' = \frac{b}{x} + Y_\infty',$$

где

$$x = l/\lambda; \quad b = \frac{1}{2\pi (r_0/R)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n(r_0/R)}{\alpha_n^2}.$$

На фиг. 1 приведены расчеты $Y_п$ (кривые *1–4*) для случая резонатора, расположенного на конце полубесконечного цилиндрического волново-



Фиг. 1. Значения $Y_п$ для резонатора, расположенного на конце полубесконечного волновода, при $r_0/R=0{,}5$, $R/\lambda=0{,}3$. Кривые *1* – Y_0, *2* – $Y_п$, *3* – Y_∞, *4* – $\lambda/2\pi l$, *5* – $\operatorname{ctg} 2\pi l/\lambda$, *6* – Y_∞'; $t/R \ll 1$

да с внутренним радиусом, равным внутреннему радиусу резонатора, а также значения $\operatorname{ctg} 2\pi l/\lambda$ (кривая *5*).

Найдем области значений R/λ и r_0/R, в которых при фиксированном l имеется решение уравнения (8), т. е. когда можно осуществить условия резонанса при данной глубине полости. Можно показать, что необходимым и достаточным условием существования решения уравнения (8) при глубине полости $l<\lambda/2$ является существование решений уравнений:

$$(12) \qquad \begin{aligned} &\text{I.}\ \frac{a}{x} = \frac{b}{x} + N, \\ &\qquad\qquad\qquad x>0, \\ &\text{II.}\ \frac{a}{x} = \frac{b}{x} + Y_\infty', \end{aligned}$$

где

$$a = {}^1/_2\pi.$$

При этом решение уравнения (8), если оно существует, будет единственным. Решение гиперболических уравнений (12) существует лишь при условии $a>b$, из чего следует, что необходимым и достаточным условием существования первого резонанса (т. е. при $l>\lambda/2$) является выполнение неравенства

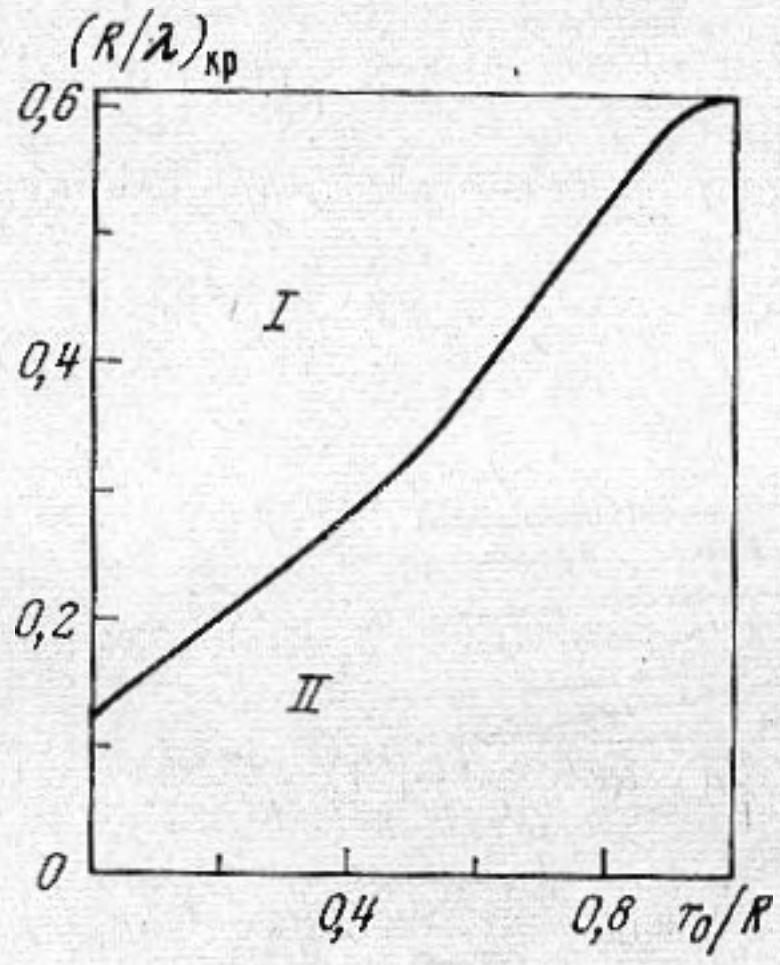
$$(13) \qquad \left(\frac{r_0}{R}\right)^2 > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n(r_0/R)}{\alpha_n^2}.$$

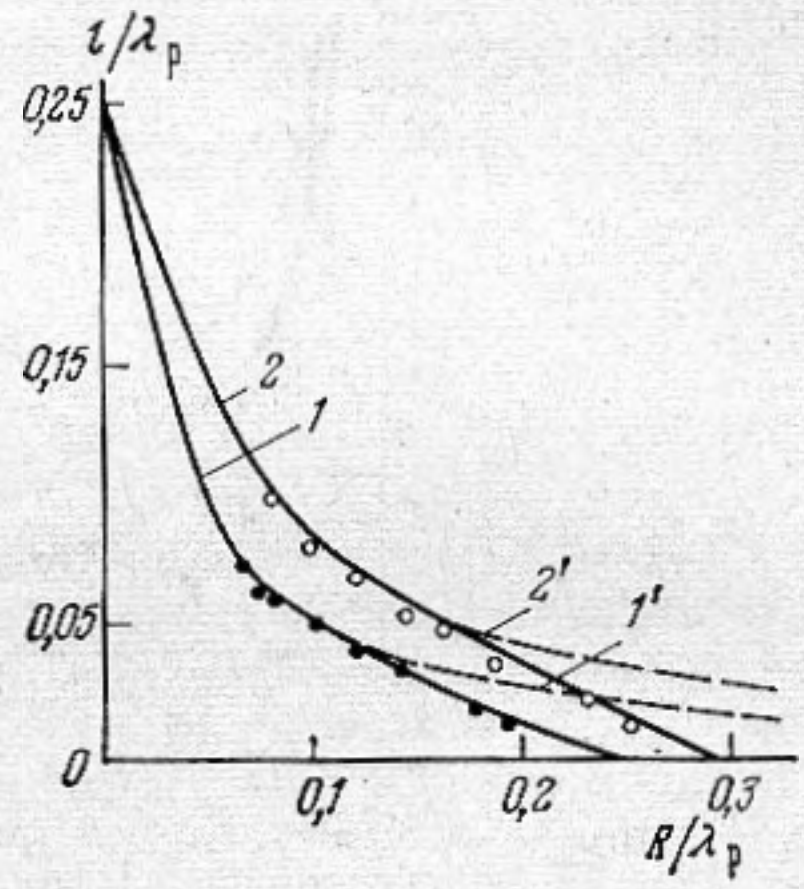
Это условие означает, что для данного r_0/R существует такое критическое значение $(R/\lambda)_{кр}$, выше которого резонанс системы невозможен. Это объясняется тем, что при $R/\lambda \geqslant (R/\lambda)_{кр}$ присоединенная масса отверстия резонатора со стороны полости такова, что $Y_п$ намного превосходит значения $\operatorname{ctg} 2\pi l/\lambda$ и поэтому не происходит полной компенсации этих функций, т. е. $\operatorname{ctg} 2\pi l/\lambda - Y_п \neq 0$.

Для определения критических значений $(R/\lambda)_{кр}$ используем уравнение

$$(r_0/R)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(r_0/R)}{\alpha_n^2}. \tag{14}$$

Решения его для различных значений r_0/R приведены на фиг. 2. Как видно из графика, значения $(R/\lambda)_{кр}$ с возрастанием r_0/R изменяются от





Фиг. 2 Фиг. 3

Фиг. 2. Зависимость $(R/\lambda)_{кр}$ от значений r_0/R

Фиг. 3. Зависимость $l/\lambda_р$ от $R/\lambda_р$; кривая *1* соответствует $r_0/R=0{,}3$, кривая *2* – $r_0/R=0{,}4$; $2R=9{,}85$ *см*, $t=0{,}5$ *см*, *1'* и *2'* – расчет без учета l/λ

0,125 до 0,609. Зависимость $(R/\lambda)_{кр}$ от r_0/R в интервале $0 \leqslant r_0/R \leqslant 0{,}5$ имеет вид (с точностью $\pm 0{,}005$)

$$(R/\lambda)_{кр} = 0{,}125 + 0{,}400 r_0/R.$$

В другом интервале значений r_0/R, а именно при $0{,}5 < r_0/R \leqslant 0{,}9$:

$$(R/\lambda)_{кр} = 0{,}325 + 0{,}517\, r_0/R.$$

При $r_0/R > 0{,}9$ $(R/\lambda)_{кр}$ стремится к величине 0,609. Область II на графике определяет значения величин R/λ и r_0/R, удовлетворяющих условию (13).

В области I, включающей в себя также и значения $(R/\lambda)_{кр}$, первый резонанс системы отсутствует. В этом случае резонанс будет при $l > \lambda/2$, т. е. в области частот $f > c/2l$, c – скорость звука в воздухе. При фиксированном значении параметра r_0/R первый резонанс существует для любых значений $0 < R/\lambda < (R/\lambda)_{кр}$ (фиг. 2).

Рассмотрим влияние изменения параметра R/λ на величину $l/\lambda_р$, где $\lambda_р$ – длина звуковой волны, соответствующая частоте первого резонанса. Для этого используем графики (фиг. 1). Точка A' на графике отмечает значение $l/\lambda_р$ при фиксированных параметрах r_0/R и R/λ. С увеличением R/λ значения δ_l и $\delta_{l\infty}$ [1], а следовательно, и $Y_п$ (8) будут увеличиваться при любых r_0/R и R/λ. Поэтому при изменении R/λ от 0 до $(R/\lambda)_{кр}$ точка

A' будет перемещаться влево от $l/\lambda=0{,}25$ до $l/\lambda=0$. При $R/\lambda\to(R/\lambda)_{кр}$ $l/\lambda_р\to0$, а при $R/\lambda\to0$, $l/\lambda_р\to0{,}25$ (фиг. 3). При фиксированном значении R/λ первый резонанс существует только для $r_0/R>(r_0/R)_{кр}$ (фиг. 2), где $(r_0/R)_{кр}$ — решение уравнения (14) при заданном R/λ. При $r_0/R\to(r_0/R)_{кр}$, $l/\lambda_р\to0$. Так как при $r_0/R\to1$ δ_l и $\delta_{l\infty}$ для любого R/λ стремится к 0 (1), то из формулы (8) следует, что в этом случае $l/\lambda_р\to0{,}25$.

На фиг. 3 приведены расчетные и экспериментальные данные зависимости $l/\lambda_р$ от $R/\lambda_р$ при значениях параметра r_0/R, равных 0,3 и 0,4. Измерения проводились на цилиндрическом интерферометре фирмы «Брюль и Кьер» с внутренним диаметром 9,85 *см*. Резонансная частота определялась из условия равенства нулю реактивной компоненты импеданца резонатора. Из фиг. 3 видно, что при расчете резонатора на данную частоту $f_р$ ошибки в определении глубины полости, связанные с неучетом влияния на M глубины полости, зависят при данном r_0/R от $R/\lambda_р$. Например, при $R/\lambda_р=0{,}2$ ($r_0/R=0{,}3$) неучет влияния глубины полости на присоединенную массу дает ошибку в 100%, а при $R/\lambda_р\geqslant0{,}2$ обычная методика расчета вообще непригодна.

Авторы выражают благодарность Н. Г. Сасковец за полезные замечания, высказанные ею при чтении рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ingard U.* On the radiation of sound into a circular tube, with an application to resonators. J. Acoust. Soc. America, 1948, *20*, 5, 665–682.
2. *Ржевкин С. Н.* К вопросу о присоединенной массе в неоднородных акустических волноводах. Акуст. ж., 1965, *11*, 3, 371–379.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра акустики

Поступила
9 января 1979 г.