АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 5

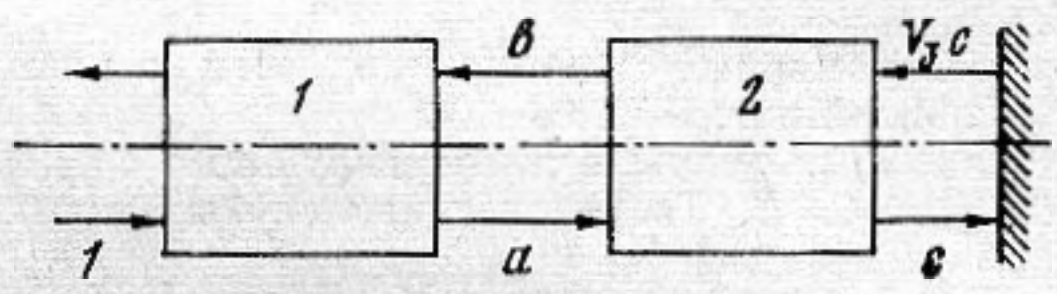
УДК 534.222.1

ОТРАЖЕНИЕ ОТ ПРЕПЯТСТВИЯ В ОДНОМЕРНОЙ СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В. И. Гельфгат

Рассчитаны среднее поле, средняя плотность энергии и средний уровень поля плоской волны, рассеянной на одномерном случайно неоднородном слое, на границе которого расположено препятствие. Показано, что распределения указанных величин по слою носят немонотонный характер, что обусловлено интерференцией волн противоположных направлений.

В работе [1] была рассмотрена одномерная задача о рассеянии плоской монохроматической волны на слое, состоящем из цепочки дискретных случайных независимых рассеивателей с равномерно распределенными независимыми фазами коэффициентов отражения. В частности, были найдены распределения по слою среднего поля и средней плотности энергии поля. Ниже рассмотрена сходная задача в предположении, что на конце слоя



Фиг. 1. Графическая схема задачи

находится зеркало с известным коэффициентом отражения V_3. Способ решения такого рода задач изложен в работе [2]. Графическая схема задачи приведена на фиг. 1, при этом волны различных направлений изображены стрелками, около которых проставлены значения или обозначения амплитуд этих волн. Части исходного рассеивающего слоя от начала до точки наблюдения и от последней до зеркала снабжены индексами 1 и 2. Этими же индексами мы будем снабжать все параметры соответственной части слоя, как-то: коэффициенты отражения слева V и справа $\tilde{V}$, прохождения D и т. п. Индекс 3 будет относиться к параметрам зеркала.

В силу линейности задачи искомое поле p, равное сумме полей встречных волн a и b, может быть выражено через коэффициенты прохождения и отражения слоев 1 и 2 и зеркала. Опуская элементарные алгебраические выкладки (см. работу [2]), приведем их результат:

$$p=a+b=\frac{D_1}{1-\tilde{V}_1 V_{2\times 3}}+V_{2\times 3}\frac{D_1}{1-\tilde{V}_1 V_{2\times 3}}, \tag{1}$$

где $V_{2\times 3}$ — коэффициент отражения от слоя 2, нагруженного на зеркало. В свою очередь этот коэффициент отражения тем же способом выражается через параметры слоя 2 и зеркала формулой

$$V_{2\times 3}=V_2+\frac{V_3 D_2^2}{1-\tilde{V}_1 V_3}, \tag{2.1}$$

которая для случая непоглощающих рассеивателей, в основном рассматриваемого ниже, может быть преобразована к виду [2]:

$$V_{2\times 3}=\frac{V_2+V_3D_2/D_2^*}{1+V_2^*V_3D_2/D_2^*}. \tag{2.2}$$

В результате этой подготовительной работы искомое поле выражено через коэффициенты отражения и прохождения слоев 1 и 2 и зеркала, что завершает динамическую часть задачи. Следующий этап состоит в нахождении статистических характеристик поля по известным статистическим характеристикам рассеивателей в исходном слое. В модели Газаряна [1, 2] и в диффузионном приближении для слабонеоднородной среды [3] слои 1 и 2 статистически независимы (для второй модели это означает пренебрежение рассеянием на масштабе неоднородности, что является условием применимости диффузионного приближения), поэтому усреднение по их параметрам может проводиться последовательно. Далее, в обеих моделях фазы коэффициентов отражения от слоя независимы от коэффициента прохождения и равномерно распределены на окружности, поэтому усреднение по любой из них сводится к интегрированию с весом $1/2\pi$. Законы совместного распределения модуля и фазы коэффициента прохождения слоя для исследуемых моделей получены в работах [2, 3].

Для нахождения среднего поля внутри рассеивающего слоя усредним равенство (1) вначале по фазе коэффициента отражения $\tilde{V}_1$:

$$\langle p\rangle_{\tilde{\varphi}_1}=D_1(1+V_{2\times 3}).$$

Подставляя в полученное равенство выражение (2.1) и проводя сперва усреднение по фазам коэффициентов отражения слоя 2, а затем по параметрам рассеивателей в обоих слоях согласно [2], получим окончательное выражение для среднего поля в модели Газаряна

$$\langle p\rangle=\langle D_0\rangle^{N_1}[1+V_3\langle D_0^2\rangle^{N_2}] \tag{3.1}$$

и для слабонеоднородной среды

$$\langle p\rangle=\exp(ikl_1)[1+V_3\exp(2i\tilde{k}l_2)]. \tag{3.2}$$

Здесь D_0 означает коэффициент прохождения одиночного рассеивателя, N — число рассеивателей, l — толщина слоя, $k=-i\lim\limits_{N\to\infty}\ln\langle D_0\rangle N/l$ — эффективное волновое число для среднего поля, $\tilde{k}=-i\lim\limits_{N\to\infty}\ln\langle D_0^2\rangle N/2l$ — эффективное волновое число для среднего квадрата поля. Неравенство $k\neq\tilde{k}$ следует из неравенства $\langle D\rangle^2\neq\langle D^2\rangle$. Для слабонеоднородной среды явные выражения для k и $\tilde{k}$ могут быть получены при усреднении D и D^2 с плотностью распределения из работы [3] и в развернутой записи имеют вид

$$k=k_0+i\frac{k_0^2}{8}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\exp(2ik_0|x|)[B_{\beta\beta}(x)-2B_{\beta\rho}(x)+B_{\rho\rho}(x)]+$$

$$+i\frac{k_0^2}{8}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx[B_{\beta\beta}(x)+2B_{\beta\rho}(x)+B_{\rho\rho}(x)],$$

$$\tilde{k}=k+i\frac{k_0^2}{8}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx[B_{\beta\beta}(x)+2B_{\beta\rho}(x)+B_{\rho\rho}(x)].$$

Здесь k_0 — волновое число в невозмущенной среде, $B_{\beta\beta}(x)$, $B_{\rho\rho}(x)$ и $B_{\beta\rho}(x)$ — соответственно автокорреляционные и взаимно-корреляционные функции флуктуаций сжимаемости $\beta(x)$ и плотности $\rho(x)$ среды. Отметим, что для слабонеоднородной среды результат (3.2) был получен

ранее в работе [4] в отсутствие флуктуаций плотности. Отметим также, что, как это указывалось в работах [1, 2], полученные выражения для среднего поля остаются справедливыми и для поглощающих рассеивателей в силу независимости от коэффициента прохождения и равномерного распределения фаз коэффициентов отражения от слоя (в модели Газаряна это постулируется, а для слабонеоднородной среды с потерями доказывается в диффузионном приближении [5]).

Рассмотрим распределение осредненной по длине волны плотности энергии поля $\mathcal{J}=|a|^2+|b|^2$. Аналогично формуле (1) получаем

$$\mathcal{J}=\frac{|D_1|^2(1+|V_{2\times3}|^2)}{|1-\tilde{V}_1V_{2\times3}|^2}. \tag{4}$$

Для абсолютно отражающего зеркала с произвольной фазой коэффициента отражения $|V_{2\times3}|=1$ и выражение (4) в удобных для последующего усреднения параметрах τ, φ и ψ, связанных с коэффициентами отражения и прохождения соотношениями $V=\operatorname{th}\frac{\tau}{2}e^{i\varphi}$, $D=\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}}e^{i\psi}$, приобретает вид

$$\mathcal{J}/2=[\operatorname{ch}\tau_1-\operatorname{sh}\tau_1\cos(\tilde{\varphi}_1+\varphi_{2\times3})]^{-1}.$$

Возводя последнее равенство в степень ix и усредняя по фазе коэффициента отражения от слоя 1, получим

$$\langle(\mathcal{J}/2)^{ix}\rangle_{\tilde{\varphi}_1}=\frac{1}{2\pi}\int d\tilde{\varphi}_1[\operatorname{ch}\tau_1-\operatorname{sh}\tau_1\cos(\tilde{\varphi}_1+\varphi_{2\times3})]^{-ix}=\mathcal{P}_{0,0}^{-ix}(\operatorname{ch}\tau_1),$$

где $\mathcal{P}_{m,n}^{z}(u)$ — функция Якоби [6]. Проводя дальнейшее усреднение по параметрам рассеивателей в слое 1 согласно [2], получим окончательное выражение для характеристической функции логарифма осредненной по длине волны плотности энергии поля:

$$\langle\exp(ix\ln\mathcal{J}/2)\rangle=\langle\mathcal{P}_{0,0}^{-ix}(\operatorname{ch}\tau_0)\rangle^{N_1}. \tag{5.1}$$

Отсюда видно, что только для предельного случая большого числа слабых рассеивателей, соответствующего случаю слабонеоднородной среды и рассмотренного в работах [7, 8], искомая величина распределена нормально

$$\langle\exp(ix\ln\mathcal{J}/2)\rangle=\exp[-ix(-ix+1)\alpha l_1], \tag{5.2}$$

где предельный параметр этого закона выражается через введенные выше параметры k и $\tilde{k}$ соотношением $\alpha=2\operatorname{Im}(2k-\tilde{k})$.

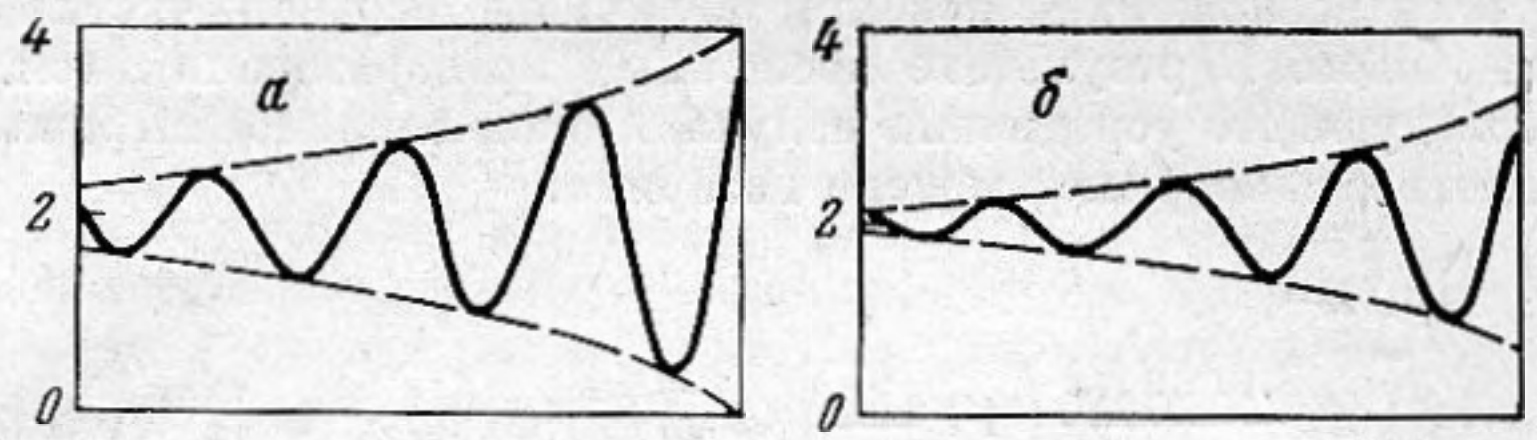
Отметим, что прием работы [2], состоящий в разложении искомых величин по функциям Якоби при последующем усреднении, позволяет получить замкнутые выражения для моментов осредненной по длине волны плотности энергии $\mathcal{J}$ для произвольного зеркала, однако получаемые выражения довольно громоздки и поэтому не приводятся.

Переходя к расчету средней плотности энергии поля, умножим равенство (1) на комплексно-сопряженное и усредним по фазе коэффициента отражения $\tilde{V}_1$. В результате этого усреднения получим формулу

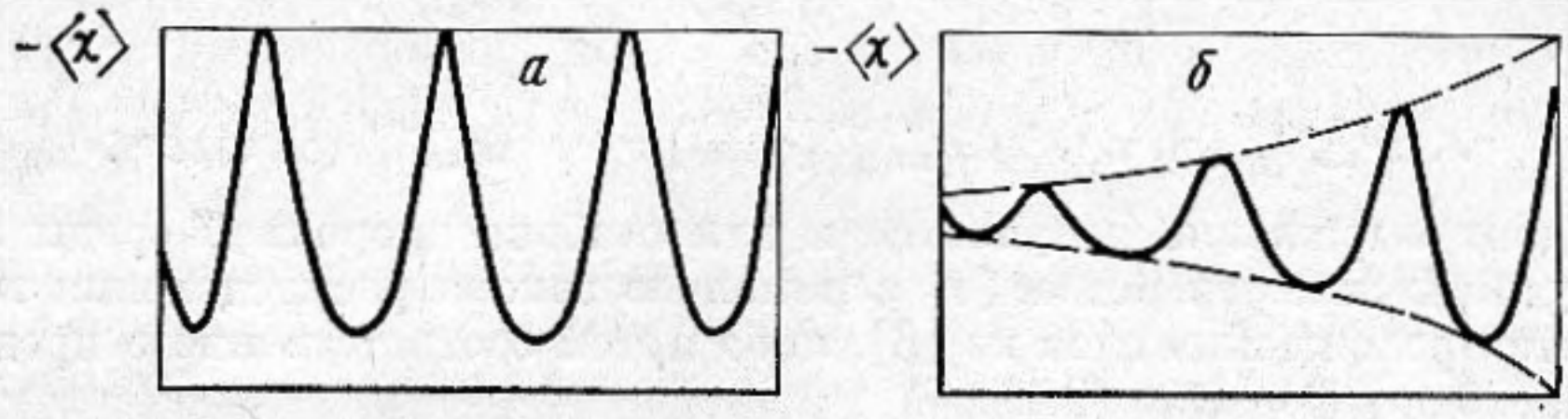
$$\langle|p|^2\rangle_{\tilde{\varphi}_1}=\frac{|D_1|^2(1+|V_{2\times3}|^2)}{1-|V_1|^2|V_{2\times3}|^2}+2\frac{|D_1|^2\operatorname{Re}V_{2\times3}}{1-|V_1|^2|V_{2\times3}|^2}. \tag{6}$$

В частном случае полностью отражающего зеркала, изучавшемся в работах [7, 8] для слабонеоднородной среды, $|V_{2\times3}|=1$ и (6) упрощается:

$$\langle|p|^2\rangle_{\tilde{\varphi}_1}=2+2\operatorname{Re}V_{2\times3}.$$



Фиг. 2. Зависимость средней плотности энергии поля от местоположения точки наблюдения для непоглощающего зеркала (*а*) и ее мажоранта для поглощающего зеркала (*б*)



Фиг. 3. Зависимости среднего уровня поля от расстояния до зеркала для непоглощающего (*а*) и поглощающего (*б*) зеркал

После дальнейшего усреднения по фазе коэффициента отражения слоя 2 и по параметрам рассеивателей в слое 2 мы получим для модели Газаряна

$$\langle|p|^2\rangle=2+2\,\mathrm{Re}\,[V_3\langle D_0^2\rangle^{N_2}] \tag{7.1}$$

и для диффузионного приближения для слабонеоднородной среды

$$\langle|p|^2\rangle=2+2\,\mathrm{Re}\,[V_3\exp(2i\tilde{k}l_2)]. \tag{7.2}$$

Полученные выражения (7.1) и (7.2) показывают, что внутри рассеивающего слоя средняя плотность энергии немонотонна, что связано с интерференцией волн встречных направлений. На такую интерференцию явно указывает зависимость от фазы коэффициента отражения зеркала. Типичная картина распределения средней плотности энергии по слою изображена на фиг. 2, *а*. Неосциллирующее слагаемое равно сумме плотностей энергий встречных волн $\langle|a|^2+|b|^2\rangle$, а огибающая осцилляций экспоненциально спадает с удалением от зеркала. Эти результаты для слабонеоднородной среды были получены в работах [7, 8], при этом в работе [8] интерференционное слагаемое для $V_3=+1$ приведено с ошибочным знаком.

Отметим, что подобная интерференция встречных волн была замечена ранее в задаче о поле точечного источника внутри рассеивающего слоя [2]. Отметим также, что в отличие от формул (3) для среднего поля в формулы для средней плотности энергии совершенно не вошли параметры слоя, расположенного на пути волны до точки наблюдения. Приводимый ниже расчет показывает, что это справедливо только для $|V_3|=1$.

Возвращаясь к общему случаю неполностью отражающего зеркала, перепишем формулу (6) в параметрах τ, φ и ψ:

$$\langle|p|^2\rangle_{\tilde{\varphi}_1}=2\left[\frac{\mathrm{ch}\,\tau_{2\times3}}{\mathrm{ch}\,\tau_1+\mathrm{ch}\,\tau_{2\times3}}+\frac{\mathrm{sh}\,\tau_{2\times3}\cos\varphi_{2\times3}}{\mathrm{ch}\,\tau_1+\mathrm{ch}\,\tau_{2\times3}}\right]. \tag{8}$$

Если бы фаза коэффициента отражения от зеркала была случайной и равномерно распределенной, то после усреднения по ней второе слагаемое в (8) обратилось в нуль; следовательно, среднее значение первого слагаемого описывает монотонную часть средней плотности энергии, а второе — осциллирующую. Для получения явного вида этих зависимостей

воспользуемся разложением искомой величины (правой части (8)) по функциям Якоби. В результате несложных преобразований (см. работу [2]) и последующего усреднения получаем окончательное выражение для средней плотности энергии в модели Газаряна:

$$(9.1)\qquad \langle|p|^2\rangle=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\pi x\,\mathrm{sh}\,\pi x}{\mathrm{ch}^2\,\pi x}\left(1+\frac{1}{2ix}\right)\langle\mathscr{P}_{0,0}^{-1/2+ix}(\mathrm{ch}\,\tau_0)\rangle^{N_1}\langle\mathscr{P}_{0,0}^{1/2+ix}(\mathrm{ch}\,\tau_0)\rangle^{N_2}\times$$

$$\times\mathscr{P}_{0,0}^{1/2+ix}(\mathrm{ch}\,\tau_3)+\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\pi x\,\mathrm{sh}\,\pi x}{\mathrm{ch}^2\,\pi x}\left(1+\frac{3}{2ix}\right)\times$$

$$\times\langle\mathscr{P}_{0,0}^{-1/2+ix}(\mathrm{ch}\,\tau_0)\rangle^{N_1}\langle\mathscr{P}_{1,1}^{1/2+ix}(\mathrm{ch}\,\tau_0)\,e^{2i\psi_0}\rangle^{N_2}\mathscr{P}_{1,0}^{1/2+ix}(\mathrm{ch}\,\tau_3)\,e^{i\varphi_3}.$$

Сходное выражение получается и для слабонеоднородной среды либо путем усреднения равенства (8) с помощью закона распределения коэффициента прохождения слоя из [3], либо путем соответственного предельного перехода в формуле (9.1):

$$(9.2)\qquad \langle|p|^2\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\pi x\,\mathrm{sh}\,\pi x}{\mathrm{ch}^2\,\pi x}\left(1+\frac{1}{2ix}\right)\mathscr{P}_{0,0}^{1/2+ix}(\mathrm{ch}\,\tau_3)\times$$

$$\times\exp\left[-\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\alpha l_1-\left(x^2-2ix-\frac{3}{4}\right)\alpha l_2\right]+$$

$$+\cos(\varphi_3+2\beta l_2)\,e^{-4\gamma l_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\pi x\,\mathrm{sh}\,\pi x}{\mathrm{ch}^2\,\pi x}\left(1+\frac{3}{2ix}\right)\mathscr{P}_{1,0}^{1/2+ix}(\mathrm{ch}\,\tau_3)\times$$

$$\times\exp\left[-\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\alpha l_1-\left(x^2-2ix-\frac{7}{4}\right)\alpha l_2\right],$$

где предельные параметры β и γ связаны с k и $\tilde{k}$ соотношениями $\beta=\lim\limits_{N\to\infty}\langle\psi_0\rangle N/l=\mathrm{Re}\,k$, $\gamma=\lim\limits_{N\to\infty}\langle(\psi_0-\langle\psi_0\rangle)^2\rangle N/4l=\mathrm{Im}\,(\tilde{k}-k)$.

Не останавливаясь на полном анализе выражений (9.1) и (9.2), проводимом методом перевала, ограничимся качественным рассмотрением. Как уже отмечалось выше, монотонная часть средней плотности энергии, описываемая первыми интегралами в формулах (9.1) и (9.2), может быть получена путем дополнительного усреднения по фазе коэффициента отражения от зеркала. Но это означает, что в таком случае мы возвращаемся к задаче работы [1]. Из приведенного рассуждения и из результатов работы [1] следует, что монотонная часть средней плотности энергии изображается частью «ступеньки» Газаряна, а именно: для зеркала, слабого по сравнению со слоем, прорисовывается почти вся картина «ступеньки», в обратном случае — только левая часть «ступеньки», ближайшая к источнику.

Несложно оценить соотношение амплитуд осцилляций в начале и конце рассеивающего слоя. Для этого усредним второе слагаемое в формуле (6) после подстановки $V_1=0$, $D_1=1$, $V_{2\times3}=V_{1\times2\times3}$, в итоге получим

$$A_{\text{нач}}=\max_{\varphi_3}2|\langle V_{1\times2\times3}\rangle|=2|\langle D_{1\times2}^2\rangle||V_3|.$$

Усредняя то же слагаемое после подстановки $V_2=0$, $D_2=1$, $V_1=V_{1\times2}$, получим

$$A_{\text{кон}}=\max_{\varphi_3}2\left|\left\langle\frac{|D_{1\times2}|^2}{1-|V_{1\times2}|^2|V_3|^2}\right\rangle\right|\,|V_3|.$$

Полагая в знаменателе последнего выражения $|V_3|=1$ и учитывая известное неравенство $|\langle D^2\rangle|\leqslant\langle|D|^2\rangle<1$, приходим к неравенству $A_{\text{нач}}<A_{\text{кон}}$. Можно показать, что при преобладающем рассеянии вперед [3] амплитуда осцилляций монотонно убывает с удалением от зеркала.

Приведем еще оценку для средней плотности энергии, получаемую мажорированием правой части формулы (6) в результате подстановки в знаменатель $|V_{2\times3}|=1$ при последующем усреднении:

$$\langle|p|^2\rangle<1+\langle|V_{2\times3}|^2\rangle+2\,\mathrm{Re}\,[V_3\langle D_0^2\rangle^{N_2}]. \tag{10}$$

Полученная оценка показывает, что кривая средней плотности энергии расположена строго ниже кривой, задаваемой правой частью формулы (10) и изображенной для не очень сильно рассеивающего слоя на фиг. 2, *б*. На этой фигуре представлена зависимость средней плотности энергии от толщины слоя 2 в отсутствие рассеивателей в слое 1. Из приведенной оценки следует, что увеличение силы слоя 1 приводит к уменьшению средней плотности энергии при фиксированной силе слоя 2.

Перейдем теперь к расчету другой характеристики поля внутри рассеивающего слоя — комплексной фазы поля $\Psi=-i\ln p=S-i\chi$, где S — фаза, а χ — уровень поля. Логарифмируя равенство (1), получаем

$$\Psi=-i\ln D_1-i\ln(1+V_{2\times3})+i\ln(1-\bar{V}_1V_{2\times3}). \tag{11}$$

При усреднении (11) по $\tilde{\varphi}_1$ третье слагаемое обращается в нуль. Для усреднения первого слагаемого воспользуемся законом композиции рассеивателей в форме $D_{1\times2}=D_1D_2/1-\bar{V}_1V_2$ [2] и усреднением по фазе $\tilde{\varphi}_1$ после логарифмирования этого закона. В результате индукции по числу рассеивателей в первом слое получаем $\langle\ln D_1\rangle=N_1\langle\ln D_0\rangle$. Для усреднения второго слагаемого в формуле (11) преобразуем его в ряд по функциям Якоби, используя тейлоровское разложение логарифма и явный вид функций Якоби с целочисленными индексами $\mathscr{P}_{n,0}^{-1}(\mathrm{ch}\,\tau)=\left(-\mathrm{th}\dfrac{\tau}{2}\right)^{|n|}$ [6].

Усредняя получившееся разложение согласно работе [2], получим выражение для средней фазы в модели Газаряна

$$\langle\Psi\rangle=-iN_1\langle\ln D_0\rangle+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-V_3)^n}{n}\langle\mathscr{P}_{n,n}^{-1}(\mathrm{ch}\,\tau_0)\,e^{2in\psi_0}\rangle^{N_2} \tag{12.1}$$

и после предельного перехода для слабонеоднородной среды

$$\langle\Psi\rangle=\tilde{\alpha}l_1+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-V_3)^n}{n}\exp[2i\tilde{\beta}l_2n-\tilde{\gamma}l_2n^2]. \tag{12.2}$$

Здесь возникшие после предельного перехода параметры $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ связаны с k и $\tilde{k}$ соотношениями: $\tilde{\alpha}=2k-\tilde{k}$, $\tilde{\beta}=\beta=\mathrm{Re}\,k$, $\tilde{\gamma}=2\,\mathrm{Im}\,\tilde{k}$.

Интересно отметить, что в выражение для среднего уровня (и для средней фазы) поля вклады препятствий до и после точки наблюдения входят аддитивно. Слой 1, находящийся между источником и точкой наблюдения, дает линейный по толщине вклад в средний уровень. Слой 2, расположенный между точкой наблюдения и зеркалом, дает для уровня немонотонную зависимость от своей толщины, похожую на зависимость от длины трубы уровня поля в узкой трубе с заглушкой на конце. Такие устройства применяются для определения коэффициента отражения от заглушки интерференционным методом. Действительно, при $\tau_0=0$, $\psi_0=\langle\psi_0\rangle$, что соответствует однородному слою 2, мнимая часть второго слагаемого в формуле (12.1) описывает уровень в стоячей волне, при этом по положениям экстремумов можно определить фазу коэффициента отражения, а по значениям уровня в них — модуль. Типичная картина подобной зависимо-

сти уровня приведена на фиг. 3, *а*. Наличие рассеивателей в слое 2 приводит к модуляции этой простой интерференционной картины монотонно спадающей с удалением от зеркала функцией, не изменяя существенно ее характера. Типичная картина получаемой зависимости среднего уровня от толщины слоя 2 приведена на фиг. 3, *б*.

Отметим, что в отсутствие зеркала средний уровень и средняя фаза поля спадают линейно с удалением от источника. Изложенный выше способ расчета, основанный на независимости от коэффициента прохождения и равномерном распределении фаз коэффициентов отражения от слоя, остается справедливым и для случая падения плоской волны на рассеивающий слой с потерями, а также для случая точечного источника в рассеивающем поглощающем слое. В этих случаях коэффициент спадания среднего уровня равен сумме коэффициента спадания среднего уровня в непоглощающей среде, обусловленного обратным рассеянием, и коэффициента спадания уровня в однородной среде с потерями, т. е. имеет место аддитивность вкладов в средний уровень эффектов, связанных с потерями и обратным рассеянием. Для случая падения плоской волны на рассеивающий слой с потерями этот результат был получен ранее более сложным методом, использующим уравнение Эйнштейна — Фоккера — Планка для плотности распределения параметров слабонеоднородного слоя со слабыми потерями [5].

В заключение автор благодарит В. И. Кляцкина за предоставленную возможность ознакомления с материалами его доклада на семинаре С. М. Рытова, которые легли в основу работы [7] и послужили поводом для написания данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Газарян Ю. Л.* Об одномерной задаче о распространении волны в среде со случайными неоднородностями. Ж. эксп. и теор. физ., 1969, *56*, 6, 1856–1871.
2. *Гельфгат В. И.* Поле точечного источника в случайно-неоднородной среде. Одномерная задача. Акуст. ж., 1972, *18*, 1, 31–41.
3. *Гельфгат В. И.* Диффузионное приближение в задаче о многократном рассеянии волны в одномерной случайно-неоднородной среде. Акуст. ж., 1975, *21*, 3, 391–395.
4. *Рыжов Ю. А.* К теории распространения волн в одномерной случайно-неоднородной среде. Препринт № 25, Горький, НИРФИ, 1972.
5. *Гельфгат В. И.* Аналитические методы расчета полей в статистически неоднородных средах. Акуст. ж., 1975, *21*, 3, 483–484.
6. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965.
7. *Кляцкин В. И.* Стохастический волновой параметрический резонанс (флуктуации интенсивности волны внутри одномерной случайно-неоднородной среды). Изв. вузов. Радиофизика, 1979, *22*, 2, 180–191.
8. *Абрамович Б. С., Гурбатов С. Н., Рыжов Ю. А.* Многократное рассеяние волн в одномерной случайно-неоднородной среде. Препринт № 119, Горький, НИРФИ, 1978.

Акустический институт
им. Н. Н. Андреева
Академии наук СССР

Поступила
20 ноября 1978 г.