АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXV 1979 Вып. 5

УДК 534.232

# АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПРОТЯЖЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФАЗИРОВАННЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК

*Ю. Ю. Добровольский*

Рассмотрено звуковое поле, создаваемое бесконечной периодической решеткой излучающих поршней, лежащих в импедансном экране. Краевая задача со смешанными граничными условиями решается методом Галеркина.

При исследовании характеристик протяженных акустических фазированных антенных решеток обычно в качестве их математической модели принимается бесконечная эквидистантная система плоских излучающих поршней, лежащих заподлицо в абсолютно жестком отражающем экране [1]. Предположение об абсолютной неподатливости акустического экрана существенно упрощает математическое решение задачи, однако ограничивает область применения полученных результатов. В работах [2, 3] для оценки влияния податливости экрана предлагается представлять его в виде набора вплотную расположенных вспомогательных пассивных поршней с некоторым внутренним импеданцем. При этом достоверность приближенного решения зависит от формы и размеров вспомогательных поршней, которые обусловлены геометрией исходной исследуемой антенной решетки.

Рассмотрим акустическое поле бесконечной эквидистантной фазированной решетки, состоящей из одинаковых излучающих поршней произвольной формы, лежащих в плоском акустически податливом локально реагирующем экране, характеризуемом конечной удельной податливостью $g_э=\text{const}$ ($g_э=\rho c/z_э$, где $\rho c$ — волновое сопротивление внешней среды, $z_э$ — входной удельный импеданц экрана). Пусть в декартовой системе $XYZ$ координаты приведенных центров поршней $x=\alpha d_1$, $y=\beta d_2$ и $z=0$ ($\alpha_1\beta=0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm\infty$); $S_{\alpha\beta}$ — поверхность ячейки антенной решетки с номером $\alpha$, $\beta$; $s_{\alpha,\beta}$ — поверхность излучающего поршня в этой ячейке. Предположим, что поршни колеблются со скоростями $v_{\alpha,\beta}=f(x, y)V_{\alpha,\beta}e^{i\omega t}$, где $V_{\alpha,\beta}$ — нормальная составляющая колебательной скорости центра приведения поршня. Функция $f(x, y)$ определена на поверхностях поршней. Тогда, опуская временной множитель, звуковое давление в расходящейся волне излучения во внешнем полупространстве $z\geqslant0$, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца

$$(\Delta+k^2)p(x, y, z)=0, \quad k=\omega/c, \tag{1}$$

и смешанным граничным условиям в пределах любой ячейки антенной решетки

$$\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial z}=ik\rho cf(x,y)V_{\alpha,\beta}, \qquad x, y\in s_{\alpha,\beta}; \qquad z=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial z}+ikg_э p(x,y,z)=0, \qquad x, y\in S_{\alpha,\beta}-s_{\alpha,\beta}; \qquad z=0 \tag{3}$$

в соответствии с формулой Грина, представим в следующем виде:

$$p(x, y, z) = -\frac{ik\rho c}{4\pi} \sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty} V_{\alpha,\beta} \int_{S_{\alpha,\beta}} f(x, y) G(x, y, z, x_0, y_0, 0)\, dx_0\, dy_0, \tag{4}$$

где функция Грина для полупространства, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца и граничным условиям задачи Неймана, будет

$$G(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = 2(R)^{-1} \exp(ikR), \tag{5}$$

$$R = \{(x_0 + \alpha d_1 - x)^2 + (y_0 + \beta d_2 - y)^2 + (z_0 - z)^2\}^{1/2}.$$

Здесь функция $f(x, y)$ рассматривается во всей ячейке антенны.

Пусть бесконечная фазированная антенная решетка возбуждается целиком и таким образом, что распределение нормальных составляющих скоростей центров приведения поршней равномерно по амплитуде и линейно возрастает по фазе, обеспечивая фазирование антенны в направлении орта $\bar{r}_0$ с направляющими косинусами $\cos\theta_x$ и $\cos\theta_y$. Таким образом,

$$V_{\alpha,\beta} = V_{0,0} \exp i(kd_1\alpha \cos\theta_x + kd_2\beta \cos\theta_y). \tag{6}$$

Воспользовавшись имеющей место в этом случае периодичностью внешнего поля бесконечной излучающей структуры

$$p(x + \alpha d_1,\ y + \beta d_2,\ z) = p(x,\ y,\ z) \exp i(kd_1\alpha \cos\theta_x + kd_2\beta \cos\theta_y), \tag{7}$$

преобразуем выражение (4)

$$p(x, y, z) = -\frac{ik\rho c}{4\pi} \sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty} e^{i(kd_1\alpha \cos\theta_x + kd_2\beta \cos\theta_y)} \times \tag{8}$$

$$\times \int_{S_{00}} f(x, y) G(x, y, z, x_0, y_0, 0)\, dx_0\, dy_0 =$$

$$= -\frac{ik\rho c}{4\pi} \int_{S_{\infty}} f(x, y) \bar{G}(x, y, z, x_0, y_0, 0)\, dx_0\, dy_0,$$

где $\bar{G}(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$ — функция Грина для бесконечной периодической фазированной структуры, определяемая следующим образом:

$$\bar{G}(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \sum_{\alpha,\beta=-\infty}^{\infty} e^{i(kd_1\alpha \cos\theta_x + kd_2\beta \cos\theta_y)} G(x, y, z, x_0, y_0, z_0). \tag{9}$$

Последнее выражение можно преобразовать к иному виду, воспользовавшись разложением для сферической волны [4]

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q^{-1} \exp[is_1(x - x_0 - \alpha d_1) + \tag{10}$$

$$+ is_2(y - y_0 - \beta d_2) + iq(z - z_0)]\, ds_1\, ds_2,$$

где

$$q = \begin{cases} k^2 - s_1^2 - s_2^2, & 0 \leqslant s_1^2 + s_2^2 \leqslant k, \\ i(s_1^2 + s_2^2 - k^2), & s_1^2 + s_2^2 > k, \end{cases}$$

и применив к исходному выражению дважды формулу суммирования Пуассона [5]

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi ma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi my} f(y)\, dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n + a). \tag{11}$$

В результате мы получим разложение функции Грина $\tilde{G}(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$ по пространственным гармоникам бесконечной периодической структуры:

$$\tilde{G}(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \frac{4\pi i}{d_1 d_2} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{mn}} e^{i\alpha(m)(x-x_0)+i\beta(n)(y-y_0)+i\gamma(m,n)(z-z_0)} \tag{12}$$

где $\alpha(m)$, $\beta(n)$ и $\gamma(m, n)$ — постоянные распространения:

$$\alpha(m) = k\cos\theta_x^m = \frac{2\pi m}{d_1} + k\cos\theta_x,$$

$$\beta(n) = k\cos\theta_y^n = \frac{2\pi n}{d_2} + k\cos\theta_y,$$

$$\gamma(m, n) = k\cos\theta_z^{m,n} = \begin{cases} [k^2 - \alpha(m)^2 - \beta(n)^2]^{1/2}, & 0 \leqslant \alpha(m)^2 + \beta(n)^2 \leqslant k^2, \\ i[\alpha(m)^2 + \beta(n)^2 - k^2]^{1/2}, & \alpha(m)^2 + \beta(n)^2 > k^2, \end{cases}$$

$$(\cos\theta_x^m)^2 + (\cos\theta_y^n)^2 + (\cos\theta_z^{m,n})^2 = 1.$$

Заметим, что в формуле (8) распределение нормальных составляющих колебательной скорости $f(x, y)$ условием (2) определено только при $x, y \in S_{\alpha,\beta}$. Для решения задачи преобразуем формулу (8), воспользовавшись условием (3) и разложением (12):

$$p(x, y, z) = p_1(x, y, z) + \frac{ikg_э}{4\pi} \int\limits_{S_{00}-s_{00}} p(x_0, y_0, 0)\tilde{G}(x, y, 0, x_0, y_0, 0)\, dx_0\, dy_0, \tag{13}$$

где

$$p_1(x, y, z) = \rho c V_{00} k\sigma \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{R(m, n)}{\gamma(m, n)} e^{i\alpha(m)x+i\beta(n)y+i\gamma(m,n)z}, \tag{14}$$

$$R(m, n) = \frac{1}{S_э} \int\limits_{s_{0,0}} f(x_0, y_0) e^{-i\alpha(m)x_0 - i\beta(n)y_0}\, dx_0\, dy_0,$$

$$\sigma = \frac{s_{00}}{S_{00}}; \qquad S_э = \int\limits_{s_{00}} f(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0.$$

Выражение (14) определяет звуковое давление, развиваемое антенной решеткой в случае абсолютно жесткого экрана [1].

Звуковое давление, развиваемое бесконечной антенной решеткой при конечном импеданце экрана, представим в виде разложения по пространственным гармоникам

$$p(x, y, z) = \rho c V_{0,0} \sum_{m,n}^{M,N} A_{m,n} e^{i\alpha(m)x+i\beta(n)y+i\gamma(m,n)z}. \tag{15}$$

Определим неизвестные коэффициенты разложения. Для этого, устремив в выражении (13) координату $z$ к нулю, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестного давления $p(x, y, 0)$. Подставим в него разложение (15) и в соответствии с процедурой Галеркина [6] составим скалярные произведения с пространственными гармониками, которые принимаем в данном случае за координатные функции. В силу ортогональности пространственных гармоник на

периоде антенной решетки

$$(16)\qquad \int_0^{d_1}\int_0^{d_2} e^{i(\alpha(m)x+\beta(n)y)}e^{-i(\alpha(p)x+\beta(q)y)}\,dx\,dy=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 0, & p\neq q,\\ d_1d_2, & m=n,\quad p=q\end{cases}$$

в результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_{m,n}$:

$$(17)\qquad A_{m,n}=\sigma\frac{R(m,n)}{\cos\theta_z^{m,n}}-\frac{g_э}{\cos\theta_z^{m,n}}\left[A_{m,n}-\sum_{p,q}^{M,N}A_{p,q}I(p,q,m,n)\right],$$

$$-M\leqslant m\leqslant M,$$

$$-N\leqslant n\leqslant N,$$

где

$$(18)\qquad I(p,q,m,n)=\frac{1}{d_1d_2}\int_{S_{00}} e^{i\frac{2\pi}{d_1}(p-m)x+i\frac{2\pi}{d_2}(q-n)y}\,dx\,dy.$$

В случае прямоугольных поршней со сторонами $a_1$ и $a_2$

$$(19)\qquad I(p,q,m,n)=\frac{a_1a_2}{d_1d_2}\frac{\sin\left[\pi(p-m)\frac{a_1}{d_1}\right]}{\pi(p-m)\frac{a_1}{d_1}}\frac{\sin\left[\pi(q-n)\frac{a_2}{d_2}\right]}{\pi(q-n)\frac{a_2}{d_2}}$$

и круглых поршней с радиусом $a$

$$(20)\qquad I(p,q,m,n)=2\frac{\pi a^2}{d_1d_2}\frac{J_1[w(p,q,m,n)ka]}{w(p,q,m,n)ka},$$

где

$$w(p,q,m,n)=2\pi\left\{\left(\frac{p-m}{kd_1}\right)^2+\left(\frac{q-n}{kd_2}\right)^2\right\}^{1/2},$$

$J_1(x)$ — функция Бесселя.

Отсюда импеданц излучения поршня в бесконечной фазированной антенной решетке при равномерном по амплитуде и линейно возрастающем по фазе возбуждении ее элементов определяется выражением

$$(21)\qquad Z_s^{п}=R_s^{п}-iX_s^{п}=\frac{1}{V_{0,0}}\int_{s_{00}} f(x,y)\,p(x,y,0)\,dx_0\,dy_0=$$

$$=\rho c S_э\sum_{m,n}^{M,N}A_{m,n}R^*(m,n).$$

Здесь и ниже звездочка обозначает комплексную сопряженность. Учитывая, что часть излучаемой энергии поглощается податливым экраном, для определения энергетических характеристик фазированной антенной решетки введем в рассмотрение импеданц излучения ячейки решетки

$$(22)\qquad Z_s^{р}=R_s^{р}-iX_s^{р}=\frac{1}{|V_{0,0}|^2}\int_{s_{00}} p(x,y,0)\,v^*(x,y,0)\,dx\,dy.$$

Поскольку колебательная скорость поверхности антенной решетки $v(x,y,0)$ может быть определена следующим образом:

$$(23)\qquad v(x,y,0)=\frac{1}{ik\rho c}\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\frac{V_{00}}{k}\sum_{m,n}\gamma(m,n)A_{m,n}e^{i\alpha(m)x+i\beta(n)y},$$

выражение для импеданца ячейки решетки в соответствии с формулами (15), (22) и (23) получает следующий вид:

$$(24)\qquad Z_s^{\text{р}}=\rho c\sum_{m,n}\sum_{p,q}A_{m,n}A^*_{p,q}(\cos\theta_z^{p,q})^*\times$$

$$\times\int_0^{d_1}\int_0^{d_2}e^{i[\alpha(m)-\alpha(p)]x+i[\beta(n)-\beta(q)]y}\,dx\,dy=\rho c d_1 d_2\sum_{m,n}|A_{m,n}|^2(\cos\theta_z^{m,n})^*.$$

Акустическую мощность, поглощаемую экраном в пределе одного периода антенной решетки (ячейки), определим как разность мощности, излучаемой поршнем, и мощности, излучаемой в верхнее полупространство ячейкой решетки

$$(25)\qquad W^{\text{э}}=W^{\text{п}}-W^{\text{р}}=={}^1/_2|V_{0,0}|^2\mathrm{Re}(Z_s^{\text{э}}),$$

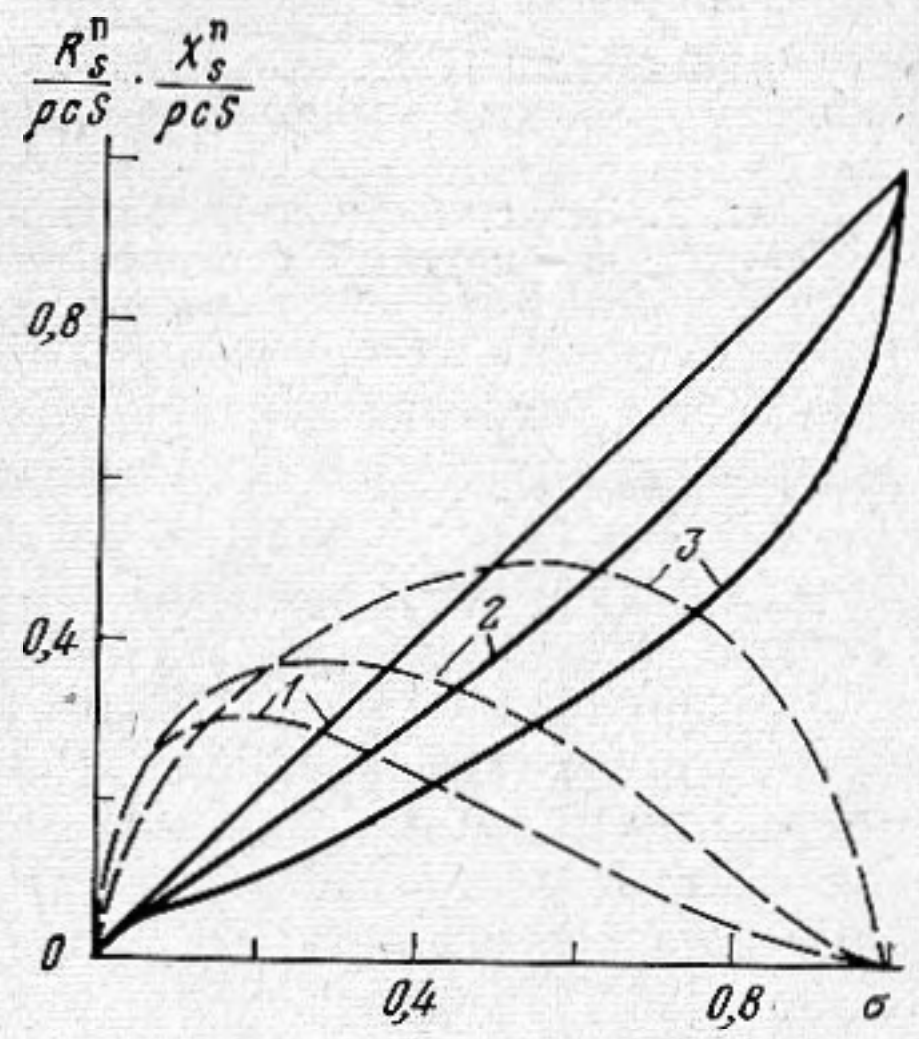
где

$$(26)\qquad Z_s^{\text{э}}=R_s^{\text{э}}-iX_s^{\text{э}}=Z_s^{\text{п}}-Z_s^{\text{р}}.$$

Таким образом, акустико-механический коэффициент полезного действия поршневого излучателя в экранированной протяженной фазированной антенной решетке в случае поглощающего экрана определяется следующим выражением

$$(27)\qquad \eta_{am}=\frac{R_s^{\text{п}}}{R_m+R_s^{\text{п}}}\frac{R_s^{\text{р}}}{R_s^{\text{п}}}=\frac{R_s^{\text{р}}}{R_m+R_s^{\text{р}}+R_s^{\text{э}}},$$

где $R_m$ — активные механические потери колебательной системы поршневого преобразователя.




Фиг. 1. Зависимости импеданца излучения квадратного поршня при $kd_1=kd_2=3$ и $ka_1=ka_2$

Звуковое давление, развиваемое ячейкой антенной решетки в зоне Фраунгофера в направлении фазирования на расстоянии $R_0$, найдем по формуле

$$(28)\qquad p_{\text{д}}(R_0\theta_x\theta_y)=-\frac{ik\rho c}{2\pi}\int_{S_{00}}V(x,y,0)\frac{e^{ikR}}{R}\,dx\,dy=$$

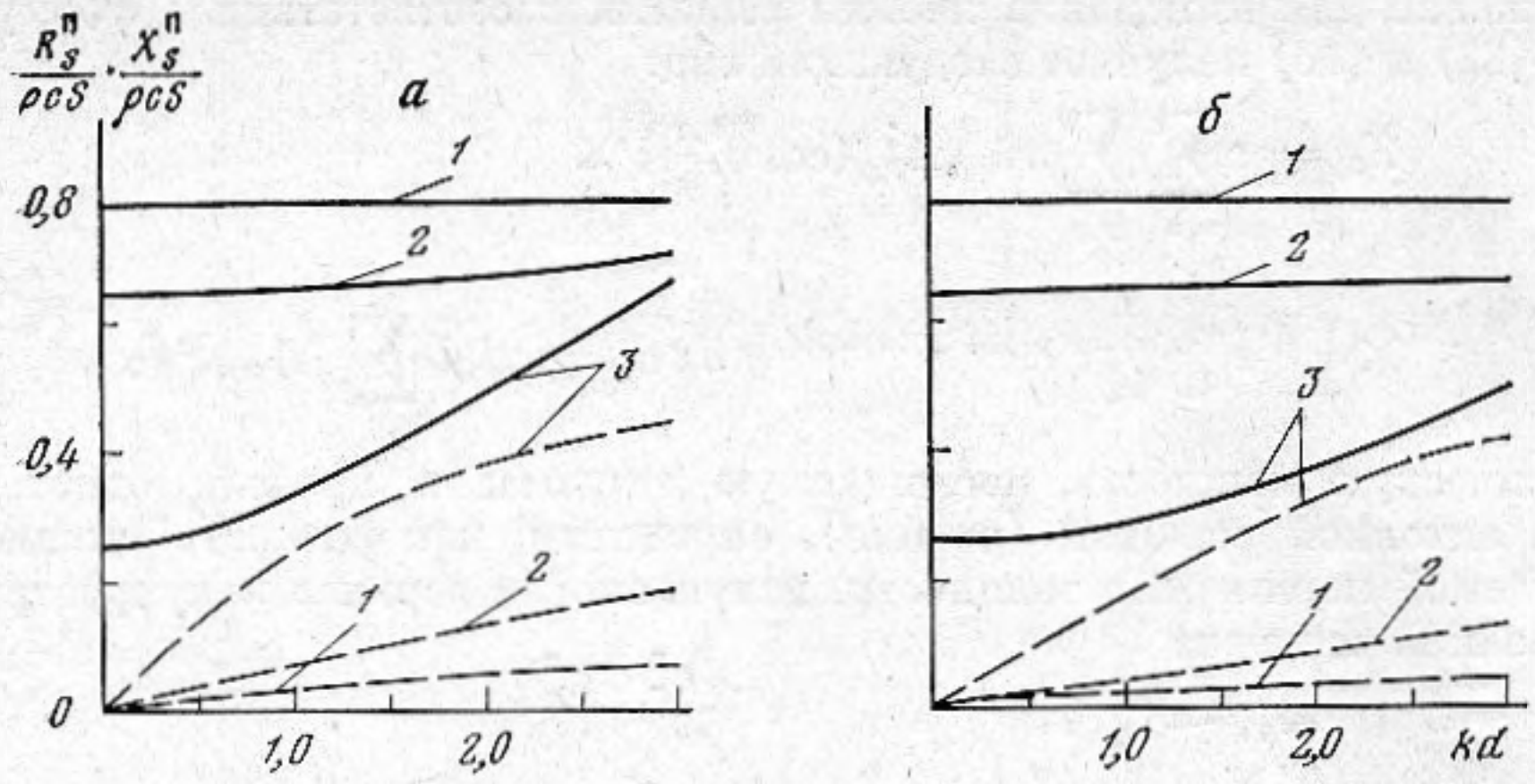
$$=-\frac{ik\rho c}{2\pi}V_{0,0}\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\sum_{m,n}A_{m,n}\cos\theta_z^{m,n}\int_{S_{00}}e^{i[\alpha(m)-k\cos\theta_x]x+i[\beta(n)-k\cos\theta_y]y}\,dx\,dy=$$

$$=-\frac{ik\rho c}{2\pi}S_{00}V_{00}\cos\theta_z\frac{e^{ikR_0}}{R_0}.$$

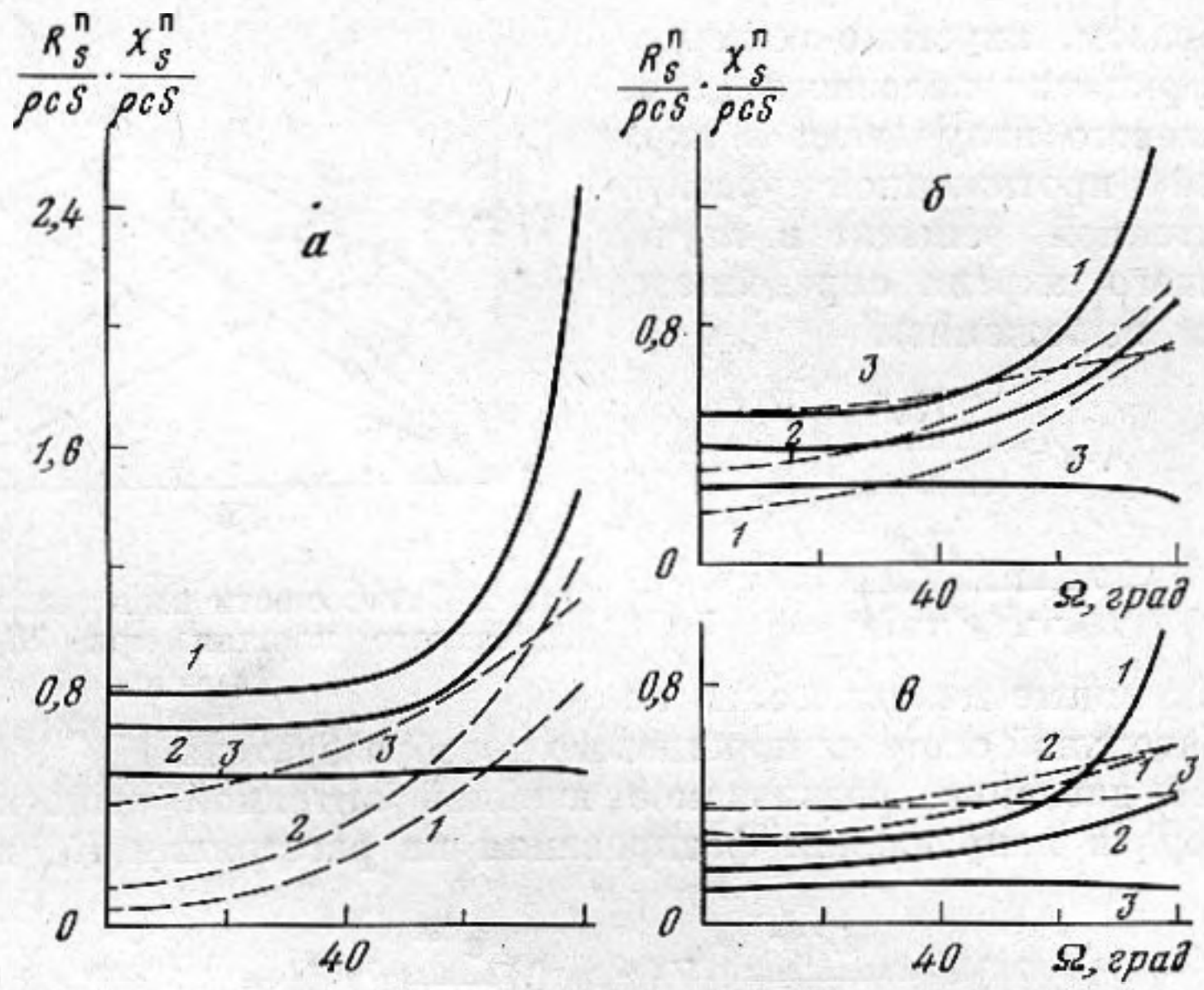
Пользуясь выражением для коэффициента концентрации, представленного через звуковое давление, развиваемое антенной в дальнем поле, и сопротивление излучения [1], для рассматриваемого нами случая фазированной решетки, состоящей из $N_{\text{р}}$ поршней, получим

$$(29)\qquad K=\frac{4\pi}{\rho cR_s^{\text{р}}N_p}\left|\frac{p_{\text{д}}(R_0;\theta_x,\theta_y)R_0N_p}{V_{0,0}}\right|^2=$$

$$=\frac{4\pi S_{\text{ант}}}{\lambda^2}\frac{(|A_{0,0}|\cos\theta_z)^2}{\mathrm{Re}\left[\sum_{m,n}|A_{m,n}|^2(\cos\theta_z^{m,n})^*\right]}$$




Фиг. 2. Зависимости импеданца излучения равновеликих поршней при $\sigma=\pi/4$: *а* – круглый поршень при $ka=0{,}5kd$; *б* – квадратный поршень при $ka_1=ka_2=\sqrt{0{,}25\pi}\,kd_1$




Фиг. 3. Зависимости импеданца излучения квадратного поршня при $ka_1=ka_2$: *а* – $\sigma=\pi/4$; *б* – $\sigma=0{,}5$; *в* – $\sigma=0{,}25$

Здесь $S_{ант}=d_1d_2N_p$ – площадь антенной решетки, $\lambda$ – длина звуковой волны во внешнем пространстве. Если периоды фазированной антенной решетки таковы, что выполняется неравенство

$$\left(\frac{2\pi}{kd_1}+\cos\theta_x\right)^2+\left(\frac{2\pi}{kd_2}+\cos\theta_y\right)^2>1, \tag{30}$$

т. е. в диаграмме направленности отсутствуют добавочные максимумы, равные основному, то выражение (29) совпадает с формулой, полученной для коэффициента концентрации антенной решетки с абсолютно жестким экраном [1]:

$$K=\frac{4\pi S_{ант}}{\lambda^2}\cos\theta_z. \tag{31}$$

Выражения (21)–(31) получены в предположении, что рассматриваемая протяженная фазированная антенная решетка возбуждается равномерно и столь велика по размерам, что параметры ее элементов соответст-

вуют параметрам бесконечной решетки. При этом, естественно, краевые поршни, находящиеся в особых условиях, в расчет не принимаются. Если протяженная решетка возбуждается произвольно, параметры ее могут быть найдены с использованием описанной в работе [7] процедуры, основанной на преобразовании Фурье решения соответствующей задачи излучения равномерно возбужденной бесконечной решетки. Так, при возбуждении только одного поршня в рассматриваемой бесконечной антенной решетке его характеристика направленности, следуя работе [7], может быть представлена в виде

$$R(\bar{r}_0)=\frac{A}{Z_м+Z^п(\bar{r}_0)}R(\bar{r}_0)_ж, \tag{32}$$

где $\bar{r}_0$ — орт, определяющий в данном случае текущее направление, $A$ — коэффициент пропорциональности, $Z_м$ — внутренний механический импеданц поршневого излучателя, $Z^п(\bar{r}_0)$ — импеданц излучения поршня в равномерно возбуждаемой бесконечной решетке, фазированной в направлении орта $\bar{r}_0$ (см. формулу (21)), $R(\bar{r}_0)_ж$ — характеристика направленности поршня в бесконечном жестком экране. При произвольном возбуждении поршневых излучателей характеристика направленности антенной решетки может быть получена в результате суперпозиции решений (32) с весовыми коэффициентами, которые определяются амплитудно-фазовым распределением внутренних возбуждающих сил по элементам решетки.

Ниже показаны некоторые результаты расчетов безразмерных импеданцев излучения поршней при равномерном амплитудном и линейно возрастающем фазовом распределениях колебательных скоростей по элементам бесконечной фазированной решетки. Активные составляющие импеданца излучения изображены сплошными линиями, реактивные — штриховыми. Обозначения *1*, *2* и *3* последовательно соответствуют значениям удельной проводимости экрана 0, 1 и 10. Значения импеданцев излучения, показанные на фиг. 1 и 2, вычислены при $\theta_1=\theta_2=90°$, показанные на фиг. 3 — при фазировании в плоскости $XOZ$ ($\theta_1=\mathrm{var}$, $\theta_2=90°$). Здесь $\Omega=90°-\theta_1$. Во всех случаях принималось $kd_1=kd_2$.

При рассмотрении зависимостей, показанных на фиг. 2, видно, что импеданцы излучения равновеликих круглых и квадратных поршней имеют близкие значения при различной степени податливости экрана. Зависимости, показанные на фиг. 3, иллюстрируют тот факт, что в случае весьма мягкого экрана активная составляющая импеданца излучения сохраняет свое значение почти неизменным при существенном изменении направления фазирования антенной решетки.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Смарышев М. Д.* Направленность гидроакустических антенн. Л., «Судостроение», 1973.
2. *Mangulis V.* Infinite arrays with nonrigid interstrices. J. Acoust. Soc. America, 1970, *48*, 1(2), 352–356.
3. *Mangulis V.* On arrays with nonrigid interstrices. J. Acoust. Soc. America, 1971, *49*, 1(2), 262–266.
4. *Ван дер Поль Б., Бреммер Х.* Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
5. *Брейн Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
6. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
7. *Добровольский Ю. Ю.* К определению параметров протяженных акустических антенн, состоящих из резонансных поршневых излучателей. Акуст. ж., 1975, *21*, 4, 538–543.



Поступила
27 июня 1978 г.
После исправления
22 января 1979 г.